Université de Rennes 1
M2 spécialité Mathématiques Introduction à la géométrie algébrique

Quelques exercices de révision sur la géométrie projective

Pour des compléments, détails, exercices supplémentaires, etc., on pourra consulter par exemple :

- Michèle Audin, *Géométrie*, Belin
- Pierre Samuel, *Géométrie projective*, PUF
- Claude Tisseron, *Géométries affine, projective et euclidienne*, Hermann
- Michel Coste, *Géométrie projective : autour du programme de l'agrégation* et *Coniques, quadriques projectives*, textes disponibles sur le site de la prépa agreg de Rennes `http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/`.

Soit k un corps et V un k-espace vectoriel. On désigne par $\mathbf{P}(V)$ l'ensemble des droites vectorielles de V : c'est *l'espace projectif associé à V*. Notez que V est nul si et seulement si $\mathbf{P}(V) = \varnothing$.

Exercice 1

$\mathbf{P}(V)$ s'identifie naturellement au quotient de $V \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence définie par : $x \sim y$ si et seulement s'il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $x = \lambda\, y$.

On note $\pi_V : V \setminus \{0\} \to \mathbf{P}(V)$ le morphisme quotient. Un *sous-espace projectif* de V est une partie de $\mathbf{P}(V)$ de la forme $\{\ell \in \mathbf{P}(V), \quad \ell \subset W\}$, où W est un sous-espace vectoriel de W. **Exercice 2**

Les singletons sont des sous-espaces projectifs.

Exercice 3

Une partie de $\mathbf{P}(V)$ est un sous-espace projectif si et seulement si elle s'écrit $\pi_V(W \setminus \{0\})$ où W est un sous-espace vectoriel de V. Elle s'identifie alors naturellement à $\mathbf{P}(W)$. L'application $W \mapsto \pi_V(W \setminus \{0\})$ est une bijection croissante (pour l'inclusion) de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V sur l'ensemble des sous-espaces projectifs de $\mathbf{P}(V)$.

On écrira très souvent $\mathbf{P}(W)$ en lieu et place de $\pi_V(W \setminus \{0\})$ lorsque l'espace V est clairement indiqué par le contexte.

Exercice 4

Soient (W_i) une famille de sous-espaces vectoriels de V. Vérifier que $\mathbf{P}(\cap_i W') = \cap_i \mathbf{P}(W')$. En déduire la définition du sous-espace projectif de $\mathbf{P}(W)$ engendré par une partie. Quel est le sous-espace projectif engendré par la réunion des $\mathbf{P}(W_i)$?

On appelle *droite* (respectivement *plan*, respectivement *hyperplan*) *projectif(ive)* de $\mathbf{P}(V)$ tout sous-espace projectif de la forme $\mathbf{P}(W)$ où W est un plan (respectivement sous-espace de dimension 3, respectivement hyperplan) de W.

Exercice 5

Par deux points distincts d'un espace projectif passe une unique droite projective.

Deux droites projectives sont sécantes si et seulement si elles sont contenues dans un même plan projectif. Dans ce cas, leur intersection est un singleton si et seulement si elles sont distinctes.

Par deux droites projectives sécantes et distinctes passe un unique plan projectif.

Un hyperplan projectif et une droite projective sont toujours sécants. L'intersection est un singleton si et seulement si la droite n'est pas incluse dans l'hyperplan.

Exercice 6

Une partie H de $\mathbf{P}(V)$ est un hyperplan projectif si et seulement s'il existe un élément non nul φ du dual (algébrique) V^* de V tel que

$$H = \{\ell \in \mathbf{P}(V), \quad \varphi(\ell) = \{0\}\}.$$

Un tel φ est appelée *une équation de H*. L'application qui à un hyperplan projectif H associe l'ensemble de ses équations induit une bijection de l'ensemble des hyperplans projectifs de V sur l'espace projectif $\mathbf{P}(V^*)$. Ainsi l'ensemble des hyperplans projectifs de V « est » lui-même un espace projectif.

Exercice 7

Soit $f : V_1 \to V_2$ un morphisme injectif d'espaces vectoriels. Vérifier que l'application qui à ℓ associe $f(\ell)$ induit une injection de $\mathbf{P}(V_1)$ dans $\mathbf{P}(V_2)$, notée $\mathbf{P}(f)$ et appelée *homographie*. Vérifier qu'une homographie envoie un sous-espace projectif sur un sous-espace projectif.

