Université de Rennes 1
Année 2005-2006

Licence de mathématiques
F02. Intégrale de Lebesgue
et séries de Fourier

# Correction de l'examen final

Le barême adopté est le suivant :
-Exercice 1 : 2 pts
-Exercice 2 : 2+2+2 pts + 1 pt de bonus
-Exercice 3 : 4+2+2+2+1+3 pts + 0.5 pt de bonus.

## Exercice 2

1. Par définition de $||f||_{\text{sup}}$ l'ensemble $\{|f| > ||f||_{\text{sup}}\}$ est vide. Il est donc de mesure nulle. Ainsi $\mathcal{M}(f)$ est non vide, plus précisément $\mathcal{M}(f)$ contient $||f||_{\text{sup}}$.

   Ainsi d'une part $f$ est un élément de $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{T}, \mu)$. D'autre part, comme $||f||_\infty = \operatorname{Inf} \mathcal{M}(f)$ et que $||f||_{\text{sup}}$ est un élément de $\mathcal{M}(f)$, on a $||f||_\infty \leqslant ||f||_{\text{sup}}$.

2. L'ensemble $\mathbf{Q}$ est un sous-ensemble dénombrable de $\mathbf{R}$, donc mesurable. Ainsi la fonction $f = \mathbf{1}_\mathbf{Q}$ est mesurable, et visiblement bornée. En fait pour tout $x$ de $\mathbf{R}$, on a $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$, et il existe des réels pour lesquels $f(x) = 1$ ce qui montre que $||f||_{\text{sup}} = 1$.

   Par ailleurs, comme $\mathbf{Q}$ est dénombrable et que la mesure de Lebesgue ne charge pas les singletons, $\mathbf{Q}$ est de mesure de Lebesgue nulle. Or l'ensemble $\{|f| > 0\}$ n'est autre que $\mathbf{Q}$. Ceci montre que 0 est un élément de $\mathcal{M}(f)$. Comme $\mathcal{M}(f)$ ne contient de toute façon que des réels positifs, on a donc $||f||_\infty = \inf \mathcal{M}(f) = 0$. On a donc bien $||f||_\infty \leqslant ||f||_{\text{sup}}$.

3. On peut commencer par remarquer qu'une fonction $f$ continue sur $[a, b]$ est bien mesurable pour la tribu borélienne, et bornée (ce dernier fait découlant de la compacité de $[a, b]$). Pour tout réel $M$ vérifiant $0 \leqslant M < ||f||_{\text{sup}}$ l'ensemble $\{|f| > M\} = |f|^{-1}(]M, +\infty[)$ est ouvert (car $|f|$ est continue et $]M, +\infty[$ est ouvert) et non vide (par définition de $||f||_{\text{sup}}$ ; on peut également si l'on veut invoquer le fait que que cet ensemble contient tout point de $[a, b]$ où $||f||_{\text{sup}}$ est atteint, et qu'il existe au moins un tel point par compacité de $[a, b]$ et continuité de $|f|$). Or la mesure de Lebesgue d'un ouvert non vide est non nulle

(car un tel ouvert contient toujours un intervalle ouvert $]x_0, x_1[$ avec $x_1 > x_0$, donc sa mesure de Lebesgue est supérieure à la mesure de Lebesgue de $]x_0, x_1[$, à savoir $x_1 - x_0$). Ceci montre que si $M$ vérifie $0 \leqslant M < ||f||_{\text{sup}}$ alors $M$ n'est pas dans $\mathcal{M}(f)$.

En d'autres termes, on a $\mathcal{M}(f) \subset [||f||_{\text{sup}}, +\infty[$. Par passage à la borne inférieure on obtient $||f||_\infty \geqslant ||f||_{\text{sup}}$. L'inégalité inverse étant toujours vraie d'après la question 1., on a bien l'égalité.

