Université de Rennes 1
Année 2005-2006

Licence de mathématiques
F02. Intégrale de Lebesgue
et séries de Fourier

Séries de Fourier

Cours du 30 mars 2007

(version du 19 avril 2007)

Attention ! La définition d'une fonction de classe C^1 par morceaux figurant sur le document distribué en cours est trop restrictive, comme me l'a fort justement fait remarquer une étudiante. La présente version du document corrige cette définition, ainsi que quelques coquilles. Des erreurs sont naturellement susceptibles de persister.

Nous allons aborder l'étude de la convergence de la suite de fonctions $(S_n(f))$, pour les divers sens que peut prendre le mot convergence dans ce contexte (convergence en norme $\mathbf{L}^1$, en norme $\mathbf{L}^p$ si f est dans $\mathbf{L}^p$, ponctuelle, uniforme). Signalons que l'étude sera (très) loin d'être complète. Avant tout, nous allons étudier un cas particulier très agréable de convergence en norme, celui de la convergence en norme $\mathbf{L}^2$ de la série de Fourier d'un élément de $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$. La clef de cet étude est le fait que $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$ possède une structure plus riche que celle d'un espace de Banach général : c'est un espace de Hilbert. La théorie des espaces de Hilbert, plus développée que celle des espaces de Banach généraux, rend alors de grands services dans l'étude de la convergence. Elle permet au passage d'interpréter géométriquement les sommes partielles de la série de Fourier de f comme projections orthogonales de f sur des sous-espaces convenables.

1 Théorie $\mathbf{L}^2$ des séries de Fourier

1.1 Quelques rappels sur les espaces de Hilbert

Rappelons d'abord la définition d'un espace de Hilbert.

Définition 1.1
Un espace de Hilbert *(complexe) est un espace vectoriel complexe E muni d'un produit scalaire hermitien (noté $\langle . \, , . \rangle$) tel que la norme*

$$x \mapsto ||x|| \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\langle x \, , x \rangle}$$

munit E d'une structure d'espace vectoriel normé complet.

Un espace de Hilbert est donc un cas particulier d'espace de Banach : ce sont les espaces de Banach pour lesquels la norme est «issue d'un produit scalaire».

Exemple 1.2 : Un exemple fondamental dans le cadre du cours sur l'intégration est celui de $E = \mathbf{L}^2_{\mathbf{C}}(X, \mathcal{T}, \mu)$ où $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré. Le produit scalaire hermitien est donné par

$$\forall (f, g) \in \mathbf{L}^2(\mathbf{T})^2, \quad \langle f\,,\,g \rangle = \int_X f\,\bar{g}\,d\mu.$$

Dans le cadre du cours sur les séries de Fourier, on s'intéressera aux cas de $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$ ($E = (\mathbf{T}, \mathcal{B}(\mathbf{T}), \lambda_{\mathbf{T}})$) et $\ell^2(\mathbf{Z})$ ($E = (\mathbf{Z}, \mathcal{P}(\mathbf{Z}), \mu)$ où μ est la mesure de comptage). □

On rappelle maintenant quelques définitions et résultats (sans démonstration) concernant les espaces de Hilbert.

Dans tout ce qui suit, H désigne un espace de Hilbert et $M \subset H$ un sous-espace vectoriel.

Définition 1.3
L'orthogonal de M est le sous-ensemble de H défini par

$$M^{\perp} = \{x \in H, \quad \forall y \in M, \quad \langle x\,,\,y \rangle = 0\}. \tag{1}$$

Proposition 1.4
$M^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.

Proposition 1.5
On suppose que M est un sous-espace vectoriel fermé. Alors on a

$$H = M \oplus M^{\perp}. \tag{2}$$

Définition 1.6
On suppose que M est un sous-espace vectoriel fermé de H. La projection orthogonale sur M est la projection $H \to M$ déduite de la décomposition (2) On la note π_M.

Proposition 1.7
On suppose que M est un sous-espace vectoriel fermé de H.

1. *On a*
$$\forall x \in H, \quad ||\pi_M(x)|| \leqslant ||x|| \tag{3}$$
avec égalité si et seulement si $x \in M$. En particulier π_M est continue, et de norme 1 si $M \neq \{0\}$.

2. *Pour $x \in H$, $\pi_M(x)$ est l'unique élément de M minimisant la distance de x à M, i.e. c'est l'unique élément y de M vérifiant*

$$||y - x|| = dist(x, M) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{z \in M} ||z - x|| \,. \tag{4}$$

Définition 1.8
Soit I un ensemble quelconque. Un système orthonormé *(indexé par I) de H est une famille $(e_i)_{\in I}$ d'éléments de H indexée par I vérifiant*

$$\forall i, j \in I^2, \quad \langle e_i \,,\, e_j \rangle = \delta_{i,j}. \tag{5}$$

Proposition 1.9
Soit $(e_i)_{i \in I}$ un système orthonormé de H avec I fini. Alors $M = \mathrm{Vect}(e_i)_{i \in I}$ est fermé, et on a

$$\forall x \in H, \quad \pi_M(x) = \sum_{i \in I} \langle x \,,\, e_i \rangle \, e_i. \tag{6}$$

Soulignons que dans la formule (6), la somme est une somme finie.

Soit à présent $(e_i)_{i \in I}$ un système orthonormé de H avec I dénombrable. et M l'adhérence de $\mathrm{Vect}(e_i)_{i \in I}$. C'est un sous-espace vectoriel fermé de H. On voudrait généraliser la formule (6) sous la forme

$$\forall x \in H, \quad \pi_M(x) = \sum_{i \in I} \langle x \,,\, e_i \rangle \, e_i. \tag{7}$$

mais il faut avant tout préciser le sens que l'on donne à $\sum_{i \in I} \langle x \,,\, e_i \rangle \, e_i$.