Plus généralement, si $f : V_1 \to V_2$ est un morphisme quelconque d'espace vectoriels, l'application qui à ℓ associe $f(\ell)$ induit une application de $\mathbf{P}(V_1) \setminus \mathbf{P}(\mathrm{Ker}(f))$ dans $\mathbf{P}(V_2)$.

On dit que $\mathbf{P}(V)$ *est de dimension finie* si V l'est. Sa *dimension* est alors $\dim(V) - 1$.

Exercice 8

Soit A_1 et A_2 des sous-espaces projectifs de dimension finie de $\mathbf{P}(V)$. Vérifier la formule

$$\dim(A_1) + \dim(A_2) = \dim(A_1 \cap A_2) + \dim(\langle A_1, A_2 \rangle)$$

où $\langle A_1, A_2 \rangle$ désigne le sous-espace projectif engendré par $A_1 \cup A_2$. En particulier, si $\mathbf{P}(V)$ est de dimension finie et si $\dim(A_1) + \dim(A_2) \geqslant \dim(\mathbf{P}(V))$, A_1 et A_2 s'intersectent.

Soit $n \geqslant 0$ un entier. On note $\mathbf{P}^n(k)$ l'espace projectif $\mathbf{P}(k^{n+1})$. L'image d'un élément $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}$ par $\pi_{k^{n+1}}$ est notée $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$: on appelle cette écriture les *coordonnées homogènes* de x. Notez que les coordonnées homogènes ne sont définies qu'à multiplication par un scalaire non nul près : on a

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = (x'_0 : x'_1 : \ldots : x'_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^\times, \quad \forall i, \quad x_i = \lambda\, x'_i$$

Si V est un espace vectoriel de dimension finie $n+1$, le choix d'une base de V induit une homographie bijective $\mathbf{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^n(k)$. Une telle homographie est appelée *système de coordonnées homogènes* sur V.

Soit $\mathbf{P}(V)$ un espace projectif de dimension finie n. Un *repère projectif* de $\mathbf{P}(V)$ est un $(n+2)$-uplet de points de $\mathbf{P}(V)$ tel que $n+1$ quelconques d'entre eux engendrent toujours $\mathbf{P}(V)$.

Exercice 9

Un $(n+2)$-uplet est un repère projectif si est seulement si c'est l'image par π_V d'un $(n+2)$-uplet de vecteurs non nuls de V, les $n+1$ premiers formant une base de V et le dernier ayant des coordonnées toutes non nulles dans ladite base.

Exercice 10

Vérifier qu'il existe une bijection naturelle entre les deux ensembles suivants :

– l'ensemble des repères projectifs de $\mathbf{P}(V)$;
– l'ensemble des systèmes de coordonnées homogènes sur $\mathbf{P}(V)$.

Exercice 11

Les repères projectifs d'une droite projective sont les triplets de points deux à deux distincts. Les repères projectifs d'un plan projectifs sont les quadruplets de points tels que trois quelconque d'entre eux ne sont jamais alignés.

Si $\mathcal{R} = (e_1, \ldots, e_{n+2})$ est un repère projectif de $\mathbf{P}(V)$, les coordonées homogènes de l'image d'un élément x de $\mathbf{P}(V)$ par l'homographie associée $\mathbf{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^n(k)$ sont appelées *coordonnées homogènes de x dans le repère projectif* $\mathcal{R}$.

Exercice 12

Les coordonnées homogènes dans un repère projectif $\mathcal{R}$ des éléments $(e_0, e_1, \ldots, e_{n+1})$ de $\mathcal{R}$ sont $(1 : 0 : 0 : \ldots : 0)$, $(0 : 1 : 0 : \ldots : 0)$, $\ldots$, $(0 : 0 : \ldots : 0 : 1)$, $(1 : 1 : \ldots : 1)$

Exercice 13

L'ensemble des bijections de $\mathbf{P}(V)$ sur lui-même qui sont des homographies est un sous-groupe du groupe des bijections de V sur lui-même, appelé *groupe projectif* de $\mathbf{P}(V)$.

