Université de Rennes 1 *Vendredi 15 juin 2018*
L1 mathématiques

Algèbre et Géométrie 1

Examen terminal - session 2
Durée de l'examen : 2h.

La consultation de document ainsi que l'utilisation de calculatrice, de téléphone portable, tablette ou ordinateur ne sont pas autorisées. Sauf mention explicite du contraire, toute réponse doit être accompagnée d'une démonstration la justifiant. La notation tiendra compte de la qualité du raisonnement ainsi que du soin apporté à la rédaction et la présentation.
Le sujet comporte deux pages et cinq exercices.

Exercice 1
On considère les formules suivantes :
$(F_1)\quad \exists n \in \mathbf{N}, \forall p \in \mathbf{N}, p \leqslant n$
$(F_2)\quad \forall n \in \mathbf{N}, \exists p \in \mathbf{N}, p \leqslant n$
$(F_3)\quad \forall n \in \mathbf{N}, \exists p \in \mathbf{N}, n \neq 2p \Rightarrow n = 2p + 1$

1. Pour chacune de ces formules, exprimer sa négation sans utiliser l'opérateur logique de négation *(aucune justification n'est demandée).*
   Correction :
   $non(F_1)\quad \forall n \in \mathbf{N}, \exists p \in \mathbf{N}, p > n$
   $non(F_2)\quad \exists n \in \mathbf{N}, \forall p \in \mathbf{N}, p > n$
   $non(F_3)\quad \exists n \in \mathbf{N}, \forall p \in \mathbf{N}, n \neq 2p \text{ et } n \neq 2p + 1$

2. Pour chacune de ces formules, déterminer si elle est vraie.
   Correction : La formule (F_1) est fausse. Pour le justifier, montrons que la négation de (F_1) est vraie. Soit $n \in \mathbf{N}$. Posons $p = n + 1$. Ainsi $p \in \mathbf{N}$ et par ailleurs on a $p > n$. Ainsi on a bien $\exists p \in \mathbf{N}, p > n$. Ceci étant vrai pour tout élément $n \in \mathbf{N}$, le négation de (F_1) est vraie.
   La formule (F_2) est vraie. Justifions-le. Soit $n \in \mathbf{N}$. Posons $p = n$. Ainsi $p \in \mathbf{N}$ et par ailleurs on a $p \leqslant n$. Ainsi on a bien $\exists p \in \mathbf{N}, p \leqslant n$. Ceci étant vrai pour tout élément $n \in \mathbf{N}$, (F_2) est vraie.
   La formule (F_3) est vraie. Justifions-le. On commence par remarquer que d'après le cours de logique, (F_3) se réécrit
   $$\forall n \in \mathbf{N}, \exists p \in \mathbf{N}, n = 2p \text{ ou } n = 2p + 1.$$
   Soit $n \in \mathbf{N}$. Le théorème de la division euclidienne nous dit (division euclidienne de n par 2) qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ et $r \in \mathbf{N}$ qui vérifient $n = 2p + r$ et $0 \leqslant r < 2$. Cette dernière condition se réécrit $r = 0$ ou $r = 1$, ce qui donne le résultat.

Exercice 2
Pour tout entier naturel n, on pose $S_n := \sum_{k=0}^{n} k$ et $T_n := \sum_{k=0}^{n} k^2$.

1. Pour $n \in \{1, 2, 3\}$, donner les valeurs de S_n et T_n .
   Correction : On a
   $$S_1 = 0 + 1 = 1, \quad S_2 = 0 + 1 + 2 = 3, \quad S_3 = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$$
   et
   $$T_1 = 0 + 1^2 = 1, \quad S_2 = 0 + 1^2 + 2^2 = 5, \quad S_3 = 0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14.$$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Correction : Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{H}_n$ l'assertion « $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».
Montrons que $\mathcal{H}_0$ est vraie. On a $S_0 = 0$. Par ailleurs $\frac{0(0+1)}{2} = 0$. Donc on a bien $S_0 = \frac{0(0+1)}{2}$ et $\mathcal{H}_0$ est vraie.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est encore vraie. Par définition de S_n, on a $S_{n+1} = S_n + (n+1)$. Comme $\mathcal{H}_n$ est vraie, on a $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Ainsi on a
$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(1+\frac{n}{2}) = (n+1)\frac{n+2}{2}$$
soit
$$S_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$
Ceci montre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
On a donc bien montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{H}_n$ est vraie.
Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{H}'_n$ l'assertion « $T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».
Montrons que $\mathcal{H}'_0$ est vraie. On a $T_0 = 0$. Par ailleurs $\frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0$. Donc on a bien $T_0 = \frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}$ et $\mathcal{H}'_0$ est vraie.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{H}'_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{H}'_{n+1}$ est encore vraie. Par définition de T_n, on a $T_{n+1} = T_n + (n+1)^2$. Comme $\mathcal{H}'_n$ est vraie, on a $T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Ainsi on a
$$T_{n+1} = T_n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left(n+1+\frac{n(2n+1)}{6}\right)$$
soit
$$T_{n+1} = \frac{(n+1)(6n+6+2n^2+n)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}.$$
Ceci montre que $\mathcal{H}'_{n+1}$ est vraie.
On a donc bien montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{H}'_n$ est vraie.