Définition 1.10
On dit qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments 2 à 2 orthogonaux de H est sommable *si*

$$\sum_{i \in I} ||x_i||^2 < \infty. \tag{8}$$

Proposition 1.11
Soit I un ensemble dénombrable et $(x_i)_{i \in I}$ une famille sommable de H. Soit $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite croissante de sous-ensembles **finis** *de I vérifiant*

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}} I_n = I. \tag{9}$$

Alors la suite

$$\left(\sum_{i \in I_n} x_i \right)_n \tag{10}$$

converge dans H. Sa limite ne dépend pas du choix de la suite (I_n). On la note

$$\sum_{i\in I} x_i. \tag{11}$$

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le résultat sur les espaces de Hilbert que nous allons appliquer à la théorie des séries de Fourier.

Théorème 1.12
Soit $(e_i)_{i\in I}$ un système othonormé dénombrable de H, et $M = \overline{\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}}$.

1. *Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ un élément de $\ell^2(I)$. Alors la famille $(\alpha_i\, e_i)_{i\in I}$ est sommable.*
2. *Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ et $(\beta_i)_{i\in I}$ des éléments de $\ell^2(I)$. On a la* formule de Parseval

$$\left\langle \sum_{i\in I} \alpha_i\, e_i\,,\, \sum_{i\in I} \beta_i\, e_i \right\rangle = \sum_{i\in I} \alpha_i\, \bar{\beta}_i \tag{12}$$

   En particulier, on a

$$\left\| \sum_{i} \alpha_i\, e_i \right\|^2 = \sum_{i\in I} |\alpha_i|^2 . \tag{13}$$

3. *Pour tout $x \in H$, $(\langle x\,,\, e_i\rangle)$ est un élément de $\ell^2(I)$ et on a*

$$\pi_M(x) = \sum_{i\in I} \langle x\,,\, e_i\rangle\; e_i. \tag{14}$$

4. *L'application*

$$x \mapsto (\langle x\,,\, e_i\rangle)_{i\in I} \tag{15}$$

   induit une isométrie entre les espaces de Hilbert M (pour la structure induite par le produit scalaire sur H) et $\ell^2(I)$.

Définition 1.13
Un système orthonormé dénombrable $(e_i)_{i\in I}$ est dit complet *s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :*

1. $\overline{\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}} = H$.
2. $\forall x \in H, \quad \forall i \in I, \quad \langle x\,,\, e_i\rangle = 0 \Rightarrow x = 0.$

Si H possède un système orthonormé dénombrable complet $(e_i)_{i\in I}$, le théorème 1.12 s'applique en particulier avec $H = M$.

1.2 Application aux séries de Fourier

Nous allons à présent appliquer la théorie au cas de l'espace de Hilbert $H = \mathbf{L}^2(\mathbf{T})$. La clef de voûte est donné par le théorème 1.15, lui-même conséquence du théorème d'unicité, et qui utilise en outre le lemme complètement élementaire suivant.

Lemme 1.14
Pour tout élément f de $\mathbf{L}^2(\boldsymbol{T})$, on a

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad \langle f \, , \, e_n \rangle = \widehat{f}(n). \tag{16}$$

Démonstration : On a en effet

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad \langle f \, , \, e_n \rangle = \int_{\mathbf{T}} f(t)\, \overline{e_n(t)} dt = \int_{\mathbf{T}} f(t)\, e_{-n}(t) dt = \widehat{f}(n). \tag{17}$$

□

Théorème 1.15
$(e_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ *est un système dénombrable orthonormé complet de H.*

Démonstration : Ce système est évidemment dénombrable. Les relations d'orthogonalités (déjà vues)

$$\forall n, m \in \mathbf{Z}, \quad \langle e_n \, , \, e_m \rangle = \delta_{n,m} \tag{18}$$

montrent qu'il s'agit d'un système orthonormé.

Soit f un élément de $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad \langle f \, , \, e_n \rangle = 0. \tag{19}$$

On a donc d'après le lemmme 1.14

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad \widehat{f}(n) = 0. \tag{20}$$

Par le théorème d'unicité, ceci entraîne que f est nulle. Ainsi (e_n) est complet.
□
Le lemme 1.14 joint au simple fait que (e_n) soit orthonormé a déjà la conséquence suivante : pour $n \geqslant 0$ donné, et $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{T})$, $(S_n(f))$ est le polynôme trigonométrique de degré inférieur à n qui approche le mieux f au sens de la norme $\mathbf{L}^2$. Plus précisément, notons T_n l'espace vectoriel engendré par les fonctions $(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$. Alors pour tout élément f de $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$, on a

$$S_n(f) = \pi_{T_n}(f) \tag{21}$$

d'où

$$||f - S_n(f)|| = \inf_{P \in T_n} ||f - P|| \,. \tag{22}$$

On déroule à présent les conséquences des théorèmes 1.12 et 1.15.

Pour tout élément f de $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$, on a $(\widehat{f}(n)) \in \ell^2(\mathbf{Z})$ et

$$f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{f}(n)\, e_n. \tag{23}$$

Attention ! Cette égalité est à prendre au sens de la proposition 1.11. Elle signifie donc que pour toute suite croissante I_n de sous-ensembles finis de $\mathbf{Z}$, la suite $\sum_{k \in I_n} \widehat{f}k\, e_k$ converge *en norme* $\boldsymbol{L}^2$ vers f. En particulier en prenant $I_n = \{-n, \ldots, n\}$ on obtient :

Théorème 1.16
Si f est un élément de $\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{T})$, $(S_n(f))$ converge en norme $\boldsymbol{L}^2$ vers f.

Par contre, l'écriture (23) *ne signifie pas* que pour presque tout t de $\mathbf{T}$, on a

$$f(t) = \lim_{n\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\, e_k(t). \tag{24}$$

Rappelons que cette dernière propriété est vraie, mais que sa démonstration dépasse très largement les objectifs de ce cours.

