

Ce texte constitue un compte rendu des séances d'interrogations orales pour le concours de l'agrégation interne 2017 auxquelles j'ai assisté, assorti de quelques commentaires personnels. J'avais déjà rédigé un texte similaire l'an passé et certains passages dans les commentaires généraux en sont largement repris, étant donné que le contenu de ces passages me semble toujours d'actualité.

J'ai assisté aux oraux du concours 2017 pendant trois demi-journées. J'ai vu en tout huit interrogations orales, cinq pour l'épreuve d'exposé et trois pour l'épreuve d'exercices. Il y a dix jurys (repérés par des lettres de A à J) et j'ai choisi les oraux auxquels j'assistais non pas en fonction des couplages mais dans l'idée de voir le plus grand nombre de jurys possible et j'ai vu au final huit jurys différents.

Il est bien entendu que le présent texte n'engage que son auteur, et en aucun cas le jury du concours ; par ailleurs je n'ai sans doute pas assisté à assez de séances pour garantir que les impressions dont je fais part ci-dessous aient valeur de « règle générale » pour le déroulement des épreuves orales ; il convient donc de les prendre avec toute la prudence nécessaire.

1. Commentaires généraux

1.1. Quelques notes sur le déroulement des oraux. —

1.1.1. Lors de la présentation de l'exposé ou de la liste d'exercices, tout comme lors de la présentation du développement, le jury, a priori, n'intervient pas. Cette règle n'est pas absolue mais elle m'a semblé largement respectée en général. Ceci étant dit, le jury peut intervenir en particulier :

- pour proposer au candidat de jeter un coup d'oeil rapide à ses notes, lorsqu'il est un peu perdu
- pour le rappeler à l'ordre lorsqu'il fait mine de consulter ses notes lors de son développement, sans que le jury ne l'y ait préalablement autorisé (vu plusieurs fois, le jury semble très attentif sur ce point)
- pour lui signaler que le temps maximum imparti est bientôt écoulé

1.1.2. Le jury est *toujours* bienveillant. Indépendamment des jurys que j'ai vus, les questions n'ont *jamais* pour but de déstabiliser ou de piéger le candidat, mais sont toujours destinées à lui permettre d'exprimer au mieux ses connaissances mathématiques. J'ai trouvé cette année encore absolument remarquable la constance avec laquelle les différents membres du jury s'attachaient à choisir leurs questions dans cette optique (bien sûr, j'ai pu relever quelques exceptions sporadiques, mais cela reste vraiment anecdotique). Même lors d'interrogations orales où le candidat est en grande difficulté, les membres du jury gardent leur calme, cherchent toujours à poser sur un ton apaisé les questions les plus adaptées au niveau de la prestation du candidat, et essaient en outre toujours de l'« emmener un peu plus haut » si possible. Là encore, des exceptions doivent pouvoir se produire, mais de manière anecdotique. Comme l'an dernier, j'ai vu à une seule reprise un membre du jury s'énerver un peu lors d'un oral,

mais très brièvement, et il faut dire que l'attitude du candidat en face de lui était particulièrement crispante (nonchalant jusqu'à l'extrême et semblant « prendre de haut » toutes les questions du jury ; il va de soi qu'une telle attitude est à proscrire absolument...).

1.1.3. Comme corollaire de ce qui précède, je pense qu'il est très important pour les candidats d'écouter *très attentivement* les questions et remarques du jury. J'ai vu comme l'an dernier un certain nombre de candidats en difficulté notamment parce qu'ils restaient fixés sur une certaine idée non pertinente, alors que le jury essayait de les ramener dans le droit chemin, mais ces candidats n'étaient clairement pas assez attentifs aux perches tendues par le jury.