L'application $f \mapsto \mathbf{P}(f)$ est un morphisme du groupe $\mathrm{GL}(V)$ vers le groupe projectif de $\mathbf{P}(V)$, qui induit un isomorphisme du groupe $\mathrm{PGL}(V)$ (quotient de $\mathrm{GL}(V)$ par le sous-groupe des homothéties) sur le groupe projectif de $\mathbf{P}(V)$.

On suppose $\mathbf{P}(V)$ de dimension finie. Le groupe projectif de $\mathbf{P}(V)$ agit simplement transitivement sur l'ensemble des repères projectifs de $\mathbf{P}(V)$.

Une partie A de $\mathbf{P}^n(k)$ est un *sous-ensemble algébrique projectif* s'il existe un nombre fini de polynômes *homogènes* $F_1, \ldots, F_r$ en $n+1$ variables tel que

$$A = \{\ell \in \mathbf{P}^n(k), \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant r, \quad F_i(\ell) = \{0\}\}.$$

Exercice 14

Le groupe projectif de $\mathbf{P}^n(k)$ envoie sous-ensembles algébriques projectifs sur sous-ensembles algébriques projectifs.

Soit $\mathbf{P}(V)$ un espace projectif de dimension finie. Une partie A de $\mathbf{P}(V)$ est un *sous-ensemble algébrique projectif de* $\mathbf{P}(V)$ s'il existe un système de coordonnées homogènes[1] $f : \mathbf{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^n(k)$ tel que $f(A)$ est un sous-ensemble algébrique projectif.

Exercice 15

A est un sous-ensemble algébrique projectif de $\mathbf{P}(V)$ si et seulement si pour tout système de coordonnées homogènes $f : \mathbf{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^n(k)$, $f(A)$ est un sous-ensemble algébrique projectif.

[1]Si l'on veut faire les choses de manière intrinsèque il faut utiliser l'algèbre symétrique du dual de V, $T(V^*) \overset{\text{déf}}{=} \oplus_{n\in\mathbf{N}} T^n V^*$ où $T^n V^*$ est la puissance tensorielle n-ème de V^*, quotientée par la relation qui identifie $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ à $v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$ pour tout n-uplet $(v_1, \ldots, v_n)$ et toute permutation σ

Vérifier que si $V = k^{n+1}$ on retrouve bien la définition précédente.

Exercice 16

Les sous-espaces projectifs sont des sous-ensembles algébriques projectifs.

Exercice 17

Toute union finie, intersection quelconque de sous-ensembles algébriques projectifs en est un.

Exercice 18

Soit k un corps infini et I un idéal de $k[x_1, \ldots, x_n]$. On suppose que si $P(x_i)$ est dans I alors $P(\lambda\, x_i)$ est dans I pour tout $\lambda \in k$. Montrer que I est un idéal homogène (i.e. engendré par des polynômes homogènes).

Exercice 19

Un cône vectoriel d'un espace vectoriel est une partie non vide stable par homothétie vectorielle. Montrer que l'application qui à une partie A de k^{n+1} associe $\pi_{k^{n+1}}(A \setminus \{0\})$ induit une bijection de l'ensemble des sous-ensembles algébriques affines de k^{n+1} qui sont des cônes vectoriels sur l'ensemble des sous-ensembles algébriques projectifs de $\mathbf{P}^n(k)$.

La topologie de Zariski sur $\mathbf{P}(V)$ est la topologie dont les fermés sont les sous-ensembles algébriques projectifs. On pourra admettre (ou démontrer, ce sera fait en cours de toute façon) que cette topologie est noethérienne, et donc que tout fermé de Zariski admet un nombre fini de composantes irréductibles.