La formule de Parseval s'écrit

$$\forall f, g \in \mathbf{L}^2(\mathbf{T}), \quad \int_{\mathbf{T}} f\, \overline{g} d\lambda_{\mathbf{T}} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{f}(n)\, \overline{\widehat{g}(n)}. \tag{25}$$

On a donc en particulier

$$\forall f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{T}), \quad ||f||_2^2 = \int_{\mathbf{T}} |f|^2\, d\lambda_{\mathbf{T}} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left|\widehat{f}(n)\right|^2. \tag{26}$$

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}^2(\mathbf{T}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbf{Z}) \\ f & \longmapsto & \widehat{f}(n) \end{array} \tag{27}$$

est un isomorphisme d'espaces de Hilbert.

Remarque 1.17 : On sait ainsi caractériser les éléments de $\ell_0(\mathbf{Z})$ qui sont des coefficients de Fourier d'éléments de $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$: ce sont exactement les éléments de $\ell^2(\mathbf{Z})$. □

Remarque 1.18 : Ce qui précède s'applique notamment aux fonctions continues ou continues par morceaux sur $\mathbf{T}$. Ceci montre par exemple que si f est continue sur $\mathbf{T}$, alors $\left(\widehat{f}(n)\right) \in \ell^2(\mathbf{Z})$. □

Une application classique de la formule de Parseval est le calcul exact de la valeur de certaines séries numériques, comme le montre l'exercice suivant.
Exercice 1
Soit f la fonction 2π périodique sur $\mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad \widetilde{f}(x) = x \tag{28}$$

et $\widetilde{f}$ la fonction sur $\mathbf{T}$ associée. $\widetilde{f}$ est-elle continue ? Pourquoi $\widetilde{f}$ définit-elle un élément de $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$? Calculer les coefficients de Fourier de f et en déduire à l'aide de la formule de Parseval que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{29}$$

2 Étude de la convergence de $S_n(f,t)$

2.1 Étude de la convergence ponctuelle de $(S_n(f))$

2.1.1 Préliminaires

Avant toute chose, introduisons quelques notations et terminologies. On revient tout d'abord sur une notion déjà rencontrée.

Définition 2.1
Soit f un élément de $\boldsymbol{L}^1(\boldsymbol{T})$ et $t_0 \in \boldsymbol{T}$. On dit que f vérifie la condition de Fejer en t_0 s'il existe un représentant de la classe de f dans $\boldsymbol{L}^1(\boldsymbol{T})$ tel que la limite

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t_0+t)+f(t_0-t)}{2} \tag{30}$$

existe (et est finie). On vérifie alors que cette limite ne dépend pas du choix du représentant de f pour lequel elle existe : on la note $\frac{1}{2}\left[f(t_0)^+ + f(t_0)^-\right]$.

Remarque 2.2 : Soit $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{T})$ et $t_0 \in \mathbf{T}$. Si (un représentant de) f admet en t_0 une limite à gauche et une limite à droite, alors f vérifie la confition de Fejer en t_0. $\square$
On a déjà démontré en cours le résultat suivant.

Théorème 2.3
Soit f un élément de $\boldsymbol{L}^1(\boldsymbol{T})$ et $t_0 \in \boldsymbol{T}$. tel que f vérifie la condition de Fejer t_0. Alors $(\sigma_n(f,t_0))$ converge vers $\frac{1}{2}\left[f(t_0)^+ + f(t_0)^-\right]$.

Définition 2.4
Une fonction $f : \mathbf{R} \to \boldsymbol{C}$ est dite de classe C^1 par morceaux si elle vérifie la propriétés suivante : pour tous réels $a < b$, il existe un entier $n \geqslant 1$, une suite finie $(x_i)_{i=0}^n$ d'éléments de $[a, b]$ vérifiant

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

et pour $i = 0, \ldots, n-1$, un intervalle ouvert I_i contenant strictement $]x_i, x_{i+1}[$ *et une fonction g_i de classe C^1 sur I_i vérifiant $f_{|]x_i,x_{i+1}[} = (g_i)_{|]x_i,x_{i+1}[}$.*

Remarque 2.5 : Une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbf{R}$. □

Remarque 2.6 : Une fonction de classe C^1 sur par morceaux sur $\mathbf{R}$ est mesurable et localement intégrable sur $\mathbf{R}$. □

Remarque 2.7 : Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux sur $\mathbf{R}$ et x_0 un point de $\mathbf{R}$. Alors il existe un $\varepsilon > 0$ et une fonction g de classe C^1 sur $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ tel que f et g coïncident sur $]x_0, x_0 + \varepsilon[$. En particulier f admet une limite à droite $f(x_0)^+$ en x_0, et est dérivable à droite en x_0 au sens où la limite

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)^+}{x - x_0} \tag{31}$$

existe (et est finie). La même remarque vaut en remplaçant tous les «à droite» par «à gauche». □

Définition 2.8
Une fonction $f : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{C}$ est dite de classe C^1 par morceaux sur $\boldsymbol{T}$ si $f^{\#}$ est de classe C^1 par morceaux sur $\boldsymbol{R}$.

Lemme 2.9
Soit $f \in \boldsymbol{L}^1(\boldsymbol{T})$ et $t_0 \in \boldsymbol{T}$. Soit g la fonction $t \mapsto f(t + t_0)$ et h la fontion $t \mapsto f(t - t_0)$. Alors pour tout $n \in \boldsymbol{Z}$ on a

$$\forall t \in \boldsymbol{T}, \quad S_n(g, t) = S_n(f, t + t_0) \tag{32}$$

et

$$\forall t \in \boldsymbol{T}, \quad S_n(h, t) = S_n(f, -t + t_0) \tag{33}$$

Démonstration : Pour g, c'est immédiat, il suffit d'écrire

$$S_n(g, t) = \int_{\mathbf{T}} g(t - u)\, D_n(u)\, du = \int_{\mathbf{T}} f(t + t_0 - u)\, D_n(u)\, du = S_n(f, t + t_0). \tag{34}$$

Pour h c'est un tout petit peu plus subtil : on utilise le fait que D_n est paire et que la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T}$ est invariante par $t \mapsto -t$. On a

$$S_n(g,t) = \int_{\mathbf{T}} g(t-u)\, D_n(u)\, du = \int_{\mathbf{T}} f(-t+u+t_0)\, D_n(u)\, du$$
$$= \int_{\mathbf{T}} f(-t-u+t_0)\, D_n(-u)\, du = \int_{\mathbf{T}} f(-t+t_0-u)\, D_n(u)\, du = S_n(f,-t+t_0). \tag{35}$$

□

On va décrire à présent deux approches de l'étude de la convergence ponctuelle (voire uniforme dans certains cas) de $(S_n(f))$. La première utilise le lemme de Riemann-Lebesgue. La seconde utilise les résultats précédemment démontrés sur la convergence de la moyenne de Cesaro de la série de Fourier.

