Compte rendu et commentaires sur les oraux d'agrégation interne

J'ai assisté aux oraux du concours 2016 pendant quatre demi-journées. J'ai vu en tout dix interrogations orales. Il y a dix jurys (repérés par des lettres de A à J) et j'ai choisi les oraux auxquels j'assistais non pas en fonction des couplages mais dans l'idée de voir le plus grand nombre de jurys possible ; au final j'ai vu neuf jurys différents. En raisons du calendrier et de mes propres contraintes, j'ai majoritairement assisté à des oraux de l'épreuve d'exercices.

Il est bien entendu que le présent texte n'engage que son auteur, et en aucun cas le jury du concours.

1. Commentaires généraux

1.1. Quelques notes sur le déroulement des oraux. —

1.1.1. Lors de la présentation de l'exposé ou de la liste d'exercices, tout comme lors de la présentation du développement, le jury, a priori, n'intervient pas. Cette règle n'est pas absolue mais elle m'a semblée largement respectée en général. Ceci étant dit, le jury peut intervenir en particulier :
-pour proposer au candidat de jeter un coup d'oeil rapide à ses notes, lorsqu'il est un peu perdu
-pour le rappeler à l'ordre lorsqu'il fait mine de consulter ses notes lors de son développement, sans que le jury ne l'y ait préalablement autorisé (vu plusieurs fois, le jury semble très attentif sur ce point)

1.1.2. Le jury est *toujours* bienveillant. Indépendamment des jurys que j'ai vus, les questions n'ont *jamais* pour but de déstabiliser ou de piéger le candidat, mais sont toujours destinées à lui permettre d'exprimer au mieux ses connaissances mathématiques. J'ai trouvé absolument remarquable la constance avec laquelle les différents membres du jury s'attachaient à choisir leurs questions dans cette optique (bien sûr, j'ai pu relever quelques exceptions sporadiques, mais cela reste vraiment anecdotique) Même lors d'interrogations orales où le candidat est en grande difficulté, les membres du jury gardent leur calme, cherchent toujours à poser sur un ton apaisé les questions les plus adaptées au niveau du candidat, et essaient en outre toujours de l'« emmener un peu plus haut » si possible. Là encore, des exceptions doivent pouvoir se produire, mais de manière anecdotique (j'ai vu un membre du jury s'énerver – et encore pas beaucoup – lors d'un oral, mais cela a été très bref et ne lui est arrivé qu'une fois au cours de l'oral en question).

1.1.3. Comme corollaire de ce qui précède, je pense qu'il est très important pour les candidats d'écouter attentivement les questions et remarques du jury. J'ai vu un certain nombre de candidats en difficulté notamment parce qu'ils restaient fixés sur une certaine idée non pertinente, alors que le jury essayait de les ramener dans le droit chemin, mais ces candidats n'étaient clairement pas assez attentifs aux perches tendues par le jury.

1.1.4. En termes de « niveau mathématique absolu », la difficulté des questions semble se limiter en général (et c'est déjà beaucoup !) à contrôler la maîtrise « de base » des différents points du programme reliés à l'exposé ou à la liste d'exercices proposés, autrement dit à vérifier la capacité du candidat à utiliser avec assurance et à bon escient les résultats et outils principaux mis en jeu dans des situations « d'application directe ». Notamment les questions me semblaient très rarement pouvoir être qualifiées de véritablement « subtiles ». Ceci semble valoir même pour les très bonnes prestations (j'ai vu l'oral de quelqu'un qui a terminé dans les vingt premières places du classement) J'insiste sur le fait qu'il n'y a aucune connotation péjorative envers les candidats et le niveau du concours dans ce qui précède : savoir répondre sans difficulté à ces exigences de base est remarquable et démontre une solide maîtrise de mathématiques pas du tout triviales.

