Université de Rennes 1 *Vendredi 15 juin 2018*
L1 mathématiques

Algèbre et Géométrie 1

Examen terminal - session 2
Durée de l'examen : 2h.

La consultation de document ainsi que l'utilisation de calculatrice, de téléphone portable, tablette ou ordinateur ne sont pas autorisées. Sauf mention explicite du contraire, toute réponse doit être accompagnée d'une démonstration la justifiant. La notation tiendra compte de la qualité du raisonnement ainsi que du soin apporté à la rédaction et la présentation.
Le sujet comporte deux pages et cinq exercices.

Exercice 1
On considère les formules suivantes :
(F_1) $\exists n \in \mathbf{N}, \forall p \in \mathbf{N}, p \leqslant n$
(F_2) $\forall n \in \mathbf{N}, \exists p \in \mathbf{N}, p \leqslant n$
(F_3) $\forall n \in \mathbf{N}, \exists p \in \mathbf{N}, n \neq 2p \Rightarrow n = 2p + 1$

1. Pour chacune de ces formules, exprimer sa négation sans utiliser l'opérateur logique de négation *(aucune justification n'est demandée)*.
2. Pour chacune de ces formules, déterminer si elle est vraie.

Exercice 2
Pour tout entier naturel n, on pose $S_n := \sum_{k=0}^{n} k$ et $T_n := \sum_{k=0}^{n} k^2$.
1. Pour $n \in \{1, 2, 3\}$, donner les valeurs de S_n et T_n .
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Soit n un entier naturel. Exprimer $(n + 1)^4 - n^4$ en fonction de n^3, n^2 et n.
4. En utilisant les résultats des questions 2 et 3 et une somme télescopique, démontrer, *sans raisonner par récurrence*, que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 3
On désigne par $\mathcal{P}$ le plan euclidien.
1. *Cette question est une question de cours et aucune justification n'est demandée.*
   Soit (A_1, α_1), (A_2, α_2), (A_3, α_3) trois points pondérés de $\mathcal{P}$. À quelle condition portant sur α_1, α_2 et α_3 le barycentre G de ce système de points pondérés est-il défini ? Lorsque cette condition est vérifiée, donner, pour tout $M \in \mathcal{P}$, une relation vectorielle faisant intervenir G, M, A_1, A_2 et A_3.
2. Soit A et B des points de $\mathcal{P}$. Soit G le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -3)$.
   (a) Soit $M \in \mathcal{P}$. Exprimer $\left\|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right\|$ en fonction de M et G.
   (b) En déduire une description géométrique simple de l'ensemble
   $$\left\{M \in \mathcal{P}, \quad \left\|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right\| = 4\right\}.$$
   Faire un dessin en supposant $AB = 1$.

3. Soit A, B et C des points de $\mathcal{P}$. Déterminer une description géométrique simple de l'ensemble

$$\left\{M \in \mathcal{P}, \quad \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|\right\}$$

Faire un dessin.

Exercice 4

On désigne par $\mathcal{P}$ le plan euclidien muni d'un repère orthonormé. Soit A, B et C trois points de $\mathcal{P}$ deux à deux distincts et d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. On rappelle que le triangle ABC est dit équilatéral si $AB = AC = BC$. On note j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Pour tout nombre complexe $z \in \mathbf{C}$, simplifier l'expression $(1-z)(1+z+z^2)$. En déduire une expression simplifiée de $1+j+j^2$. Montrer que $e^{\frac{i\pi}{3}} = -j^2$.
2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On suppose dans cette question que $B = r(C)$. Exprimer $z_C - z_A$ en fonction de j, z_B et z_A. En déduire l'expression de $z_C - z_B$ en fonction de j, z_A et z_B, puis que le triangle ABC est équilatéral.
3. On suppose dans cette question que le triangle ABC est équilatéral. Justifier qu'il existe un réel α tel que $z_C - z_A = e^{i\alpha}(z_B - z_A)$. Exprimer $z_C - z_B$ en fonction de α, z_A et z_B. En déduire que $|1 - e^{i\alpha}| = 1$, puis que α est égal modulo 2π à $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$.
4. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) le triangle ABC est équilatéral ;
   (b) on a $z_C + z_A j + z_B j^2 = 0$ ou $z_C + z_B j + z_A j^2 = 0$;
   (c) on a $z_A^2 + z_B^2 + z_C^2 = z_A z_B + z_B z_C + z_C z_A$.

   Indication : on pensera à développer $(z_C + z_A j + z_B j^2)(z_C + z_B j + z_A j^2)$.

Exercice 5

1. Déterminer un couple $(a_0, b_0) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $17a_0 + 7b_0 = 1$; les calculs effectués doivent apparaître sur la copie.
2. Soit $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $17a + 7b = 1$. Montrer que 7 divise $a - a_0$. En déduire qu'il existe un entier k tel que $a = a_0 + 7k$ et $b = b_0 - 17k$.
3. Déduire de ce qui précède une description de l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation

$$17a + 7b = 1, \quad (a, b) \in \mathbf{Z}^2.$$

   Déterminer la liste des éléments $(a, b) \in \mathcal{S}$ vérifiant $0 \leqslant a \leqslant 30$.
4. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation

$$21a + 7b = 1, \quad (a, b) \in \mathbf{Z}^2.$$