2.1.2 Approche via le lemme de Riemann-Lebesgue et principe de localisation

Comme l'indique le titre de cette partie, l'outil crucial est ici le lemme de Riemann-Lebesgue, qui, en plus de fournir un critère de convergence efficace (le test de Dini, d'où découle le théorème de Dirichlet), permet de montrer que le problème de la convergence ponctuelle est un problème local, dans le sens où pour une fonction f donnée et un point t_0 de $\mathbf{T}$ donné, le comportement de $(S_n(f)(t_0))$ en t_0 ne dépend que du comportement de f au voisinage de t_0. Ce dernier résultat est appelé *principe de localisation.*

Lemme 2.10
Soit $f \in \boldsymbol{L}^1(\boldsymbol{T})$. On suppose qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\left|f^{\#}(x)\right|}{|x|} dx < \infty \tag{36}$$

Alors $(S_n(f,0))$ est convergente de limite nulle.

Remarque 2.11 : Comme $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ est bornée sur $\mathbf{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$, la condition (36) est vérifiée pour un $\varepsilon > 0$ si et seulement si elle est vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$: le problème est au voisinage de l'origine. □

Démonstration : Montrons que la fonction g définie par

$$\forall t \in \mathbf{T}, \quad g(t) = \frac{f(t)\, \cos(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \tag{37}$$

est un élément de $\mathbf{L}^1(\mathbf{T})$. Comme f est dans $\mathbf{L}^1(\mathbf{T})$, $f^\#$ est dans $\mathbf{L}^1([-\pi,\pi])$. Pour tout $\varepsilon > 0$, $x \mapsto \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$ est bornés sur $[-\pi,\pi]\setminus]-\varepsilon,\varepsilon[$. Ainsi $g^\# \in \mathbf{L}^1([-\pi,\pi]\setminus]-\varepsilon,\varepsilon[)$. Par ailleurs on a

$$\left|\frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right| \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{|x|} \tag{38}$$

et l'hypothèse (36) montre alors que $g^\#$ est dans $\mathbf{L}^1([-\varepsilon,\varepsilon])$. Finalement $g^\# \in \mathbf{L}^1([-\pi,\pi])$ soit $g \in \mathbf{L}^1(\mathbf{T})$.

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
S_n(f,0) &= \int_{\mathbf{T}} f(t)\,\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} d\lambda_{\mathbf{T}} && (39)\\
&= \int_{\mathbf{T}} f(t)\,\frac{\sin(n\,t)\,\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\cos(n\,t)\,\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} d\lambda_{\mathbf{T}} && (40)\\
&= \int_{\mathbf{T}} f(t)\,\cos(n\,t) d\lambda_{\mathbf{T}} + \int_{\mathbf{T}} g(t)\,\sin(n\,t) d\lambda_{\mathbf{T}} && (41)\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{T}} f(t)\,\left(e^{int}+e^{-int}\right) d\lambda_{\mathbf{T}} + \frac{1}{2\,i}\int_{\mathbf{T}} g(t)\,\left(e^{int}-e^{-int}\right) d\lambda_{\mathbf{T}} && (42)
\end{aligned}$$

Par le lemme de Riemann-Lebesgue, les intégrales de la dernière expression convergent vers zéro, d'où le résultat. □

Corollaire 2.12 (Test de Dini)
Soit $t_0 \in \boldsymbol{T}$ et $x_0 \in \boldsymbol{R}$ d'image t_0 dans $\boldsymbol{T}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\ell \in \boldsymbol{C}$ tels que

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{\left|f^\#(x)-\ell\right|}{|x-x_0|}\,dx < \infty \tag{43}$$

Alors $(S_n(f,t_0))$ est convergente de limite ℓ.

Démonstration : On pose $g(t) = f(t_0+t)-\ell$ et on applique le lemme 2.10 à la fonction g. D'après le lemme 2.9, on a $S_n(g,0) = S_n(f,t_0)+\ell$, d'où le résultat. □

On déduit du test de Dini le *principe de localisation.*

Théorème 2.13 (Principe de localisation)
Soit f et g des éléments de $\boldsymbol{L}^1(\boldsymbol{T})$. On suppose qu'il existe un ouvert U de $\boldsymbol{T}$ telle que $f = g$ presque partout sur U. Alors pour tout élément t_0 de U, $(S_n(f,t_0))$ converge si et seulement si $(S_n(g,t_0))$ converge, et dans ce cas la limite est la même.

Démonstration : En considérant $f-g$, on est ramené à montrer le résultat suivant : soit f un élément de $\mathbf{L}^1(\mathbf{T})$; on suppose qu'il existe un ouvert U de $\mathbf{T}$ telle que f est nulle presque partout sur U ; alors pour tout élément t_0 de U, $(S_n(f,t_0))$ converge vers zéro.

Soit $t_0 \in U$ et $x_0 \in \mathbf{R}$ d'image t_0 dans $\mathbf{T}$. Par hypothèse, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f^\#$ est nulle presque partout sur $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$. Ainsi on a

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{\left|f^\#(x)\right|}{|x-x_0|}\, dx = 0 \tag{44}$$

D'après le corollaire 2.12, $(S_n(f,t_0))$ converge vers zéro. □

On déduit également du test de Dini le critère de convergence de Dirichlet.

