



Algèbre et Arithmétique 3

Examen comptant pour la note de contrôle continu

Lundi 18 février 2013

Durée : 1h30

Le sujet comporte une page et quatre exercices.
Documents de cours, calculatrices, téléphones portables, etc... sont interdits.
TOUTES les réponses doivent être JUSTIFIÉES.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction dans l'évaluation.
RELISEZ VOS COPIES !

Exercice 1

(tiré de la liste d'exercices « Connaissances mathématiques élémentaires pour le L2 »)

Calculer $\int_0^1 (4x^2 - 6x + 1) \exp(-2x) dx$.

Exercice 2

Donner la démonstration (vue en cours) du résultat suivant : soit G un sous-groupe de $\mathbf{Z}$; alors il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $G = n\mathbf{Z} = \{n.m, m \in \mathbf{Z}\}$.

Exercice 3

Soit $(G, \star)$ et $(H, \otimes)$, $(K, \perp)$ des groupes d'éléments neutres respectifs e_G , e_H et e_K , $\varphi : G \rightarrow H$ et $\psi : H \rightarrow K$ des morphismes de groupes.

1 Rappel ce que « φ est un morphisme de groupes » signifie (on attend une réponse sous forme d'une formule avec quantificateurs).

2 Montrer que $\psi \circ \varphi$ est un morphisme de groupes.

3 Démontrer, à l'aide d'une récurrence soigneusement rédigée (on indiquera en particulier l'hypothèse de récurrence) : $\forall g \in G, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \varphi(g^{\star n}) = \varphi(g)^{\otimes n}$.

4 En déduire : $\forall g \in G, \quad \forall n \in \mathbf{Z}, \quad \varphi(g^{\star n}) = \varphi(g)^{\otimes n}$.

5 Dans cette question et dans cette question seulement, on suppose que la loi de groupe sur G est notée multiplicativement et que la loi de groupe sur H est notée additivement. Réécrire alors l'assertion démontrée dans la question précédente.

6 Soit $g \in G$ un élément d'ordre fini. Montrer que $\varphi(g)$ est d'ordre fini. Que peut-on dire de l'ordre de $\varphi(g)$ par rapport à celui de g ?

7 Donner un exemple explicite qui montre que l'ordre de $\varphi(g)$ peut être différent de l'ordre de g .

Exercice 4

1 Soit p un nombre premier. On pose $N = p^2$.

1. Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$ vérifiant $x.y = [0]_N$.

2. En déduire l'ensemble des $x \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ solutions de l'équation

$$x^2 - [12]_N.x + [11]_N = [0]_N.$$

On rappelle à toutes fins utiles qu'on a pour $a, b \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2.ab + b^2 = a^2 + [2]_N.ab + b^2$; on discutera suivant les valeurs de p et on montrera en particulier que si p est distinct de 5 il y a exactement 2 solutions. Cette question est un peu délicate et la solution complète est un peu longue, toute réponse même partielle sera appréciée par le correcteur, à condition qu'elle soit suffisamment argumentée.

2 Résoudre l'équation

$$x^{42} = [1]_{49} \quad x \in \mathbf{Z}/49\mathbf{Z},$$

puis résoudre l'équation

$$x^{11} = [1]_{49} \quad x \in \mathbf{Z}/49\mathbf{Z}.$$