*Remarque :* La propriété cruciale utilisée dans la démonstration est que la mesure de Lebesgue charge les ouverts non vides. La compacité de $[a, b]$ sert juste à assurer que les fonctions continues sont bornées. On peut énoncer (et démontrer quasiment de la même façon que ci-dessus) le résultat plus général suivant : *Soit $(X, d)$ un espace métrique (voire topologique si l'on veut), $\mathcal{B}$ la tribu borélienne, $\mu$ une mesure sur $\mathcal{B}$ qui charge les ouverts non vide. Alors si $f$ est une fonction continue et bornée sur $X$, $f$ est un élément de $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{T}, \mu)$ et on a $||f||_\infty = ||f||_{\text{sup}}$.*

4. Notons $\mathcal{C}([a, b])$ l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, identifé à un sous-espace de $\mathbf{L}^\infty([a, b])$. Rappelons que ceci est possible parce que deux fonctions continues égales presque partout sont égales (en effet l'ensemble où elles diffèrent est un ouvert, et est donc vide car la mesure de Lebesgue charge les ouverts non vides).

   D'après la question précédente, la restriction de la norme $||.||_\infty$ à $\mathcal{C}([a, b])$ coïcide avec la norme $||.||_{\text{sup}}$ (attention, $||.||_{\text{sup}}$ ne définit pas une norme sur $\mathbf{L}^\infty([a, b])$, en fait $||.||_{\text{sup}}$ n'est même pas bien définie sur $\mathbf{L}^\infty([a, b])$ : le fait que $f$ et $g$ soit égales presques partout n'entraîne pas $||f||_{\text{sup}} = ||g||_{\text{sup}}$ ; prendre par exemple pour $f$ la fonction identiquement nulle et pour $g$ l'indicatrice de $\mathbf{Q}$). Or l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([a, b]), ||.||_{\text{sup}})$ est complet. Ceci montre que $\mathcal{C}([a, b])$ est fermé dans $\mathbf{L}^\infty([a, b], ||.||_\infty)$.

## Exercice 3

1. On sait que dire que $f$ est un élément de $\mathbf{L}^1(\mathbf{T})$ revient à dire que $\widetilde{f}$ est intégrable sur tout intervalle de longueur $2\pi$ .

   Comme tout intervalle de longueur finie est inclus dans une réunion finie d'intervalle de longueur $2\pi$, ceci montre que $\widetilde{f}$ est intégrable sur tout intervalle de longueur finie. Ainsi $F$ est bien définie.

   Soit $x \in \mathbf{R}$, montrons que $F$ est continue en $x$. On utilise pour cela la caractérisation séquentielle de la continuité. On considère une suite

$(x_n)$ qui converge vers $x$ et on veut montrer qu'alors la suite $(F(x_n))$ converge vers $F(x)$.

Comme $(x_n)$ converge vers $x$, pour $n$ assez grand on aura $x_n \in [x-1, x+1]$. On peut alors écrire[1]

$$F(x) - F(x_n) = \int_{x_n}^{x} \widetilde{f}(u)du = \int_{x-1}^{x+1} \mathbf{1}_{[x,x_n]}(u)\, \widetilde{f}(u)du.$$

Montrons alors que $\int_{x-1}^{x+1} \mathbf{1}_{[x,x_n]}(u)\, \widetilde{f}(u)du$ converge vers zéro, ce qui donnera le résultat. On utilise pour cela le théorème de convergence dominée, en remarquant que :

- le fait que $x_n$ tende vers $x$ assure que pour tout $u$ de $[x-1, x+1]$ distinct de $x$ (donc pour presque tout $u$, la mesure de Lebesgue ne chargeant pas les singletons), la suite $\mathbf{1}_{[x,x_n]}(u)\, \widetilde{f}(u)$ converge vers 0 ;
- On a pour tout $n$ assez grand et pour tout $u \in [x-1, x+1]$

$$\left| \mathbf{1}_{[x,x_n]}(u)\, \widetilde{f}(u) \right| \leqslant \left| \widetilde{f}(u) \right|$$

et $\left| \widetilde{f} \right|$ est intégrable sur $[x-1, x+1]$ (ceci a été vu plus haut).