Corollaire 2.14

Soit f un élément de $\boldsymbol{L}^1(\boldsymbol{T})$ et t_0 un élément de $\boldsymbol{T}$. Soit x_0 un élément de $\boldsymbol{R}$ qui relève t_0. On suppose qu'un représentant de la classe de f est dérivable en t_0 (i.e. $f^\#$ est dérivable en x_0). On note $f(t_0) = f^\#(x_0)$ la valeur de ce représentant en t_0. Alors $(S_n(f,t_0))$ converge vers $f(t_0)$.

Démonstration : Comme

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^\#(x)-f^\#(x_0)}{x-x_0} \tag{45}$$

existe, la fonction

$$x \mapsto \frac{f^\#(x)-f^\#(x_0)}{x-x_0} \tag{46}$$

est bornée sur $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ pour un certain ε. Ceci montre que l'intégrale

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \left|\frac{f^\#(x)-f^\#(x_0)}{x-x_0}\right| dx \tag{47}$$

est finie. D'après le corollaire 2.12, $(S_n(f,t_0))$ converge vers $f^\#(x_0) = f(t_0)$.
□

Théorème 2.15 (Théorème de Dirichlet)

Soit f un élément de $\boldsymbol{L}^1(\boldsymbol{T})$ et t_0 un élément de $\boldsymbol{T}$. Soit x_0 un élément de $\boldsymbol{R}$ qui relève t_0. On suppose qu'un représentant de la classe de f admet une limite à gauche et une limite à droite en t_0, notée respectivement $f(t_0)^-$ et $f(t_0)^+$. On suppose en outre que les limites

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{f^\#(x)-f(t_0)^+}{x-x_0} \tag{48}$$

et

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f^{\#}(x) - f(t_0)^-}{x - x_0} \tag{49}$$

existent (et sont finies). Alors $(S_n(f, t_0))$ converge vers $\frac{1}{2}\left[f(t_0)^+ + f(t_0)^-\right]$.

Démonstration : Soit g la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbf{T} \setminus \{t_0\}, \quad g(t) = \frac{1}{2}\left[f(t_0 + t) + f(t_0 - t)\right] \tag{50}$$

et

$$g(0) = \frac{1}{2}\left[f(t_0)^+ + f(t_0)^-\right]. \tag{51}$$

Les hypothèses entraîne que g est dérivable en 0. On applique alors le corollaire 2.14 à la fonction g, et on utilise le fait (découlant du lemme 2.9) que $S_n(g, 0) = S_n(f, t_0)$. □

Corollaire 2.16
Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux sur $\boldsymbol{T}$. Pour tout élément t de $\boldsymbol{T}$, $(S_n(f, t))$ converge vers $\frac{1}{2}\left[f(t)^+ + f(t)^-\right]$.

2.1.3 Approche taubérienne

La philosophie de cette approche est la suivante : on a vu que si une suite complexe convergeait, sa moyenne de Cesàro convergeait vers la même limite, mais que la moyenne de Cesàro pouvait converger sans que la suite elle-même ne converge. Il se trouve cependant que si la suite vérifie des hypothèses supplémentaires convenables, la convergence de la moyenne de Cesàro peut entraîner la convergence de la suite. Un résultat de ce genre est appelé un théorème taubérien. Un exemple de tel résultat est fourni par l'exercice suivant.

Exercice 2
Soit (a_n) une suite réelle monotone. On suppose que $(Ces(a)_n)$ convergente. Montrer que (a_n) est convergente.

On a précédemment établi la convergence de la suite $(\sigma_n(f, t_0))$ sous certaines hypothèses portant sur f et/ou sur t_0. L'idée est alors d'utiliser un théorème taubérien permettant, moyennant des hypothèses supplémentaires sur f et/ou t_0, de déduire de la convergence $(\sigma_n(f, t_0))$ la convergence de $(S_n(f, t_0))$. Dans ce cours, l'hypothèse supplémentaire que nous allons considérer est la suivante.

Définition 2.17
Soit $f \in \boldsymbol{L}^1(\boldsymbol{T})$. On dit que f vérifie la condition de Hardy *si on a*

$$\widehat{f}(n) = \underset{|n|\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{|n|}\right). \tag{52}$$

En d'autres termes, il existe une constante $C \geqslant 0$ telle qu'on ait

$$\forall n \in \boldsymbol{Z}, \quad \left|n\,\widehat{f}(n)\right| \leqslant C. \tag{53}$$

Le résultat clef pour l'étude de la convergence ponctuelle de $(S_n(f))$ (voire uniforme dans certains cas) est alors le suivant.

Théorème 2.18
Soit $f \in \boldsymbol{L}^1(\boldsymbol{T})$ vérifiant la condition de Hardy.

1. *Soit $t_0 \in \boldsymbol{T}$ et $\ell \in \boldsymbol{C}$. Alors :*
   (a) *$(S_n(f, t_0))$ converge vers ℓ si et seulement si $(\sigma_n(f, t_0))$ converge vers ℓ ;*
   (b) *$(S_n(f, t_0))$ diverge si et seulement si $(\sigma_n(f, t_0))$ diverge.*
2. *Soit A une partie quelconque de $\boldsymbol{T}$ et $\varphi : A \to \boldsymbol{C}$ une fonction bornée. Alors $(\sigma_n(f))$ converge uniformément vers φ sur A si et seulement si $(S_n(f))$ converge uniformément vers φ sur A.*

La preuve du théorème 2.18 sera donnée un peu plus tard. Elle présente un niveau technique important et n'est guère éclairante en elle-même. Nous préférons d'abord expliquer les nombreuses conséquences de ce théorème.