1.1.5. Par ailleurs, j'ai vu un certain nombre de candidats mener (plutôt bien d'ailleurs) des calculs au tableau, parfois un peu longs et pas toujours évidents, pas seulement pendant les développements mais aussi à l'occasion de questions posée par le jury. J'ai l'impression que dans ce dernier cas de figure le jury tient en général à ce que les calculs soient menés jusqu'au bout ; il n'hésite pas à assister avec bienveillance le candidat lorsque celui ci fait de petites erreurs de calcul pas toujours évidentes à repérer lorsqu'on est au tableau, mais semble attendre quoi qu'il en soit une certaine aisance calculatoire de la part des candidats.

1.1.6. En ce qui concerne l'utilisation de l'outil informatique, j'ai vu un candidat (sur dix donc) proposer une illustration sur machine ; pour autant que je puisse en juger, ce qu'il a proposé n'était pas forcément très pertinent, ni très bien motivé, et je ne suis pas sûr que cela lui ait été très bénéfique en termes de la note obtenue. Rappelons à ce sujet ce que dit le rapport 2015 (je cite un des passages du rapport où la question est abordée, il y en a d'autres) : *Lors de la session 2015, l'usage des logiciels est encore demeuré trop modeste, malgré les attentes explicitement exprimées dans le précédent rapport. Le jury le regrette profondément. Il attire à nouveau l'attention des candidats sur le fait que certains sujets se prêtent particulièrement bien à l'utilisation de l'outil informatique. Lors de la session 2016, le jury attendra un usage beaucoup plus systématique de celui-ci, et il en tiendra compte dans son évaluation.*

1.2. Détails pratiques pour les auditeurs. — Naturellement, rien ne garantit que ce qui suit sera encore valable l'an prochain.

1.2.1. Officiellement, il faut être présent 15 minutes avant le début de l'oral, mais dans la pratique être là cinq minutes avant est très largement suffisant. Comme les jurys respectent scrupuleusement la durée des interrogations orales, ceci permet aux auditeurs d'enchaîner les oraux successifs sans aucun problème.

1.2.2. Environ une dizaine de minutes avant le début d'un oral, les tirages sont vidéoprojetés dans une salle proche ; pour chaque tirage d'un candidat est indiqué la lettre du jury correspondant (mais pas le nom du candidat) ; officiellement la prise de notes est interdite dans cette salle ; ensuite environ une-deux minutes avant le début des oraux les auditeurs sont autorisés à accéder au couloir où se trouvent les portes des salles d'interrogation et se placent devant la porte du jury qu'ils souhaitent ; le nombre d'auditeurs est cependant limité à 6 par salle ; les candidats sont ensuite amenés par les appariteurs. Aussitôt entrés dans la salle, les auditeurs sont censés laisser sacs, vestes, portables.... sur une table à côté de l'entrée ; pendant tout l'oral la prise de notes est là encore interdite ; dès la fin de l'oral les auditeurs retournent à l'acceuil (et ont le temps d'aller voir les tirages de la session suivante, puis d'y assister)

1.2.3. Si pour une raison ou une autre on souhaite suivre l'oral d'un candidat particulier, il y a toujours la possibilité de repérer l'endroit d'où arrivent les candidats juste avant le début de l'oral et de suivre « son » candidat jusqu'à la porte de son jury ; bien sûr, s'il y a déjà 6 auditeurs à attendre pour suivre cet oral en particulier, on ne pourra pas rentrer. Par ailleurs s'il s'agit du second oral du candidat et qu'on connaît la lettre du jury de son premier oral, il semble qu'un candidat qui passe avec le jury A le premier jour passe avec le jury B le second jour, et inversement, pareil pour C et D, etc...

2. Quelques notes sur les oraux auxquels j'ai assistés

Je rappelle qu'il est interdit de prendre des notes au cours de l'oral lui-même. J'ai donc pris des notes de mémoire après chaque oral. Je n'ai pas toujours noté le couplage proposé au candidat. J'indique le sujet choisi par le candidat **en gras**.