3. Soit n un entier naturel. Exprimer $(n+1)^4 - n^4$ en fonction de n^3, n^2 et n.
Correction : Par la formule du binôme de Newton, on a
$$(n+1)^4 = \binom{4}{0}n^4 + \binom{4}{1}n^3 + \binom{4}{2}n^2 + \binom{4}{1}n + \binom{4}{0}$$
soit
$$(n+1)^4 - n^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$$

4. En utilisant les résultats des questions 2 et 3 et une somme télescopique, démontrer, *sans raisonner par récurrence*, que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
Correction : Pout $n \in \mathbf{N}$ et k entier compris entre 0 et n, on a d'après la question 3
$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$
soit en sommant
$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 - k^4 = 4(\sum_{k=0}^{n} k^3) + 6T_n + 4T_n + n + 1.$$

Par ailleurs (somme télescopique)

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4-k^4=\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4-\sum_{k=0}^{n}k^4=\sum_{k=1}^{n+1}k^4-\sum_{k=0}^{n}k^4=(n+1)^4+\sum_{k=1}^{n}k^4-\sum_{k=1}^{n}k^4-0=(n+1)^4.$$

Ainsi

$$(n+1)^4=4(\sum_{k=0}^{n}k^3)+6T_n+4T_n+n+1.$$

D'après la question 2, on en déduit

$$4(\sum_{k=0}^{n}k^3)=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)$$

$$=(n+1)(n^3+3n^2+3n+1-(2n^2+n)-2n-1)=(n+1)(n^3+n^2)=n^2(n+1)^2.$$

Exercice 3

On désigne par $\mathcal{P}$ le plan euclidien.

1. *Cette question est une question de cours et aucune justification n'est demandée.*
   Soit (A_1,α_1), (A_2,α_2), (A_3,α_3) trois points pondérés de $\mathcal{P}$. À quelle condition portant sur α_1, α_2 et α_3 le barycentre G de ce système de points pondérés est-il défini ? Lorsque cette condition est vérifiée, donner, pour tout $M\in\mathcal{P}$, une relation vectorielle faisant intervenir G, M, A_1, A_2 et A_3.
   Correction : Le barycentre G est a été défini en cours sous la condition $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\neq 0$. On a alors, pour tout élément M de $\mathcal{P}$, la relation vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\overrightarrow{MA_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\overrightarrow{MA_2}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\overrightarrow{MA_3}.$$

2. Soit A et B des points de $\mathcal{P}$. Soit G le barycentre de $(A,1)$ et $(B,-3)$.
   (a) Soit $M\in\mathcal{P}$. Exprimer $\left\|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right\|$ en fonction de M et G.
   Correction : On peut noter que comme $1+(-3)=-2\neq 0$, G est bien défini. On sait qu'on a alors $-2\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}$. On en tire

$$\left\|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{MG}\right\|=|-2|\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=2GM.$$

   (b) En déduire une description géométrique simple de l'ensemble

$$\left\{M\in\mathcal{P},\quad \left\|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right\|=4\right\}.$$

   Faire un dessin en supposant $AB=1$.
   Correction : D'après la question précédente, l'ensemble en question est

$$\{M\in\mathcal{P},\quad 2GM=4\}$$

   c'est-à-dire l'ensemble

$$\{M\in\mathcal{P},\quad GM=2\}.$$

   Sous cette dernière écriture, on voit qu'il s'agit du cercle de centre G et de rayon 2. Pour le dessin, cf. la fin du document.