Passons à la liaison affine-projectif. Le slogan est que si H est un hyperplan projectif de $\mathbf{P}(V)$, son complémentaire est naturellement muni d'une structure d'espace affine. Réciproquement, un espace affine peut être « complété »en un espace projectif en rajoutant un « hyperplan projectif à l'infini ». L'un des intérêts est qu'on peut souvent rendre un problème de géométrie affine plus simple en complétant l'espace affine dans lequel on travaille en un espace projectif, en choisissant judicieusemnt un autre hyperplan projectif puis en se plaçant sur le nouvel espace affine qui est le complémentaire de ce nouvel hyperplan. Un autre intérêt en géométrie algébrique est que l'on obtient ainsi des cartes affines sur l'espace projectif (et sur ses sous-ensembles algébriques projectifs) sur lesquels on a parfois intérêt à travailler. Ceci est utile pour les questions de nature locale, mais pas uniquement : par exemple la démonstration présentée en cours du théorème de Bezout, qui est de nature globale, commence par se placer dans une carte affine convenable.

Exercice 20

Une partie H de $\mathbf{P}(V)$ est un hyperplan projectif si et seulement s'il existe une homographie $V \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^n(k)$ qui envoie H sur l'hyperplan

$$H_0 \overset{\text{déf}}{=} \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbf{P}^n(k), \quad x_0 = 0\}.$$

Exercice 21

L'application $k^n \to \mathbf{P}^n(k)$ qui envoie $(x_1, \ldots, x_n)$ sur $(1 : x_1 : \ldots : x_n)$ induit une bijection de $\mathbf{P}^n(k)$ sur le complémentaire de H_0.

Soit H un hyperplan projectif de $\mathbf{P}(V)$. Soit $V \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^n(k)$ une homographie[2] qui envoie H sur H_0. On munit $\mathbf{P}(V) \setminus H$ de la structure d'espace affine induite par la bijection $k^n \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^n(k) \setminus H_0$.

Exercice 22

Vérifier que cette structure d'espace affine ne dépend pas du choix de l'homographie $V \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^n(k)$ qui envoie H sur H_0

La construction précédente peut être « renversée ». Soit $\mathcal{A}$ un k-espace affine de dimension n. On peut alors « compléter » $\mathcal{A}$ en un espace projectif de dimension n de la façon suivante : on choisit[3] un repère affine de $\mathcal{A}$, en d'autres termes un isomorphisme affine $A \xrightarrow{\sim} k^n$ On plonge k^n dans $\mathbf{P}^n(k)$ via l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \ldots : x_n)$. L'image de $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} k^n$ est le complémentaire de l'hyperplan H_0 d'équation $x_0 = 0$. Il est immédiat que la structure affine définie ci-dessus sur le complémentaire de H_0 coïncide avec la structure affine de $\mathcal{A}$.

Si H est un hyperplan projectif de $\mathbf{P}(V)$, on note i_H l'inclusion $\mathbf{P}(V) \setminus H \hookrightarrow \mathbf{P}(V)$.

Exercice 23

L'application $A \mapsto i_H^{-1}(A) = A \setminus H$ induit une bijection de l'ensemble des sous-espaces projectifs de dimension d non inclus dans H sur l'ensemble des sous-espaces affines de dimension d de $\mathbf{P}(V) \setminus H$. La bijection réciproque envoie un sous-espace affine $\mathcal{A}$ sur le sous-espace projectif engendré.

L'image d'un sous-espace affine $\mathcal{A}$ de $\mathbf{P}(V) \setminus H$ par la bijection réciproque est parfois appelée *complété projectif*, ou *adhérence projective* de $\mathcal{A}$. La raison en est donnée par l'exercice qui suit.

Exercice 24

Si k est infini, le complété projectif d'un sous-espace affine $\mathcal{A}$ de $\mathbf{P}(V) \setminus H$ est l'adhérence de Zariski de $\mathcal{A}$ dans $\mathbf{P}(V)$.

Exercice 25

L'application i_H est continue pour la topologie de Zariski.

[2] Il est possible de procéder de manière intrinsèque (on renvoie aux références).

[3] Encore une fois, on pourrait faire les choses de manière plus intrinsèque, cf. les références

Exercice 26

Si k est infini, l'application $A \mapsto i_H^{-1}(A) = A \setminus H$ induit une bijection de l'ensemble des sous-ensembles algébriques projectifs dont aucune des composantes irréductibles n'est contenue dans H sur l'ensemble des sous-ensembles algébriques affines de $\mathbf{P}(V) \setminus H$. La bijection réciproque envoie un sous-ensemble algébrique affine $\mathcal{A}$ sur son adhérence de Zariski dans $\mathbf{P}(V)$.