1.1.4. En termes de « niveau mathématique absolu », la difficulté des questions semble se limiter en général (et c'est déjà beaucoup !) à contrôler la maîtrise « de base » des différents points du programme reliés à l'exposé ou à la liste d'exercices proposés, autrement dit à vérifier la capacité du candidat à utiliser avec assurance et à bon escient les résultats et outils principaux mis en jeu dans des situations « d'application directe ». Notamment les questions me semblaient très rarement pouvoir être qualifiées de véritablement « subtiles ». Ce commentaire englobe en particulier les exercices que le jury demande au candidat de résoudre (en général en fin d'interrogation). J'insiste sur le fait qu'il n'y a aucune connotation péjorative envers les candidats et le niveau du concours dans ce qui précède : savoir répondre sans difficulté à ces exigences de base est déjà remarquable et démontre une solide maîtrise de mathématiques pas du tout triviales.

Je remarque aussi que lors de l'épreuve d'exposé le jury ne semble pas poser très souvent des questions de la forme « Comment démontre-t-on tel résultat énoncé dans votre plan ? ». Cette année c'est arrivé à deux reprises mais à chaque fois, le candidat avait plus ou moins des difficultés à répondre et le jury n'a pas du tout insisté (et une fois, un membre du jury a dit « Ce n'est pas grave, ce résultat n'est de toute façon pas le développement que vous proposiez »). Une autre fois aussi cette année j'ai vu le jury demander au candidat pourquoi dans son plan tel résultat figurait juste avant tel autre. La réponse était basiquement « parce que la démonstration du deuxième résultat utilise le premier résultat », mais le candidat n'a pas su répondre ; il faut dire que le plan du candidat en question consistait en une longue litanie de résultats divers avec un découpage en au moins dix sections, sans aucune structuration ni mise en perspective un tant soit peu globales, ce qui explique sans doute que le candidat se soit attiré ce genre de question. Mais de manière générale, et peut-être plus que l'an dernier, j'ai eu l'impression que le jury n'avait pas vraiment tendance à poser des questions relatives au plan proposé lors de l'épreuve d'exposé.

1.1.5. Quelque chose qui m'a plus frappé cette année que l'an dernier : même si le candidat parvient souvent à mener son développement jusqu'au bout, d'une manière mathématiquement correcte et sans l'aide de ses notes, souvent également la présentation est extrêmement peu claire et difficile à suivre. Je suis intimement persuadé que cela peut faire baisser la note d'oral dans des proportions assez considérables (n'oublions pas qu'il s'agit quand même d'un concours d'enseignants!).

Pour éviter ce travers, je conseille de solliciter autant que faire se peut, lors de la préparation au concours, des « cobayes » pour tester ses développements, lesquels pourront donner leur opinion sur la clarté des exposés proposés. Également, il me semble pertinent de parfois limiter un peu (pas trop non plus...) ses ambitions en ce qui concerne le niveau des développements proposés. Même si l'on a compris un développement « difficile », cela ne garantit pas que l'on saura le présenter de manière « convaincante » le jour de l'oral (sans compter qu'un développement difficile risque plus facilement de ne pas pouvoir être terminé dans les temps). Un développement un peu plus modeste sera plus facile à « défendre » oralement, et la qualité induite de la prestation orale aura je pense une influence extrêmement bénéfique sur la note finale qui pourra largement rattraper le fait qu'on n'a pas choisi le développement le plus dur qu'on savait faire. Enfin, on peut également conseiller de prévoir au tout début du développement une forme de plan de l'intervention (mettant en avant l'architecture de la démonstration et les idées essentielles). Cela clarifie souvent l'exposé et oblige à un effort de pédagogie.

1.1.6. L'an dernier, j'avais noté ce qui suit :

J'ai vu un certain nombre de candidats mener (plutôt bien d'ailleurs) des calculs au tableau, parfois un peu longs et pas toujours évidents, pas seulement pendant les développements mais aussi à l'occasion de questions posée par le jury. J'ai l'impression que dans ce dernier cas de figure le jury tient en général à ce que les calculs soient menés jusqu'au bout ; il n'hésite pas à assister avec bienveillance le candidat lorsque celui ci fait de petites erreurs de calcul pas toujours évidentes à repérer lorsqu'on est au tableau, mais semble attendre quoi qu'il en soit une certaine aisance calculatoire de la part des candidats.

Cette année cela m'a beaucoup moins frappé, mais c'était peut-être que les sujets des interrogations auxquelles j'ai assisté s'y prêtaient moins.