Proposition 2.19
Soit f une fonction continue sur $\boldsymbol{T}$. On suppose que f vérifie la condition de Hardy. Alors $(S_n(f))$ converge uniformément vers f sur $\boldsymbol{T}$. En particulier, pour tout $t \in \boldsymbol{T}$, $(S_n(f, t))$ converge vers $f(t)$.

Démonstration : Comme f est continue, $(\sigma_n(f))$ converge uniformément vers f sur $\mathbf{T}$. Comme f vérifie de plus la condition de Hardy, le point 2. du théorème 2.18 donne le résultat. □

Remarque 2.20 : On a montré en TD que si une fonction continue f vérifie

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \left|\widehat{f}(n)\right| < \infty, \tag{54}$$

alors $(S_n(f))$ converge uniformément vers f sur $\mathbf{T}$.

Il faut bien réaliser que pour une fonction continue, entre la condition (54) et la condition de Hardy, *aucune n'est plus faible que l'autre*. En d'autres termes, il existe des fonctions continues qui vérifient la condition de Hardy et pas la condition (54), et inversement (et il existe des fonction continues dont la série de Fourier diverge en un point, et qui ne vérifient donc aucune des deux conditions). Voici un exemple de fonction continues f vérifiant la condition (54) mais pas la condition de Hardy. Soit $(c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ définie par $c_n = \frac{1}{\sqrt{|n|}}$ si $|n|$ est la puissance quatrième d'un élément de $\mathbf{N}$ et $c_n = 0$ sinon. Alors $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n|$ est finie, donc d'après un exercice de TD,

$$f \,:\, t \mapsto \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n\, e_n(t) \tag{55}$$

est une fonction continue sur $\mathbf{T}$ dont les coefficients de Fourier sont les (c_n). Or $(n\, c_n)$ n'est pas bornée. □

Corollaire 2.21
Si f est de classe C^1 sur $\boldsymbol{T}$, $(S_n(f))$ converge uniformément vers f sur $\boldsymbol{T}$.

Démonstration : On sait qu'on a

$$\forall f \in \mathbf{Z}, \quad \widehat{f'}(n) = i\, n\, \widehat{f}(n) \tag{56}$$

D'après le lemme de Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{|n|\to\infty} \widehat{f'}(n) = 0 \tag{57}$$

Ceci montre que f vérifie la condition de Hardy. □

Théorème 2.22
Soit $f \in \boldsymbol{L}^1(T)$ et $t_0 \in \boldsymbol{T}$. On suppose que les conditions suivantes sont remplies :

1. *f vérifie la condition de Hardy ;*
2. *f vérifie la condition de Fejer en t_0.*

Alors $(S_n(f, t_0))$ converge vers $\frac{1}{2}\,[f(t_0)^+ + f(t_0)^-)]$.

Démonstration : On a vu que la condition 2. entraîne la convergence de $(\sigma_n(f, t_0))$ vers $\frac{1}{2}(f(t_0)^+ + f(t_0)^-)$. On applique alors le théorème 2.18. □
La partie suivante décrit une large classe de fonctions (comprenant notamment les fonctions de classe C^1 par morceaux) pour lesquelles la condition de Hardy et la condition de Fejer en tout point sont vérifiées, et donc justiciables de l'application du théorème 2.22.

2.1.4 Fonctions à variation bornée

Définition 2.23

Soit $a \leqslant b$ des réels et f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\boldsymbol{C}$. On dit que f est à variation bornée *sur $[a,b]$ si la quantité*

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{n\in\boldsymbol{N}^* \\ (x_0,\dots,x_n)\in[a,b]^{n+1} \\ a\leqslant x_0<x_1<\dots<x_n\leqslant b}} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1})-f(x_k)| \tag{58}$$

est finie. On note alors $V_a^b(f)$ cette quantité, et on l'appelle la variation totale *de f entre a et b.*

Intuitivement, une fonction à variation bornée sur $[a,b]$ est une fonction qui n'oscille pas trop sur $[a,b]$. À cet égard, l'exemple 10 du théorème 2.24 est significatif. Le théorème 2.24 liste quelques exemples et propriétés des fonctions à variation bornée, dont les preuves (qui ne sont pas très difficiles) seront (peut-être) vues en TD.

Théorème 2.24

1. *L'ensemble des fonctions à variation bornée sur $[a,b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[a,b]$ vers $\boldsymbol{C}$.*
2. *Une fonction $f : [a,b] \to \boldsymbol{C}$ est à variation bornée sur $[a,b]$ si est seulement si ses parties réelle et imaginaire sont à variation bornée.*
3. *Une fonction à variation bornée sur $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$.*
4. *Soit c tel que $a<c<b$. Alors f est à variation bornée sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et que*
$$V_{[a,b]}(f) = V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f)$$
5. *Une fonction monotone sur $[a,b]$ est à variation bornée. Plus généralement, une fonction monotone par morceaux sur $[a,b]$ est à variation bornée.*
6. *$f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ est à variation bornée si et seulement si f est la différence de deux fonctions croissantes sur $[a,b]$; en particulier toute fonction à variation bornée sur $[a,b]$ est mesurable sur $[a,b]$.*
7. *Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,b]$, x_0 un élément de $[a,b]$ et F la fonction sur $[a,b]$ définie par*
$$\forall x \in [a,b], \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(y)\,dy \tag{59}$$
Alors F est à variation bornée sur $[a,b]$ et $V_a^b(F) \leqslant \int_a^b |f(y)|\,dy$.