Exercice 27

L'application i_H induit une bijection du sous-groupe du groupe projectif de $\mathbf{P}(V)$ formé des éléments fixant H sur le groupe affine de $\mathbf{P}(V) \setminus H$.

Exercice 28

On note $(0:1) = \infty$. On identifie k à une partie de $\mathbf{P}^1(k)$ via l'application $z \mapsto (1:z)$. On a alors $\mathbf{P}^1(k) = k \sqcup \{\infty\}$. *Dans la suite, on utilisera systématiquement cette identification.*

Tout élément du groupe projectif de $\mathbf{P}^1(k)$ s'écrit $z \mapsto \frac{a\,z+b}{c\,z+d}$ où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in$ $\mathrm{PGL}_2(k)$ (avec les conventions $\frac{a\,\infty+b}{c\,\infty+d} = \frac{a}{c}$, $\frac{\cdots}{0} = \infty$)

Exercice 29

Soit P un plan projectif, D une droite projective de P et $\mathcal{P}$ le plan affine $P \setminus D$. Deux droites affines de $\mathcal{P}$ sont parallèles si et seulement si leurs complétées projectives s'intersectent sur D. D joue le rôle de « droite à l'infini » pour P.

Exercice 30

Soit D_1 et D_2 deux droites distinctes d'un plan projectif. Soit O un point qui n'est sur aucune des deux droites. On définit une application f_O de D_1 vers D_2 de la manière suivante : soit P_1 un point de D_1. L'unique droite contenant O et P_1 recoupe D_2 en un unique point qui est par définition $f_O(P_1)$. Montrer que f_O est une homographie de D_1 sur D_2 (on pourra regarder ce qui se passe dans le plan affine $P \setminus OO'$ où O' est le point d'intersection de D_1 et D_2). On l'appelle *perspective de centre O*. Généraliser au cas de deux hyperplans projectifs distincts d'un espace projectif de dimension finie.

Exercice 31

Soit (A, B, C) un repère projectif d'une droite projective $\mathbf{P}(V)$. Vérifier qu'il existe une unique homographie $\psi_{A,B,C} : \mathbf{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^1(k)$ qui envoie A sur ∞, B sur 0 et C sur 1. Pour tout point D de $\mathbf{P}(V)$, on pose alors

$$[A, B, C, D] \stackrel{\text{déf}}{=} \psi_{A,B,C}(D) \in k \sqcup \{\infty\}.$$

C'est le *birapport* du quadruplet (A, B, C, D).

Vérifier que $D \mapsto [A, B, C, D]$ est injective.

Vérifier que le birapport est stable par homographie, i.e. si $\varphi : \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(W)$ est une homographie entre deux droites projectives, alors pour tout quadruplet (A,B,C,D) de points de $\mathbf{P}(V)$ tel que A, B et C sont deux à deux distincts on a

$$[\varphi(A),\varphi(B),\varphi(C),\varphi(D)]=[A,B,C,D].$$

Si a, b, c et d sont des éléments de $\mathbf{P}^1(k)=k\sqcup\infty$ avec a, b et c deux à deux distincts, alors

$$[a,b,c,d]=\frac{d-c}{d-a}/\frac{b-c}{b-a}$$

(avec les conventions usuelles $\frac{\cdots}{0}=\infty$, etc.)

Exercice 32

Le théorème de Desargues dans le plan projectif. Soit D, D' et D'' trois droites d'un plan projectif, deux à deux distinctes et concourantes en un point O. Soient A et B (resepctivement A' et B', A'' et B'') deux points de D (repectivement D', D'') distincts de O. Soit γ (respectivement γ', γ'') le point d'intersection de $(A'A'')$ et $(B'B'')$ (respectivement (AA'') et (BB''), (AA') et (BB')). Montrer que γ, γ' et γ'' sont alignés. On pourra procéder comme suit : soit Δ la droite $(\gamma\gamma'')$. Soit $\gamma_1 \overset{\text{déf}}{=} \Delta\cap(AA'')$, $\gamma_2 \overset{\text{déf}}{=} \Delta\cap(BB'')$, et $C'' \overset{\text{déf}}{=} \Delta\cap D''$. En utilisant des perspectives de centres A'', O et B'', montrer l'égalité $[C'',\gamma,\gamma'',\gamma_1]=[C'',\gamma,\gamma'',\gamma_2]$ et conclure