1.1.7. En ce qui concerne l'utilisation de l'outil informatique, j'ai vu un candidat (sur huit donc) proposer une illustration sur machine ; ce qu'il a proposé visait surtout à pallier le fait qu'il n'avait visiblement aucun développement consistant à proposer pour la leçon choisie (même si ce n'était bien sûr pas présenté comme ça). Il est clair que cela n'a pas suffi à remonter la note de son oral.

1.2. Détails pratiques pour les auditeurs. — Naturellement, rien ne garantit que ce qui suit sera encore valable l'an prochain.

1.2.1. Officiellement, il faut être présent 15 minutes avant le début de l'oral, mais dans la pratique être là cinq minutes avant (voire moins) est très largement suffisant. Comme les jurys respectent scrupuleusement la durée des interrogations orales, ceci permet aux auditeurs d'enchaîner les oraux successifs sans aucun problème.

1.2.2. Environ une dizaine de minutes avant le début d'un oral, les tirages sont vidéoprojetés dans une salle proche ; pour chaque tirage est indiqué la lettre du jury correspondant (mais pas le nom du candidat correspondant) ; cette année, la prise de notes et de photographies semble autorisée dans cette salle. Ensuite, environ une-deux minutes avant le début des oraux les auditeurs sont autorisés à accéder au couloir

où se trouvent les portes des salles d'interrogation et se placent devant la porte du jury qu'ils souhaitent ; le nombre d'auditeurs est cependant limité à six par salle ; les candidats sont alors amenés par les appariteurs. Dès leur entrée dans la salle à la suite du candidat, les auditeurs doivent laisser sacs, vestes, portables... sur une table à côté de l'entrée, et le jury ne manque pas de le leur rappeler poliment mais fermement. Notamment, pendant tout l'oral, la prise de notes est interdite ; dès la fin de l'oral les auditeurs retournent à l'accueil (et ont donc le temps d'aller voir les tirages de la session suivante, puis d'y assister).

1.2.3. Si pour une raison ou une autre on souhaite suivre l'oral d'un candidat particulier, il y a toujours la possibilité de repérer l'endroit d'où arrivent les candidats juste avant le début de l'oral et de suivre « son » candidat jusqu'à la porte de son jury ; bien sûr, s'il y a déjà six auditeurs à attendre pour suivre cet oral en particulier, on ne pourra pas rentrer. Par ailleurs s'il s'agit du second oral du candidat et qu'on connaît la lettre du jury de son premier oral, il semble qu'un candidat qui passe avec le jury A le premier jour passe avec le jury B le second jour, et inversement, pareil pour C et D, etc...

2. Quelques notes sur les oraux auxquels j'ai assistés

Je rappelle qu'il est interdit de prendre des notes au cours de l'oral lui-même. J'ai donc pris des notes de mémoire après chaque oral. J'ai malheureusement rarement noté le couplage proposé au candidat. Lorsque c'est le cas, j'indique le sujet choisi par le candidat **en gras**.

Je retranscris dans ce qui suit essentiellement une brève description du développement proposé et les questions du jury ; je ne retranscris les réponses du candidat que lorsqu'elles me semblent importantes pour comprendre l'orientation des questions du jury. Il est à noter que pour l'épreuve orale d'exercices, les auditeurs, contrairement au jury, ne disposent pas des énoncés écrits et il n'est pas toujours évident pour eux de reconstituer l'énoncé d'un exercice traité par le candidat.

Je donne en italique quelques commentaires personnels. Tout comme le reste de ce texte, ils n'engagent que moi.

2.1. Oral 1. — Algorithme d'Euclide. Calcul de PGCD et de coefficients de Bézout. Applications.

Développement : si n et m premiers entre eux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/nm\mathbf{Z}$ (en construisant un morphisme injectif puis en comparant les cardinaux)

Q : développer un peu la partie sur les polynômes (*c'était mis en ouverture à la fin dans le plan du candidat*)

Q : dans $\mathbf{K}[X]$ comment montrer qu'il existe D tel que $\langle A \rangle + \langle B \rangle = \langle D \rangle$?