Montrons à présent que $F$ est $2\,\pi$ périodique. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$F(x + 2\,\pi) = \int_0^x \widetilde{f}(u)du + \int_x^{x+2\,\pi} \widetilde{f}(u)du = F(x) + \int_x^{x+2\,\pi} \widetilde{f}(u)du$$

et

$$\int_x^{x+2\,\pi} \widetilde{f}(u)du = 2\,\pi\, \widehat{f}(0).$$

Or la condition (0.1) entraîne $\widehat{f}(0) = 0$. Ainsi $F$ est bien $2\,\pi$-périodique.

Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^x \widetilde{f}(u)du \right) e^{-i\,n\,x}\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\,\pi} \mathbf{1}_{[0,x]}(u) \widetilde{f}(u)du \right) e^{-i\,n\,x}\, dx.
\end{aligned}$$

On va appliquer le théorème de Fubini pour calculer cette intégrale. Il faut donc d'abord montrer que la fonction

$$(x, u) \mapsto \mathbf{1}_{[0,x]}(u)\, \widetilde{f}(u)\, e^{-i\,n\,x}$$

[1]On commet ici un léger abus de notation consistant à noter, pour tous réels $a$ et $b$, $[a, b]$ le segment $[\min(a, b), \max(a, b)]$

est intégrable sur $[0,2\,\pi]\times[0,2\,\pi]$. Or on a

$$\begin{aligned}\int_{[0,2\,\pi]\times[0,2\,\pi]}\left|\mathbf{1}_{[0,x]}(u)\widetilde{f}(u)\,e^{-i\,n\,x}\right|dx\,du &\leqslant \int_{[0,2\,\pi]\times[0,2\,\pi]}\left|\widetilde{f}(u)\right|dxdu\\ &\leqslant 2\,\pi\int_{[0,2\pi]}\left|\widetilde{f}(u)\right|du<+\infty.\end{aligned}$$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini pour calculer l'intégrale qui nous intéresse, ce qui donne, pour $n\neq 0$,

$$\begin{aligned}\widehat{F}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\,\pi}\mathbf{1}_{[0,x]}(u)\widetilde{f}(u)du\right)\,e^{-i\,n\,x}\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\,\pi}\mathbf{1}_{[0,x]}(u)e^{-i\,n\,x}dx\right)\,\widetilde{f}(u)du\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_u^{2\,\pi}e^{-i\,n\,x}dx\right)\,\widetilde{f}(u)du\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-i\,2\,n\,\pi}-e^{-i\,n\,u}}{-i\,n}\,\widetilde{f}(u)du\\ &= -\frac{1}{2\pi\,i\,n}\int_0^{2\pi}\widetilde{f}(u)du+\frac{1}{i\,n}\frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi}e^{-i\,n\,u}\,\widetilde{f}(u)du\\ &= -\frac{\widehat{f}(0)}{i\,n}+\frac{\widehat{f}(n)}{i\,n}=\frac{\widehat{f}(n)}{i\,n},\end{aligned}$$

d'où la formule demandée (qui est claire pour $n=0$ car $\widehat{f}(0)=0$).

*Esquisse d'une autre démonstration possible :* Le résultat est vrai si $f$ est continue : dans ce cas, $F$ est de classe $C^1$, on a $F'=\widetilde{f}$ et le résultat figure dans le cours. On peut alors étendre le résultat à $f$ supposée seulement dans $\mathbf{L}^1(\mathbf{T})$ en utilisant la densité des fonctions continues dans $\mathbf{L}^1(\mathbf{T})$.