3. Soit A, B et C des points de $\mathcal{P}$. Déterminer une description géométrique simple de l'ensemble

$$\left\{M \in \mathcal{P}, \quad \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|\right\}$$

Faire un dessin.
Correction : Motivé par la question précédente, introduisons G_1 le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,1)$ et G_2 le barycentre de $(A,2)$, $(B,2)$ et $(C,-1)$. Comme $1+1+1=3\neq 0$ et $2+2-1=3\neq 0$, ces barycentres sont bien définis, et l'ensemble qui nous intéresse se réécrit

$$\left\{M \in \mathcal{P}, \quad \left\|3\overrightarrow{MG_1}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MG_2}\right\|\right\}$$

soit

$$\left\{M \in \mathcal{P}, \quad 3\left\|\overrightarrow{MG_1}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{MG_2}\right\|\right\}$$

soit encore

$$\{M \in \mathcal{P}, \quad G_1M = G_2M\}.$$

Cet ensemble est donc l'ensemble des points équidistants de G_1 et G_2. Si $G_1 \neq G_2$, il s'agit donc de la médiatrice du segement $[G_1G_2]$. Si $G_1 = G_2$, il s'agit du plan $\mathcal{P}$ tout entier.
Même si ce n'était pas un attendu de la question, on pouvait déterminer explicitement à quelle condition le cas $G_1 = G_2$ se produit. On sait en effet qu'on a

$$3\overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}, \quad 3\overrightarrow{AG_2} = 2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

et ainsi $G_1 = G_2$ si et seulement si $3\overrightarrow{AG_1} = 3\overrightarrow{AG_2}$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$. En particulier, si A, B et C ne sont pas alignés, on a $G_1 \neq G_2$.
Pour le dessin, cf. la fin du document.

Exercice 4
On désigne par $\mathcal{P}$ le plan euclidien muni d'un repère orthonormé. Soit A, B et C trois points de $\mathcal{P}$ deux à deux distincts et d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. On rappelle que le triangle ABC est dit équilatéral si $AB = AC = BC$. On note j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Pour tout nombre complexe $z \in \mathbf{C}$, simplifier l'expression $(1-z)(1+z+z^2)$. En déduire une expression simplifiée de $1+j+j^2$. Montrer que $e^{\frac{i\pi}{3}} = -j^2$.
Correction : Soit $z \in \mathbf{C}$. On a

$$(1-z)(1+z+z^2) = 1+z+z^2-z-z^2-z^3 = 1-z^3.$$

Ainsi

$$(1-j)(1+j+j^2) = 1-j^3 = 1-(e^{\frac{2i\pi}{3}})^3 = 1-e^{2i\pi} = 1-1 = 0.$$

Comme $\frac{2i\pi}{3}$ n'est pas égal à 0 modulo 2π, on a $j \neq 1$ donc $1-j\neq 0$ et finalement $1+j+j^2 = 0$.
Par ailleurs on a

$$\frac{\pi}{3} = \pi + \frac{4\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = \pi + \frac{4\pi}{3} - 2\pi$$

d'où

$$e^{\frac{i\pi}{3}} = e^{i\pi+\frac{4i\pi}{3}} = e^{i\pi}(e^{\frac{2i\pi}{3}})^2 = -j^2.$$

2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On suppose dans cette question que $B = r(C)$. Exprimer $z_C - z_A$ en fonction de j, z_B et z_A. En déduire l'expression de $z_C - z_B$ en fonction de j, z_A et z_B, puis que le triangle ABC est équilatéral.
Correction : Puisque $B = r(C)$, on a d'après le cours $z_B - z_A = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_C - z_A)$. D'après la question précédente, on a donc $z_B - z_A = -j^2(z_C - z_A)$. soit
$$z_C - z_A = -\frac{1}{j^2}(z_B - z_A) = -\frac{j^3}{j^2}(z_B - z_A) = -j(z_B - z_A).$$
On a alors
$$z_C - z_B = z_C - z_A + z_A - z_B = -j(z_B - z_A) + z_A - z_B = (z_A - z_B)(1 + j)$$
soit d'après la question précédente
$$z_C - z_B = -j^2(z_A - z_B).$$
De $z_C - z_A = -j(z_B - z_A)$, on tire $|z_C - z_A| = |-j|\,|z_B - z_A| = |z_B - z_A|$. De $z_C - z_B = -j^2(z_A - z_B)$, on tire $|z_C - z_B| = |-j^2|\,|z_A - z_B| = |z_A - z_B|$. Ainsi $AC = AB$ et $CB = AB$ ce qui montre que ABC est équilatéral.