Je retranscris dans ce qui suit essentiellement les questions du jury ; je ne retranscris les réponses du candidat que lorsqu'elles me semblent importantes pour comprendre l'orientation des questions du jury. Il est à noter que pour l'épreuve orale d'exercices, les auditeurs contrairement au jury ne disposent pas des énoncés écrits et ainsi il n'est pas toujours évident pour les auditeurs de reconstituer l'énoncé d'un exercice traité par le candidat.

Je donne en italique quelques commentaires personnels. Tout comme le reste de ce texte, ils n'engagent que moi.

2.1. Oral 1. —
Exercices faisant intervenir des automorphismes orthogonaux.
ou
? ?

Développement : exercice sur les sous-groupes fini de $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ et $O_2(\mathbf{R})$

Q : pour G un sous-groupe fini de $O_2(\mathbf{R})$ non inclus dans $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$, la candidate, pour montrer que G était de cardinal pair, avait introduit $G^+ := G \cap \mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ et $G^- = G \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ et choisissant un élément s de G^- avait affirmé que $f \mapsto s \circ f$ était une bijection de G^+ sur G^- ; le jury lui demande de justifier cette assertion
Q : que peut-on dire de s^2 (même notation que précédemment) ? qu'en déduit-on en appliquant le théorème de Lagrange ?
(le jury avait en tête : preuve plus courte du fait que le cardinal de G est pair ; cependant la démonstration de ce fait proposée par le candidat à l'aide de la bijection ci-dessus n'est rien d'autre que la démonstration du théorème de Lagrange dans ce cas particulier)

Q : traiter l'exercice sur la CNS pour que deux retournements de $\mathbf{R}^3$ commutent
Q : donner dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ la matrice de la rotation d'axe engendré par (1,1,1) et d'angle $2\pi/3$
(la candidate donne la matrice de la rotation dans une base orthonormée adaptée puis construit un système orthogonal de vecteurs dont le premier membre est $(1,1,1)$*)*
Q : la matrice de passage obtenue est-elle orthogonale ?
(hésitation de la candidate)
Q : comment caractériser en termes de ses vecteurs colonnes une matrice orthogonale ?

2.2. Oral 2. —
Exemples d'utilisation de développements limités de fonctions d'une ou plusieurs variables.
ou
Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes (longueur, courbure...).

Q : trouver les branches asymptotiques de $\sqrt{x^2+x+1}$ en $+\infty$
Q : forme générale du dvpt limité en $(0,0)$ de $f\colon \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ de classe C^2 ? à quoi ça sert ? comment vous en serviriez vous pour étudier les extremas de $x^4+y^4-(x-y)^2$?

2.3. Oral 3. —
Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications.
ou
Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence. Applications.

Développement Convergence de la méthode de Newton pour f de classe C^2 sur un segment $[a,b]$, avec $f(a)f(b)<0$ et f' qui ne s'annule pas

Q : un tel algorithme est utilisé depuis très longtemps pour calculer $\sqrt{2}$; dans ce cas précis combien faut-il d'itérations pour avoir 10 décimales exactes ?
Q : vous avez dit lors de votre développement « f ne s'annule pas donc f' garde un signe constant » ; quelle hypothèse vous permet de tirer cette conclusion ?
Q : que donne les formules de Taylor que vous avez écrites dans votre plan à l'ordre minimal ?
Q : les formules de Taylor que vous avez écrites s'étendent elles à des fonctions $f\colon \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}^2$?
Q : dans votre plan, l'hypothèse de Taylor-Lagrange (C^n, $n+1$ fois dérivable) est plus faible que le Taylor avec reste intégral (C^{n+1}) ; est-ce vraiment strictement plus faible ? Pouvez vous exhiber une fonction dérivable mais qui n'est pas de classe C^1 ? Pouvez vous montrer que f qui envoie $x \neq 0$ sur $x^2\cos(1/x^2)$ et 0 sur 0 vérifie ces conditions ? *(après le calcul de f' par la candidate)* Pourquoi dans ce cas là $f'(x)$ ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers 0 ?

2.4. Oral 4. —
Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence

des normes. Applications.
ou
? ?

