Algèbre et Arithmétique 3

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Examen comptant pour la note de contrôle continu
Lundi 25 mars 2013
Durée : 1h30

Le sujet comporte une page et 6 exercices.
Documents de cours, calculatrices, téléphones portables, etc... sont interdits.
TOUTES les réponses doivent être JUSTIFIÉES.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction dans l'évaluation.
RELISEZ VOS COPIES !

Exercice 1

(tiré de la liste d'exercices « Connaissances mathématiques élémentaires pour le L2 ») Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^2 - 2\,z - 1 - 2\,i = 0$.

Exercice 2

Expliquez comment construire un corps à 4 éléments, et calculer la table de multiplication d'un tel corps.

Exercice 3

1 Rappeler la définition du support d'un cycle.
2 *Vrai ou faux ?* Soit c un cycle. Alors pour tout $n \geqslant 1$, c^n est encore un cycle.
3 Soit c_1 et c_2 des cycles à supports disjoints, de longueurs respectives r_1 et r_2. Déterminer l'ordre de $c_1 c_2$. *On admettra que l'ordre d'un cycle de longueur r est r*

Exercice 4

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $G = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \sigma(n) = n\}$. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$, et déterminer un groupe « connu » auquel G est isomorphe.

Exercice 5

Soit G un groupe et g un élément de G supposé d'ordre fini n. Soit k un entier relatif. Rappeler le résultat du cours donnant l'ordre de g^k en fonction de k et de n, puis le démontrer.

Exercice 6

Soit k un corps fini de cardinal q.
1 Pour $n \geqslant 1$, combien y a-t-il d'éléments de $k[X]$ de degré n et unitaires ?
2 On dit qu'un élément P de $k[X]$ est sans facteur carré s'il n'existe pas de polynôme *non constant* Q tel que Q^2 divise P.

Si $k = \mathbf{F}_2$, donner un exemple de polynôme de degré 3 sans facteur carré.

Montrer que tout polynôme unitaire P s'écrit de manière unique $Q^2.R$ où Q est unitaire et R est unitaire sans facteur carré.

Soit $n \geqslant 2$. Montrer que le nombre u_n d'éléments de $k[X]$ de degré n, unitaires et sans facteur carré est $q^n - q^{n-1}$. *Indication :* on pourra procéder par récurrence et exprimer le nombre de polynômes unitaires de degré n *avec* un facteur carré en fonction des u_m, $m < n$.