3. On suppose dans cette question que le triangle ABC est équilatéral. Justifier qu'il existe un réel α tel que $z_C - z_A = e^{i\alpha}(z_B - z_A)$. Exprimer $z_C - z_B$ en fonction de α, z_A et z_B. En déduire que $|1 - e^{i\alpha}| = 1$, puis que α est égal modulo 2π à $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$.
Correction : Par hypothèse, B est différent de A donc $z_B - z_A \neq 0$. Par ailleurs, comme ABC est équilatéral, on a $AC = AB$ soit $|z_C - z_A| = |z_B - z_A|$, donc $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = 1$. Donc il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$, soit $z_C - z_A = e^{i\alpha}(z_B - z_A)$. On a alors
$$z_C - z_B = z_C - z_A + z_A - z_B = e^{i\alpha}(z_B - z_A) + z_A - z_B = (z_A - z_B)(1 - e^{i\alpha})$$
soit $1 - e^{i\alpha} = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. Comme ABC est équilatéral, on a $AB = BC$ d'où $\left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = \frac{|z_C - z_B|}{|z_A - z_B|} = 1$. Ainsi $|1 - e^{i\alpha}| = 1$.
La forme algébrique de $1 - e^{i\alpha}$ est $1 - \cos(\alpha) - i\sin(\alpha)$. On a donc
$$1 = \left|1 - e^{i\alpha}\right|^2 = (1 - \cos(\alpha)^2) + \sin^2(\alpha)$$
$$= 1 - 2\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 2 - 2\cos(\alpha).$$
On en tire $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$, ce qui montre bien que α est égal modulo 2π à $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$.

4. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) le triangle ABC est équilatéral ;
   (b) on a $z_C + z_A j + z_B j^2 = 0$ ou $z_C + z_B j + z_A j^2 = 0$;
   (c) on a $z_A^2 + z_B^2 + z_C^2 = z_A z_B + z_B z_C + z_C z_A$.
   Indication : on pensera à développer $(z_C + z_A j + z_B j^2)(z_C + z_B j + z_A j^2)$.

Correction : On a
$$(z_C + z_A j + z_B j^2)(z_C + z_B j + z_A j^2) = z_C^2 + z_B z_C j + z_A z_C j^2 + z_A z_C j + z_A z_B j^2 + z_A^2 j^3 + z_B z_C j^2 + z_B^2 j^3 + z_A z_B j^4.$$
Comme $j^3 = 1$, on a $j^4 = j$, soit
$$(z_C + z_A j + z_B j^2)(z_C + z_B j + z_A j^2) = z_C^2 + z_B z_C j + z_A z_C j^2 + z_A z_C j + z_A z_B j^2 + z_A^2 + z_B z_C j^2 + z_B^2 + z_A z_B j.$$

D'après la première question, on a $j + j^2 = -1$*, d'où*

$$(z_C + z_A j + z_B j^2)(z_C + z_B j + z_A j^2) = z_A^2 + z_B^2 + z_C^2 - z_A z_B - z_A z_C - z_B z_C.$$

Un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul. Ainsi la condition (b) de l'énoncé équivaut à la nullité du produit $(z_C + z_A j + z_B j^2)(z_C + z_B j + z_A j^2)$*, ce qui d'après ce qui précède équivaut à la condition (c).*
Pour terminer la démonstration demandée, il suffit donc de montrer que (a) et (b) sont équivalentes.
Supposons (a) vraie. D'après la question précédente, on a soit $z_C - z_A = e^{\frac{i}{\pi}3}(z_B - z_A) = -j^2(z_B - z_A)$ *soit* $z_C - z_A = e^{\frac{-i}{\pi}3}(z_B - z_A) = -j(z_B - z_A)$ *(la dernière égalité peut se justifier par exemple en écrivant* $e^{\frac{-i}{\pi}3} = e^{\frac{i}{\pi}3}e^{-\frac{2i}{\pi}3} = -j^2/j$*). Dans le premier cas, on a*

$$0 = z_C + z_A(-1 - j^2) + j^2 z_B = z_C + j z_A + j^2 z_B$$

Dans le second cas, on a

$$0 = z_C + z_A(-1 - j) + j z_B = z_C + j^2 z_A + j z_B.$$

Ainsi (b) est vérifiée.
Réciproquement, supposons (b) vérifiée. Si $z_C + j^2 z_A + j z_B = 0$*, on obtient en multipliant par* $-j^2$ *que* $z_B - z_A = -j^2(z_C - z_A)$ *et d'après la question 2 on en déduit que le triangle* ABC *est équilatéral.*
Si $z_C + j^2 z_B + j z_A = 0$*, on obtient en échangeant* z_A *et* z_B *dans le calcul précédent que que* $z_A - z_B = -j^2(z_C - z_B)$*. La question 2, appliquée en permutant les rôles de* A *et* B*, montre là encore que le triangle* ABC *est équilatéral.*