Exercice 33

Déduire du théorème de Desargues dans le plan projectif un énoncé dans le plan affine et sa démonstration. L'énoncé devrait commencer par quelque chose du genre : « Soient D, D' et D'' trois droites d'un plan affine concourantes ou parallèles... »

Exercice 34

Le théorème de Desargues en dimension supérieure. L'énoncé est le même qu'en dimension 2 en remplaçant le plan projectif par un espace projectif quelconque. Pour le démonter, on pourra introduire les plans projectifs π_A et π_B engendrés respectivement par A, A', A'' et B, B', B''. Si $\pi_A=\pi_B$, vérifier qu'on est ramené à l'énoncé en dimension deux. Sinon, conclure en considérant l'intersection de π_A et π_B.

Exercice 35

Soit $P=\mathbf{P}(V)$ un plan projectif. On a vu plus haut qu'il existe une bijection entre les droites de P et les points de $P^* \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{P}(V^*)$. L'identification naturelle de V à son bidual induit donc une bijection de l'ensemble des droites de P^* sur l'ensemble des points de P. Vérifier que des droites de P (respectivement P^*) sont concourantes si et seulement si les points de P^* (respectivement P) correspondants sont alignés. En déduire que la réciproque du théorème de Desargues est vraie.

Exercice 36

Soient D et D' deux droites distinctes d'un plan affine $\mathcal{P}$, sécantes en un point O. Soit O' un point qui n'est sur aucune des deux droites, D_1, D_2 et D_3 trois droites deux à deux distinctes et passant par O', M_i et M'_i les points d'intersection de D_i avec D et D' respectivement. Soit $A = (M_1M'_2) \cap (M_2M'_1)$ et $B = (M_2M'_3) \cap (M_3M'_2)$. Montrer que A, B et O sont alignés. On pourra plonger $\mathcal{P}$ dans un plan projectif, puis se placer sur le plan affine complémentaire de la droite (OO') : on dit qu'on a « envoyé la droite (OO') à l'infini ». Application : étant données deux droites sécantes mais dont l'intersection n'est pas sur la feuille de papier et un point qui n'est pas sur aucune des deux droites, tracer à la règle la droite joignant ce point et le point d'intersection des droites. En déduire par dualité un procédé pour tracer une droite joignant deux points à l'aide d'une règle trop courte.

Terminons par quelques considérations et exercices sur les quadriques projectives, qui sont sans doute les exemples les plus élémentaires d'ensembles algébriques projectifs qui ne sont pas des espaces projectifs. On suppose la caractéristique du corps k différente de 2. On note $\mathcal{Q}(V)$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur V. Une *quadrique projective* est un élément de $\mathbf{P}(\mathcal{Q}(V))$. Si $\dim(V) = 3$, on parle de *conique projective*. Soit q une quadrique projective et $\tilde{q} \in \mathcal{Q}(V) \setminus \{0\}$ un représentant q. L'ensemble

$$\{\ell \in \mathbf{P}(V), \quad \tilde{q}(\ell) = \{0\}$$

ne dépend pas du choix de $\tilde{q}$: on l'appelle l'image de la quadrique projective q.

Notons que le représentant $\tilde{q}$ est non dégénérée si et seulement si tout autre représentant de q est non dégénéré. Si c'est le cas, on dit que la quadrique projective q est non dégénérée (on verra ci-dessous que cela correspond à la lissité de l'image).

Soit q_1, q_2 deux quadriques projectives, $\tilde{q}_1$ et $\tilde{q}_2$ des représentants respectifs. q_1 et q_2 sont dites *équivalentes* s'il existe $f \in \mathrm{GL}(V)$ tel que $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 \circ f$. On vérifie que cela ne dépend pas du choix des représentants et définit une relation d'équivalence.

Exercice 37

Si deux quadriques projectives sont équivalentes, leurs images sont projectivement équivalentes, i.e. il existe un élément du groupe projectif qui envoie l'une sur l'autre.

On suppose k algébriquement clos. Deux quadriques projectives sont équivalentes si et seulement si leurs images sont projectivement équivalentes.