8. *Cas particulier du numéro précédent : si f est de classe C^1 sur $[a,b]$ alors f est à variation bornée sur $[a,b]$ et $V_a^b(f) \leqslant \int_a^b |f'(y)|\,dy$.*
9. *Si f est de classe C^1 par morceaux sur $[a,b]$ alors f est à variation bornée sur $[a,b]$.*
10. *Pour $\varepsilon > 0$, la fonction $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ se prolonge en une fonction continue sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ qui n'est pas à variation bornée.*

Définition 2.25
Une fonction f sur $\boldsymbol{T}$ est dite à variation bornée sur $\boldsymbol{T}$ si $f^{\#}$ est à variation bornée sur $[0, 2\pi]$. On note alors $V_{\boldsymbol{T}}(f) = V_0^{2\pi}\left(f^{\#}\right)$ et on appelle cette quantité la variation totale de f sur $\boldsymbol{T}$

Remarque 2.26 : On vérifie que dans la définition ci-dessus on peut remplacer $[0, 2\pi]$ par n'importe quel segment de longueur 2π. □
D'après les points 6, 2 et 3 du théorème 2.24, une fonction à variation bornée sur $\mathbf{T}$ est mesurable et bornée sur $\mathbf{T}$. Elle définit donc un élément de $\mathbf{L}^\infty(\mathbf{T})$, et on peut donc parler de ses coefficients de Fourier. Comme une fonction monotone admet en tout point une limite à gauche et une limite à droite, on obtient d'après les points 6 et 2 du théorème 2.24 le résultat suivant.

Lemme 2.27
Une fonction f à variation bornée sur $\boldsymbol{T}$ vérifie la condition de Fejer en tout point t de $\boldsymbol{T}$.

Théorème 2.28
Soit f une fonction à variation bornée sur $\boldsymbol{T}$. Alors on a

$$\forall n \in \boldsymbol{Z} \setminus \{0\}, \quad \left|\widehat{f}(n)\right| \leqslant \frac{V_{\boldsymbol{T}}(f)}{2\pi\ |n|}. \tag{60}$$

En particulier f vérifie la condition de Hardy.

Avant de prouver ce théorème, nous en donnons les conséquences.

Corollaire 2.29
Soit f une fonction à variation bornée sur $\boldsymbol{T}$. Alors en tout point t_0 de $\boldsymbol{T}$ $(S_n(f, t_0))$ converge vers $\frac{1}{2}\left[f(t_0)^+ + f(t_0)^-\right]$.

Corollaire 2.30
Soit f une fonction continue et à variation bornée sur $\boldsymbol{T}$. Alors $(S_n(f))$ converge uniformément vers f sur $\boldsymbol{T}$.

Corollaire 2.31
Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux sur $\boldsymbol{T}$. Alors en tout point t_0 de $\boldsymbol{T}$ $(S_n(f,t_0)$ converge vers $\frac{1}{2}\left[f(t_0)^+ + f(t_0)^-\right]$. Si en outre f est continue sur $\boldsymbol{T}$, $(S_n(f))$ converge uniformément vers f sur $\boldsymbol{T}$.

On déduit du corollaire 2.29 et du principe de localistion le test de Jordan.

Corollaire 2.32 (Test de Jordan)
Soit $f \in \boldsymbol{L}^1(\boldsymbol{T})$. Soit $t_0 \in \boldsymbol{T}$ tel que f soit à variation bornée au voisinage de t_0 (i.e. il existe un ouvert U de $\boldsymbol{T}$ contenant t_0 et une fonction g à variation bornée sur $\boldsymbol{T}$ tels que f et g sont égales pour presque tout t de U). Alors $(S_n(f,t_0))$ converge vers $\frac{1}{2}\left[f(t_0)^+ + f(t_0)^-\right]$.

Démonstration : (du théorème 2.28) Supposons tout d'abord f continue (et à variation bornée !). Soit n un entier relatif non nul. Pour alléger l'écriture on note g la fonction $x \mapsto \frac{1}{i\,n} e^{-i\,n,x}$.

Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Comme $f^{\#}$ est continue sur $[0, 2\,\pi]$, donc uniformément continue sur $[0, 2\,\pi]$, on peut trouver un entier strictement positif N vérifiant

$$\forall (x,y) \in [0, 2\,\pi]^2, \quad |x-y| \leqslant \frac{2\,\pi}{N} \Rightarrow \left|f^{\#}(x) - f^{\#}(y)\right| \leqslant \varepsilon \tag{61}$$

On a

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi} f^{\#}(x)\, e^{-i\,n\,x} dx = \frac{1}{2\,\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\frac{2\,k\,\pi}{n}}^{\frac{2\,(k+1)\,\pi}{n}} f^{\#}(x)\, e^{-i\,n\,x} dx \tag{62}$$

Pour k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant N-1$, on a d'après (61)

$$\begin{aligned}\left|\int_{\frac{2\,k\,\pi}{N}}^{\frac{2\,(k+1)\,\pi}{N}} f^{\#}(x)\, e^{-i\,n\,x} dx - \int_{\frac{2\,k\,\pi}{N}}^{\frac{2\,(k+1)\,\pi}{N}} f^{\#}\left(\frac{2\,(k+1)\,\pi}{N}\right) e^{-i\,n\,x} dx\right| \\ \leqslant \int_{\frac{2\,k\,\pi}{N}}^{\frac{2\,(k+1)\,\pi}{N}} \left|f^{\#}(x) - f^{\#}\left(\frac{2\,(k+1)\,\pi}{N}\right)\right| dx \leqslant \frac{2\,\pi}{N}\,\varepsilon.\end{aligned} \tag{63}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\int_{\frac{2\,k\,\pi}{N}}^{\frac{2\,(k+1)\,\pi}{N}} f^{\#}\left(\frac{2\,(k+1)\,\pi}{N}\right) e^{-i\,n\,x} dx \\ = f^{\#}\left(\frac{2\,(k+1)\,\pi}{N}\right)\left[g\left(\frac{2\,(k+1)\,\pi}{N}\right) - g\left(\frac{2\,k\,\pi}{N}\right)\right]\end{aligned} \tag{64}$$

En combinant (62), (63) et (64), on obtient

$$\left|\widehat{f}(n) - \frac{1}{2\,\pi} \sum_{k=0}^{N-1} f^{\#}\left(\frac{2\,(k+1)\,\pi}{N}\right)\left[g\left(\frac{2\,(k+1)\,\pi}{N}\right) - g\left(\frac{2\,k\,\pi}{N}\right)\right]\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2\,\pi}{N} = \varepsilon. \tag{65}$$

