Algèbre et Arithmétique 3

Devoir maison : ensemble quotient, groupe quotient, corps des fractions (version courte).

Relations d'équivalence

1. Soit E un ensemble. Se donner une *relation* $\mathcal{R}$ sur E, c'est se donner une condition portant sur les couples (x, y) d'éléments de E, qui pour chaque couple est soit vraie, soit fausse. Si elle est vraie pour le couple (x, y) on écrit « $x\mathcal{R}y$ ». Par exemple, la condition
$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x < y$$
définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbf{R}$.
En d'autre termes, et plus formellement, se donner une relation revient à se donner une partie F de $E \times E$. La relation $\mathcal{R}$ associée à cette partie est alors définie par
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x, y) \in F.$$

2. Soient E et F des ensembles et $f : E \to F$ une application. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur E par
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$
Vérifier que la relation $\mathcal{R}$ est
– *symétrique*, c'est-à-dire vérifie $\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$
– *réflexive*, c'est-à-dire vérifie $\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x$
– *transitive*, c'est-à-dire vérifie $\forall (x, y, z) \in E^3, \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$
Plus généralement, une relation sur E qui vérifie ces trois propriétés est appelée une *relation d'équivalence sur E*.

3. Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. On définit une relation $\mathcal{R}'$ sur $E \times E$ par
$$\forall ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (E \times E)^2, \quad (x_1, y_1)\mathcal{R}'(x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1\mathcal{R}x_2 \text{ et } y_1\mathcal{R}y_2)$$
Vérifier que $\mathcal{R}'$ est une relation d'équivalence sur $E \times E$.

Ensemble quotient : définition par propriété universelle

4. Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Si F est un ensemble et $\pi : E \to F$ est une application, on dit que π est *compatible à* $\mathcal{R}$ si on a la propriété
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow \pi(x) = \pi(y).$$
Un *ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$* est un couple (F, π) où F est un ensemble et π une application de E vers F compatible à $\mathcal{R}$, qui vérifie en outre la propriété suivante, appelée *propriété universelle de l'ensemble quotient* : pour tout ensemble G et tout morphisme $\varphi : E \to G$ compatible à $\mathcal{R}$, il existe une *unique* application $\varphi' : F \to G$ vérifiant $\varphi' \circ \pi = \varphi$.
On admettra qu'un ensemble quotient, s'il existe, est « essentiellement » unique (*cf.* la version longue du DM pour plus de détails). Ce résultat ne sera d'ailleurs pas utilisé stricto sensu dans la suite, mais nous en admettrons une de ses conséquences (*cf.* la question 6).

Groupe quotient d'un groupe commutatif : définition par propriété universelle

5. Soit $\mathcal{G}$ un groupe commutatif et $\mathcal{H}$ un sous-groupe de $\mathcal{G}$. Un *quotient du groupe* $\mathcal{G}$ *par le sous-groupe* $\mathcal{H}$ est un couple $(\mathcal{I}, \pi)$ où $\mathcal{I}$ est un groupe commutatif et π un morphisme de groupes de $\mathcal{G}$ vers $\mathcal{I}$ de noyau contenant $\mathcal{H}$, qui vérifie en outre la propriété suivante, appelée *propriété universelle du groupe quotient* : pour tout groupe $\mathcal{J}$ et tout morphisme $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{J}$ tel que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ contient $\mathcal{H}$, il existe un *unique* morphisme $\varphi' : \mathcal{I} \to \mathcal{J}$ vérifiant $\varphi' \circ \pi = \varphi$.
   On admettra qu'un groupe quotient, s'il existe, est « essentiellement » unique (*cf.* la version longue du DM pour plus de détails). Ce résultat ne sera d'ailleurs pas utilisé dans la suite.

Construction de l'ensemble quotient

6. Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Dans ce numéro et dans 7, nous construisons un ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$. Soit $\pi : E \to F$ une application surjective et qui vérifie
   $$\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(y) \quad (*).$$
   Vérifier que (F, π) est un ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$ (en d'autres termes montrer que (F, π) satisfait la propriété universelle du quotient).
   Dans toute la suite, on admettra que la réciproque de ce résultat est vraie (*cf.* la version longue du DM pour la démonstration), à savoir : si (F, π) est un ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$ alors $\pi : E \to F$ est surjective et vérifie $(*)$.
7. Pour $x \in E$, soit $E(x) = \{y \in E, \quad x\mathcal{R}y\}$. **Vérifier** que pour tous $x, y \in E$ on a $E(x) = E(y)$ si et seulement si $x\mathcal{R}y$. Soit F l'ensemble des parties de E qui sont de la forme $E(x)$ pour un certain $x \in E$ et π l'application qui à $x \in E$ associe l'ensemble $E(x) \in F$. **Vérifier** que π est surjective et satisfait la propriété $(*)$. Ainsi (F, π) est bien un ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$.
8. Soit $\mathcal{R}'$ la relation d'équivalence sur $E \times E$ définie au numéro 3. Soit $(E/\mathcal{R}, \pi)$ l'ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$. Soit $\pi \times \pi$ l'application $E \times E \to E/\mathcal{R} \times E/\mathcal{R}$ définie par $(x, y) \mapsto (\pi(x), \pi(y))$. **Montrer** que $(E/\mathcal{R} \times E/\mathcal{R}, \pi \times \pi)$ est un ensemble quotient de $E \times E$ par $\mathcal{R}'$.