2. Comme $F$ est continue, la moyenne de Cesaro de la série de Fourier de $F$ en 0 est convergente (et converge vers $F(0)$=0). Ceci découle d'au moins deux résultats du cours :
   - le résultat qui affirme que la moyenne de Cesaro de de la série de Fourier d'une fonction continue sur $\mathbf{T}$ converge uniformément vers cette fonction sur $\mathbf{T}$ (et en particulier converge en tout point !)
   - le résultat qui affirme que la moyenne de Cesaro de la série de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbf{T}$ converge en un point $t_0$ de $\mathbf{T}$ dès que cette fonction vérifie ce qu'on a appelé la *condition de Fejer* en $t_0$, cette condition étant automatiquement vérifiée en tout point pour les fonctions continues.

Notons que ces résultats sont tous les deux basés sur l'utilisation du noyau de Fejer.

3. Pour tout $n \geqslant 0$, on a, pour tout $t$ de $\mathbf{T}$,

$$\sigma_n(F,t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=-k}^{k} \widehat{F}(l)\, e^{i\,l\,t}.$$

On en déduit qu'on a pour tout $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
\sigma_n(F,0) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=-k}^{k} \widehat{F}(l) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \widehat{F}(0) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{-k\leqslant l\leqslant k \\ l\neq 0}} \widehat{F}(l) \\
&= \widehat{F}(0) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{-k\leqslant l\leqslant k \\ l\neq 0}} \widehat{F}(l).
\end{aligned}$$

En appliquant successivement le résultat du 1. et la propriété (0.1) on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{-k\leqslant l\leqslant k \\ l\neq 0}} \widehat{F}(l) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{-k\leqslant l\leqslant k \\ l\neq 0}} \frac{\widehat{f}(l)}{i\,l} \\
&= \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} \frac{\widehat{f}(l)}{i\,l}.
\end{aligned}$$

On en tire

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Big(i\,\sigma_n(F,0) - i\,\widehat{F}(0)\Big) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} \frac{\widehat{f}(l)}{l} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=l}^{n} \frac{\widehat{f}(l)}{l} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n} (n+1-l)\, \frac{\widehat{f}(l)}{l} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \frac{\widehat{f}(l)}{l} - \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n} \widehat{f}(l)
\end{aligned}$$

d'où l'égalité demandée.

4. Pour montrer la convergence de la série à termes positifs de terme général $\frac{\widehat{f}(n)}{n}$, il suffit de montrer que la suite des sommes partielles est bornée, ce qui revient, d'après l'égalité établie à la question précédente, à montrer que la suite

$$\frac{1}{2}\left(i\,\sigma_n(F,0) - i\,\widehat{F}(0)\right) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\widehat{f}(k)$$

est bornée. Or $\sigma_n(F,0)$ est convergente, donc bornée, et pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\widehat{f}(k)\right| &\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left|\widehat{f}(k)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}||f||_1 \\ &\leqslant ||f||_1\,,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

5. Il s'agissait d'une application immédiate de ce qui précède : il suffit de remarquer que la série de terme général $\frac{1}{n\,\ln(n)}$ diverge. Le correcteur n'attendait pas de preuve de ce résultat bien connu, mais a attribué un petit bonus à ceux qui en ont rappelé la démonstration.

6. Comme la série de terme général $|c_n|^2$ est convergente, on sait d'après le cours qu'il existe un élément $f$ de $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$ ayant la propriété voulue. Comme $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$ est inclus dans $\mathbf{L}^1(\mathbf{T})$, la première question a également une réponse positive.

   Par contre si $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbf{T}$, on sait qu'on a, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la relation $\widehat{f'}(n) = i\,n\,\widehat{f}(n)$. Le lemme de Riemann-Lebesgue appliqué à $f'$ montre que la suite $(n\,\widehat{f}(n))$ tend alors vers zéro quand $|n|$ tend vers $+\infty$. Comme la suite $(n\,c_n)$ ne tend visiblement pas vers zéro quand $|n|$ tend vers $+\infty$, la réponse à la troisième question est négative.