Exercice 38

Soit D une droite d'un espace projectif V et q une quadrique projective.

Soit D est incluse dans $\mathrm{Im}(q)$, soit $D \cap \mathrm{Im}(q)$ contient au plus deux éléments. Si k est algébriquement clos, $D \cap \mathrm{Im}(q)$ est non vide.
Soit x_0 un point de $\mathrm{Im}(q)$. Une droite D contenant x_0 est dite *tangente* à $\mathrm{Im}(q)$ en x_0 si elle est contenue dans $\mathrm{Im}(q)$ ou si $D \cap \mathrm{Im}(q) = \{x_0\}$.

Exercice 39

On désigne par $x_0^{\perp_\varphi}$ l'orthogonal de la droite x_0 pour la forme bilinéaire symétrique φ associée à un représentant $\widetilde{q}$ de q. Montrer que la réunion des droites tangentes à $\mathrm{Im}(q)$ en x_0 est $\mathbf{P}(x_0^{\perp_\varphi})$. En déduire qu'il s'agit soit de $\mathbf{P}(V)$ tout entier, soit d'un hyperplan projectif contenant x_0.

Un point x_0 de $\mathrm{Im}(q)$ est dit *lisse* si $\mathbf{P}(x_0^{\perp_\varphi})$ est un hyperplan. On dit alors que $\mathbf{P}(x_0^{\perp_\varphi})$ est *l'hyperplan tangent* à $\mathrm{Im}(q)$ en x.

Exercice 40

Vérifier que $\mathbf{P}(x_0^{\perp_\varphi})$ est l'espace tangent projectif en x_0 à $\mathrm{Im}(q)$ tel que défini dans le cours.

Exercice 41

La quadrique projective q est non dégénérée si et seulement si tous les points de $\mathrm{Im}(q)$ sont lisses. Si q est une conique projective non dégénérée, $\mathrm{Im}(q)$ ne contient pas de droites. La réciproque est vraie si k est algébriquement clos.

Exercice 42

On suppose k algébriquement clos et V de dimension finie $n+1$. Montrer qu'il existe une unique classe de quadrique projective non dégérée de $\mathbf{P}(V)$, dont un représentant est $q = \sum_{i=0}^{n} x_i^2$. Décrire les classes de quadriques projectives dégénérées.

Exercice 43

On suppose $k = \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe exactement deux classes de coniques projectives non dégénérées, dont des représentants sont $q = x^2 + y^2 + z^2$ et $q = x^2 + y^2 - z^2$ respectivement. Notez que la première a une image vide et pas la seconde. Soit q une quadrique projective non dégénérée dont l'image est non vide. Soit D une droite projective de $\mathbf{P}(V)$. Montrer que l'intersection de $\mathrm{Im}(q)$ avec le plan affine $\mathbf{P}(V) \setminus D$ est :

- une hyperbole si $D \cap \mathrm{Im}(q)$ a deux éléments ;
- une ellipse si $D \cap \mathrm{Im}(q)$ est vide ;
- une parabole si D est tangente à $\mathrm{Im}(q)$.

Décrire les classes de coniques projectives dégénérées.

Exercice 44

Par cinq points du plan projectifs tels que trois d'entre eux ne sont jamais alignés passe (l'image d')une unique conique projective. Cette conique est alors non dégénérée.

Exercice 45

Si q est une quadrique projective non dégénérée, l'ensemble des hyperplans tangents à $\mathrm{Im}(q)$ est l'image d'une quadrique projective non dégénérée de $\mathbf{P}(V^*)$. On l'appelle la quadrique duale de q.

Exercice 46

On considère quatre droites d'un plan affine réel telles que trois d'entre elles ne sont jamais concourantes. Montrer qu'il existe une unique parabole tangentes à ces quatre droites. On pourra se plonger dans un plan projectif et utiliser les trois exercices qui précèdent. Pour une démonstration euclidienne de ce résultat, cf. l'ouvrage *La géométrie du triangle* de SORTAIS. On pourra admirer la puissance du projectif...

Il existe au moins un résultat sur les coniques non évoqué ici et qu'il faut absolument connaître : le célébre théorème de Pascal, pour lequel on renvoie aux références.