Exercice 5

1. Déterminer un couple $(a_0, b_0) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $17a_0 + 7b_0 = 1$; les calculs effectués doivent apparaître sur la copie.
   Correction : Appliquons l'algorithme d'Euclide. On effectue la division euclidienne de 17 *par* 7

   $$17 = 2 \times 7 + 3$$

   puis la division euclidienne de 7 *par* 3

   $$7 = 2 \times 3 + 1.$$

   Ainsi 17 *et* 7 *sont premiers entre eux, et pour trouver un couple tel que demandé on « remonte »les divisions euclidiennes (on pouvait aussi utiliser l'algorithme d'Euclide étendu).*

   $$1 = 7 - 2 \times 3 = 7 - 2 \times (17 - 2 \times 7) = 5 \times 7 - 2 \times 17.$$

   Ainsi le couple $(a_0, b_0) = (-2, 5)$ *convient.*
2. Soit $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $17a + 7b = 1$. Montrer que 7 divise $a - a_0$. En déduire qu'il existe un entier k tel que $a = a_0 + 7k$ et $b = b_0 - 17k$.
   Correction : On a $17a + 7b = 1 = 17a_0 + 7b_0$ *d'où* $17(a - a_0) = 7(b_0 - b)$*. Ainsi* 7 *divise* $17(a - a_0)$ *et comme* 7 *et* 17 *sont premiers entre eux,* 7 *divise* $a - a_0$*. Il existe donc* $k \in \mathbf{Z}$ *tel que* $a - a_0 = 7k$*. Comme* $17(a - a_0) = 7(b_0 - b)$*, on a* $17 \times 7k = 7(b_0 - b)$ *soit en divisant par* 7 *qui est non nul* $b_0 - b = 17k$ *d'où* $b = b_0 - 17k$*.*

3. Déduire de ce qui précède une description de l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation

$$17a + 7b = 1, \quad (a, b) \in \mathbf{Z}^2.$$

Correction : La question précédente montre que $\mathcal{S}$ *est contenu dans l'ensemble*

$$\{(a_0 + 7k, b_0 - 17k)\}_{k \in \mathbf{Z}}.$$

Montrons que ce dernier ensemble est inclus dans $\mathcal{S}$*. Soit* $k \in \mathbf{Z}$*. On a*

$$17(a_0 + 7k) + 7(b_0 - 17k) = 17a_0 + 7b_0 + 17.7k - 7.17k = 17a_0 + 7b_0 = 1$$

Ceci montre que $(a_0 + 7k, b_0 - 17k) \in \mathcal{S}$*. Ainsi*

$$\mathcal{S} = \{(a_0 + 7k, b_0 - 17k)\}_{k \in \mathbf{Z}} = \{(-2 + 7k, 5 - 17k)\}_{k \in \mathbf{Z}}.$$

Déterminer la liste des éléments $(a, b) \in \mathcal{S}$ vérifiant $0 \leqslant a \leqslant 30$.
Correction : D'après ce qui précède, il suffit de trouver les éléments $k \in \mathbf{Z}$ *vérifiant* $0 \leqslant -2 + 7k \leqslant 30$*, ce qui équivaut à* $2 \leqslant 7k \leqslant 32$ *ou encore à* $\frac{2}{7} \leqslant k \leqslant \frac{32}{7}$*. Comme* k *est entier, cette dernière condition équivaut à* $k \in \{1, 2, 3, 4\}$*.*
On en déduit la liste demandée :