Construction du groupe quotient

9. Soit $\mathcal{G}$ un groupe commutatif et $\mathcal{H}$ un sous-groupe de $\mathcal{G}$. Dans les numéros 9 à 11, nous construisons un groupe quotient $(\mathcal{I}, \pi)$ de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{I}$ un groupe et $\pi : \mathcal{G} \to \mathcal{I}$ un morphisme surjectif de noyau $\mathcal{H}$. **Vérifier** que $(\mathcal{I}, \pi)$ est un groupe quotient de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{H}$, en d'autres termes que $\mathcal{I}$ est commutatif et que $(\mathcal{I}, \pi)$ satisfait la propriété universelle du groupe quotient.
10. Soit $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$ la relation définie sur $\mathcal{G}$ par $g\,\mathcal{R}_{\mathcal{H}}\,g'$ si et seulement si $g - g' \in \mathcal{H}$. **Vérifier** que $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{G}$. Soit $\mathcal{I}$ un groupe et $\pi : \mathcal{G} \to \mathcal{I}$ un morphisme surjectif de noyau $\mathcal{H}$. **Vérifier** que $(\mathcal{I}, \pi)$ est un *ensemble* quotient de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$.
11. Le numéro précédent nous incite à construire un groupe quotient de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{H}$ en mettant une structure de groupe sur l'ensemble quotient sur $\mathcal{G}/\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$. Rappelons que l'on note π l'application quotient $\pi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$.
    Soit $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$ l'application définie par $(x, y) \mapsto \pi(x + y)$. **Montrer** qu'il existe une unique application $s : \mathcal{G}/\mathcal{R}_{\mathcal{H}} \times \mathcal{G}/\mathcal{R}_{\mathcal{H}} \to \mathcal{G}/\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$ vérifiant
    $$\forall (x, y) \in \mathcal{G}^2, \quad s(\pi(x), \pi(y)) = \pi(x + y).$$

(utiliser le numéro 8 et la propriété universelle de $(\mathcal{G}/\mathcal{R}_{\mathcal{H}} \times \mathcal{G}/\mathcal{R}_{\mathcal{H}}, \pi \times \pi)$. **Vérifier** les propriétés suivantes

$$\forall (x,y,z) \in \mathcal{G}^3, \quad s(\pi(x), s[\pi(y), \pi(z)]) = s(s[\pi(x), \pi(y)], \pi(z))$$

$$\forall (x,y) \in \mathcal{G}^2, \quad s(\pi(x), \pi(y)) = s(\pi(y), \pi(x))$$

$$\forall x \in \mathcal{G}, \quad s(\pi(x), \pi(0)) = \pi(x)$$

$$\forall x \in \mathcal{G}, \quad s(\pi(x), \pi(-x)) = \pi(0).$$

En déduire que la loi de composition interne s munit $\mathcal{G}/\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$ d'une structure de groupe commutatif, d'élément neutre $\pi(0)$, et que $\pi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$ est alors un morphisme de groupes. En utilisant 9, **vérifier** que $(\mathcal{G}/\mathcal{R}_{\mathcal{H}}, \pi)$ est un quotient du groupe $\mathcal{G}$ par le sous-groupe $\mathcal{H}$.

Corps des fractions : définition par propriété universelle

12. Soit A un anneau commutatif intègre (rappelons qu'en particulier $A \setminus \{0_A\}$ n'est pas vide). On dit qu'un morphisme d'anneaux $\iota : A \to B$ *rend les éléments non nuls de A inversibles* si on a $\varphi(A \setminus \{0_A\}) \subset B^\times$.
    Un *corps des fractions de A* est un couple (B, ι) où B est un anneau commutatif et ι un morphisme d'anneaux de A vers B rendant les éléments non nuls de A inversibles et qui vérifie en outre la propriété suivante, appelée *propriété universelle du corps des fractions* : pour tout anneau commutatif C et tout morphisme d'anneaux $\varphi : A \to C$ rendant les éléments non nuls de A inversibles, il existe un *unique* morphisme d'anneaux $\varphi' : B \to C$ vérifiant $\varphi' \circ \iota = \varphi$.
13. **Montrer** que si ι est l'injection déduite de l'inclusion naturelle $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ alors $(\mathbf{Q}, \iota)$ est un corps des fractions de $\mathbf{Z}$. La notion de corps des fractions vise à généraliser à un anneau intègre quelconque la construction de $\mathbf{Q}$ à partir de celle de $\mathbf{Z}$.
    On admettra qu'un corps des fractions, s'il existe, est « essentiellement » unique (*cf.* la version longue du DM pour plus de détails). Ce résultat ne sera d'ailleurs pas utilisé dans la suite.

Construction du corps des fractions

14. Nous allons en fait donner une construction valable dans la situation où A est un sous-anneau d'un certain corps $\mathbf{K}$, situation très largement rencontrée dans la pratique. Pour le cas général, on se reportera à la version longue du DM.
15. Soit $\iota : A \to B$ un morphisme d'anneaux rendant les éléments non nuls de A inversibles. On suppose qu'on a
    $$B = \left\{ \iota(a)\iota(a')^{-1}, \quad (a,a') \in A \times A \setminus \{0_A\} \right\}.$$
    Montrer que (B, ι) est un corps des fractions de A.
16. On suppose que A est un sous-anneau d'un corps $\mathbf{K}$.
    Soit
    $$B = \left\{ \frac{a}{a'}, \quad (a,a') \in A \times A \setminus \{0\} \right\} \subset \mathbf{K}.$$
    Vérifier que B est un sous-anneau de $\mathbf{K}$ contenant A. Notons ι le morphisme d'anneaux déduit de l'inclusion $A \subset B$. **Montrer** que (B, ι) est le corps des fractions de A.
    Quel est le corps des fractions de $\mathbf{Z}[i]$?