R : tout idéal est engendré par un élément.

Q : comment on le démontre ?

R : de la même façon que dans \mathbf{Z} (division euclidienne)

Q : Application de Bézout pour les polynômes ?

R : Algèbre linéaire, lemme des noyaux

Q : énoncé du lemme des noyaux ?

Q : comment définiriez vous le pgcd de trois entiers ? trois polynômes ? que signifierait alors premiers entre eux dans leur ensemble ?

Exo : montrer que si $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2

Indication du jury : montrer la contraposée

Indication du jury : utiliser l'identité remarquable pour $X^q + 1$, q impair

2.2. Oral 2. — Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

Développement : $D_n(\mathbf{C})$ (matrices diagonalisables) est dense dans $M_n(\mathbf{C})$ puis : si (u_n) est une suite d'application linéaire tq pour tout n et tout x on a $\|u_n(x)\| \leq \|x\|$ (*) alors il existe une suite extraite de (u_n) qui converge simplement.

Q : pourquoi $\sup\|u(x)\|/\|x\|$ est bien définie ?

R : grâce à (*)

Q : OK pour u qui vérifie (*) mais pour u quelconque ?

Q : la dimension finie est importante dans tout ça ?

Q : démonstration de Bolzano Weierstrass ? (*résultat figurant dans le plan*)

Exo : expression explicite d'une suite définie par une récurrence linéaire triple

Q : (*le candidat étant parvenu à écrire la relation de récurrence sous forme matricielle*) comment calculeriez vous les puissances de la matrice A ?

2.3. Oral 3. — Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.

ou

Coniques.

Développement : Dunford (en montrant que d et n sont des polynômes en l'endomorphisme de départ)

Q : Dunford sur \mathbf{R} ?

Q : Comment démontrer Cayley Hamilton ? (*résultat du plan*)

Q : vous avez parlé de l'« unique générateur » (d'un idéal de polynômes). Il est vraiment unique ?

Exo : Le corps de base est \mathbf{C} . Montrer qu'une matrice A est diagonalisable ssi A^2 est diagonalisable et $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^2)$.

2.4. Oral 4. — Illustrer différents usages des matrices inversibles.

ou

Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout.

Développement : Décomposition polaire dans $M_n(\mathbf{R})$ en admettant la décomposition polaire dans $GL_n(\mathbf{R})$ et en commençant par montrer que $O_n(\mathbf{R})$ est compact

Q : comment définissez vous la norme 2 sur $M_n(\mathbf{R})$ à partir de la norme 2 sur \mathbf{R}^n ? (le jury voulait vérifier que le candidat savait bien définir la norme subordonnée)

Q : unicité de la déc polaire ?

R : sur $GL_n(\mathbf{R})$ oui

Q : et en général ?

Q : vous avez dit dans votre démonstration « $O_n(\mathbf{R})$ est fermé car c'est l'image réciproque du fermé $\{1, -1\}$ par l'application déterminant qui est continue, êtes vous sûr que le raisonnement soit correct ? (Notez qu'en fait ce raisonnement montre que $O_n(\mathbf{R})$ est fermé dans $O_n(\mathbf{R})$, ce qui n'a guère d'intérêt)

Q : Que peut-on dire de la topologie de $S_n^{++}(\mathbf{R})$ (ensemble des matrices symétriques réelles définies positives) ? ouvert ? fermé ? Quelle est son adhérence ?

Q : comment on démontre la décomposition polaire dans $GL_n(\mathbf{R})$? (rappelons que l'exercice proposé par le candidat admettait ce résultat)

Q : (au cours de la démo) expression du produit scalaire en termes matriciels ?

Q : (sur un autre exo de la liste du candidat, visiblement sur les matrices compagnons mais que je n'ai pas réussi à reconstituer) le polynôme caractéristique est annulateur ? c'est quel théorème ? l'ensemble des polynômes annulateur c'est quoi ? Indication : ce n'est pas un sous-anneau, c'est un...