$$(5, -12), \quad (12, -29), \quad (19, -46), \quad (26, -63).$$

4. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation

$$21a + 7b = 1, \quad (a, b) \in \mathbf{Z}^2.$$

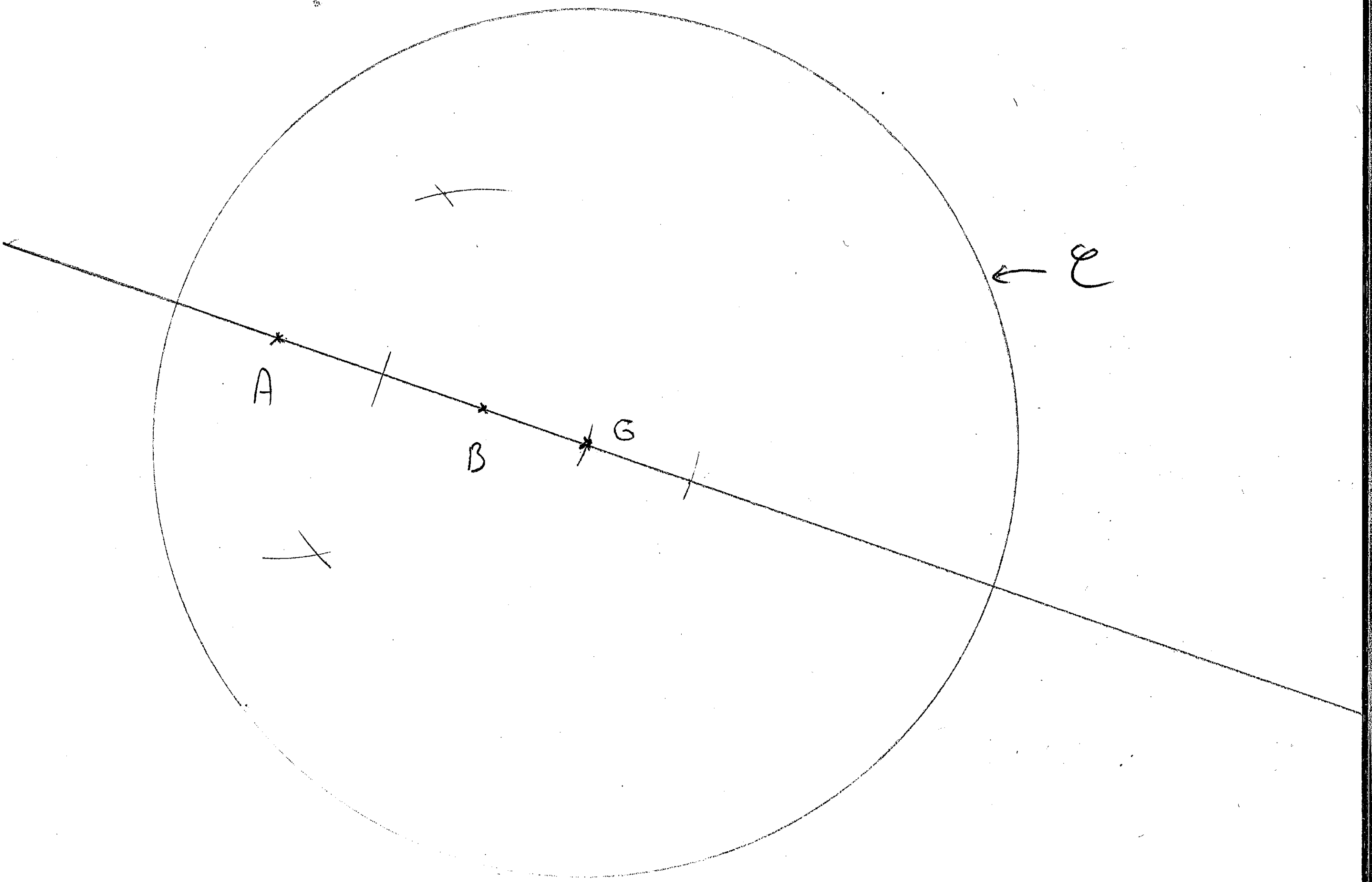
Correction : Montrons par l'absurde que l'ensemble des solutions est vide. Supposons qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ *tel que* $21a + 7b = 1$*. Alors* $1 = 7(b + 3a)$*, donc* 7 *divise* 1 *ce qui est absurde. Donc l'ensemble des solutions est vide.*

Q 3.2 (b)

$\vec{AG} = \frac{3}{2}\vec{AB}$

$AB = 1$

$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{S},\ GM = 2\}$



Q 3.3 $\quad G_1 = \mathrm{Bar}\{(A,2)(B,2),(C,1)\}$

$G_2 = \mathrm{Bar}\{(A,2)(B,2),(C,-1)\}$

$\Delta = \{M \in J, MG_1 = MG_2\}$