Or on a

$$\sum_{k=0}^{N-1} f^{\#}\left(\frac{2\,(k+1)\,\pi}{N}\right)\left[g\left(\frac{2\,(k+1)\,\pi}{N}\right) - g\left(\frac{2\,k\,\pi}{N}\right)\right] \tag{66}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} f^{\#}\left(\frac{2\,(k+1)\,\pi}{N}\right) g\left(\frac{2\,(k+1)\,\pi}{N}\right) - \sum_{k=0}^{N-1} f^{\#}\left(\frac{2\,(k+1)\,\pi}{N}\right) g\left(\frac{2\,k\,\pi}{N}\right) \tag{67}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} f^{\#}\left(\frac{2\,k\,\pi}{N}\right) g\left(\frac{2\,k\,\pi}{N}\right) - \sum_{k=0}^{N-1} f^{\#}\left(\frac{2\,(k+1)\,\pi}{N}\right) g\left(\frac{2\,k\,\pi}{N}\right) \tag{68}$$

$$= f^{\#}(2\,\pi)\, g(2\,\pi) - f^{\#}\left(\frac{2\,\pi}{N}\right) g(0) + \sum_{k=1}^{N-1} g\left(\frac{2\,k\,\pi}{N}\right)\left[f^{\#}\left(\frac{2\,k\,\pi}{N}\right) - f^{\#}\left(\frac{2\,(k+1)\,\pi}{N}\right)\right] \tag{69}$$

$$= \left[f^{\#}(0) - f^{\#}\left(\frac{2\,\pi}{N}\right)\right] g(0) + \sum_{k=1}^{N-1} g\left(\frac{2\,k\,\pi}{N}\right)\left[f^{\#}\left(\frac{2\,k\,\pi}{N}\right) - f^{\#}\left(\frac{2\,(k+1)\,\pi}{N}\right)\right] \tag{70}$$

On obtient alors, compte tenu du fait que $|g| = \frac{1}{|n|}$,

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \leqslant \varepsilon + \frac{1}{2\,\pi\,|n|}\left|f(0) - f\left(\frac{2\,\pi}{N}\right)\right| + \frac{1}{2\,\pi\,|n|} \sum_{k=1}^{N-1} \left|f^{\#}\left(\frac{2\,k\,\pi}{N}\right) - f^{\#}\left(\frac{2\,(k+1)\,\pi}{N}\right)\right| \tag{71}$$

$$\leqslant \varepsilon + \frac{1}{2\,\pi\,|n|} V_0^{2\,\pi}\left(f^{\#}\right). \tag{72}$$

Ceci étant vérifié pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \leqslant \frac{1}{2\,\pi\,|n|} V_0^{2\,\pi}\left(f^{\#}\right). \tag{73}$$

Soit à présent f une fonction à variation bornée sur $\mathbf{T}$, non nécessairement continue. Soit $r > 0$ un réel. Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose

$$f_r(x) = r \int_0^{\frac{1}{r}} f^{\#}(x+y)dy. \tag{74}$$

On vérifie que f_r est une fonction continue et 2π-périodique sur $\mathbf{R}$. Soit n un entier et $x_0, \dots, x_n$ des réels vérifiant $0 \leqslant x_0 < \cdots < x_n \leqslant 2\pi$. Alors on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f_r(x_{k+1}) - f_r(x_k)| \leqslant r \int_0^{\frac{1}{r}} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f^{\#}(x_{k+1}+y) - f_r^{\#}(x_k) + y \right| dy. \tag{75}$$

Or pour $y \in [0, \frac{1}{r}$ on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| f^{\#}(x_{k+1}+y) - f_r^{\#}(x_k) + y \right| dy \leqslant V_y^{y+2\pi}\left(f^{\#}\right) = V_{\mathbf{T}}(f). \tag{76}$$

Finalement on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f_r(x_{k+1}) - f_r(x_k)| \leqslant r\,\frac{1}{r}\,V_{\mathbf{T}}(f) = V_{\mathbf{T}}(f). \tag{77}$$

Ceci montre que f_r est à variation bornée et l'inégalité

$$V_0^{2\pi}(f_r) \leqslant V_{\mathbf{T}}(f). \tag{78}$$

Ainsi d'après ce qui précède on a

$$\forall r > 0, \quad \forall n \neq 0, \quad \left|\widehat{f_r}(n)\right| \leqslant \frac{V_0^{2\pi}(f_r)}{2\pi\ |n|} \leqslant \frac{V_{\mathbf{T}}(f)}{2\pi\ |n|}. \tag{79}$$

Pour $r > 0$, calculons à présent les coefficients de Fourier de f_r. Pour $n \neq 0$ on a

$$\widehat{f_r}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \left[\int_0^{\frac{1}{r}} f^{\#}(x+y)dy\right] e^{-i\,n\,x}dx. \tag{80}$$

Une application du théorème de Fubini (dont la justification est laissée au lecteur) montre qu'on a (moyennant un petit changement de variable affine également laissé à la lectrice)

$$\begin{aligned}
\widehat{f_r}(n) &= \frac{1}{2\pi} r \int_0^{\frac{1}{r}} \left[\int_0^{2\pi} f^{\#}(x+y)e^{-i\,n\,x}dx\right] dy && (81)\\
&= r \int_0^{\frac{1}{r}} e^{-i\,n\,y}\widehat{f}(n)dy && (82)\\
&= -\frac{1}{i\,n} r \left[e^{-i\,n\,\frac{1}{r}} - 1\right] \widehat{f}(n). && (83)
\end{aligned}$$

d'où on tire

$$\lim_{r\to+\infty} \widehat{f}_r(n) = \exp'(0)\, \widehat{f}(n) = \widehat{f}(n). \tag{84}$$

En combinant (79) et(84), on obtient le résultat cherché. $\square$