2.5. Oral 5. — Comparaison, sur des exemples, de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions.

Développement : sur la suite de fonctions $\{u_n: x \mapsto x/(n^2 + x^2)\}$; $\sum u_n(x)$ ne converge pas uniformément sur \mathbf{R}^+ , mais pourtant sa somme est continue, $\sum (-1)u_n(x)$ ne converge pas normalement sur \mathbf{R}^+ , mais elle converge uniformément.

Q : énoncer le critère de Cauchy uniforme ? (utilisé dans le développement d'une manière un peu « floue »)

Q : comment définissez vous la norme infinie de u_n restreinte à $[0, M]$? (réponse attendue : continue sur un compact)

Exo : Montrer que $\sum \sin(nx)/n$ converge simplement en tout x

Q : pourquoi c'est vrai en $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$?

Q : Connaissez vous le critère d'Abel ?

Q : Connaissez vous un théorème d'interversion de limite et intégrale ?

R : ... (pas vraiment de réponse convaincante)

Q : Pouvez vous énoncer le théorème de convergence dominée ?

2.6. Oral 6. — Exemples de développement d'une fonction en série entière. Applications.

Développement : solutions développables en séries entières de $xy'' - (x-2)y' - 2y = 0$

Q : vous avez montré que toute solution DSE de l'équation est de la forme bla bla, mais réciproquement ?

Q : Avez vous trouvé toutes les solutions de l'équation? *sous-entendu : « et pas uniquement celles développables en séries entières », même si le jury ne l'a pas précisé explicitement au début, pour voir si le candidat avait conscience du problème*

Q : Vous avez parlé au cours de votre développement de l'unicité des coefficients d'un développement en série entière ; pourquoi ces coefficients sont-ils uniques ?

R : d'après la formule $a_n = f^{(n)}(0)/n!$

Q : Oui, mais alors pourquoi a_n est égal à ça ?

Exo : rayon de convergence de $\sum x^{n^2}$?

Q : précisez la définition de tel objet dans l'énoncé écrit au tableau (*quelque chose que le candidat avait écrit au cours de sa présentation des exercices*)

2.7. Oral 7. — Exercices faisant intervenir les nombres premiers.

Développement : si p est premier, \mathbf{F}_p^\times est cyclique

Beaucoup de questions sur le développement, pas clair du tout

Q : lien logique entre les deux énoncés de Fermat (p un nombre premier donné)

(1) pour tout a de \mathbf{Z} , $a^p = a[p]$

(2) pour tout a de $\mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z}$, $a^{p-1} = 1[p]$

R : (1) entraîne (2)

Q : réciproquement ? (*Le candidat n'était pas très à l'aise sur ces questions ; au passage les énoncés de son plan n'étaient pas aussi bien quantifiés que ceux donnés ci-dessus, et un membre du jury a – fort pertinemment ! – souligné qu'il fallait commencer par les quantifier correctement avant de pouvoir raisonner*)

Q : montrer que $X^2 + X + 2$ est irréductible avec Eisenstein

Q : indication : X remplacé par $X + 3$

Q : Comment en déduit on que le polynôme originel est irréductible ?

Q : Donner un exemple de polynôme réductible, sans racines ? (*le candidat avait parlé de l'absence de racines pour justifier l'irréductibilité de $X^2 + X + 2$*)

2.8. Oral 8. — Loi normale en probabilités et statistique.

ou

Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants. Exemples.

Développement : quelques illustrations graphiques par ordinateur sur la loi normale (*en fait le candidat n'avait visiblement aucun vrai développement à proposer*)

Q : Comment on voit la moyenne d'une loi normale sur le graphe de la fonction de densité ?

Q : Expliquer le lien entre le TCL et Moivre Laplace ? (*cité comme cas particulier du TCL par le candidat*)

Q : (le candidat ayant énoncé : si X, Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$) et si X, Y quelconques ?

Exo : soit X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ quelle est la loi de X^2 ?

Q : (le candidat avait dit : il suffit de trouver l'espérance et l'écart type) Pourquoi est-il clair que X^2 ne suit pas une loi normale ?

Q : Quel est le lien entre la fonction de répartition et la densité ?