Développement en dimension finie toutes les normes sont équivalentes

(pas mal de questions sur le développement, pas vraiment clair)
Q : pourquoi l'inégalité $N(x) - N(y) \leqslant N(x - y)$ montre-t-elle que N est continue ?
Q : Si N est continue pour la distance définie N' et N' est continue pour la distance définie N, N et N' sont elles équivalentes ? *(bien sûr la question n'a d'intérêt qu'en dimension infinie ; dans son exposé, le candidat avait cité la caractérisation générale des applications linéaires continues entre evn, qui peut être utilisée pour répondre à la question)*
Q : Considérons une suite de polynomes de degré borné qui converge simplement. Montrer qu'elle converge uniformément. *(le candidat ne voit pas)* Indication : utilisez l'équivalences des normes en dimension finie.
Q : pour l'équivalence de N_i et N_j dans $\mathbf{R}^n$, $i, j \in \{1, 2, \infty\}$, quelles sont les constantes optimales dans l'inégalité exprimant l'équivalence ?
Q : pour deux normes quelconque N_1 et N_2, peut on trouver de telles constantes optimales ? *(question bizarrement formulée ; je ne sais pas si le jury demandait si les constantes optimales existaient toujours, ou bien s'il demandait comment, en un sens, les calculer ; sans doute plutôt la deuxième interprétation, qui est très reliée au développement présenté par le candidat)*

2.5. Oral 5. —
Exercices illustrant l'utilisation de déterminants
ou
Exemples de méthodes de chiffrement ou de codage

développement un exo qui faisait intervenir des discriminants et des Vandermonde

Le candidat avait écrit dans son développement $det_{\mathcal{B}}(B)$ *où* $\mathcal{B}$ *est une base et* B *une matrice. Le jury a passé un temps non négligeable pendant les questions à essayer de lui faire dire/comprendre que ça n'avait pas de sens afin qu'il puisse corriger sa démonstration. En fait, dès le départ, un membre du jury lui a dit clairement que le déterminant d'une matrice était quelque chose d'intrinsèque, qui ne dépendait pas d'une base. Typiquement, ce candidat n'a pas su assez tirer bénéfice des questions et remarques du jury.*
Q : calculer $\mathrm{Inf}_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \sqrt{\int_0^1 (t^3 - a\,t - b)^2 dt}$ *(un exo de la feuille du candidat portait sur Gram Schmidt)*

2.6. Oral 6. —
Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une ou plusieurs variables réelles.
ou

Exemples d'applications des transformées de Fourier et Laplace.

Développement extrema et allure des lignes de niveau pour $x^2 + y^4$, $x^2 + y^3$, $x^2 - y^2 + y^4/2$
rq : le candidat trace l'allure des lignes de niveau mais et c'est dommage ne fait pas le lien avec l'allure de la nappe paramétrée au voisinage des points critiques

Q : vérifier le calcul des dérivées secondes pour $x^2 + y^3$ *(le candidat s'était trompé)* le résultat final est-il si surprenant ? écrivez le dvpt de Taylor général à l'ordre 2
Q : vous avez dit une condition nécessaire pour être un extremum est d'être un point critique ; est-ce vrai en général si le domaine de la fonction n'est pas $\mathbf{R}^2$? condition suffisante sur le domaine pour que ce soit vrai ?
R : être ouvert
Q : et si le domaine n'est pas ouvert, par exemple s'il est fermé ? y a-t-il des conditions qui assurent l'existence d'extrema ?

2.7. Oral 7. — Exemples d'équations fonctionnelles.
ou
Comparaison, sur des exemples, de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonc- tions.

Développement : nombres de Catalan via développement en série entière

Q : vous avez affirmé lors de votre dvpt que $(1+t)^{1/2}$ a un développement en série entière de rayon de convergence 1 ; pouvez vous justifier cette assertion ?
Q : trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ qui vérifient $\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = f(1-x)$
Au cours de la résolution, question sur la structure des solutions de $y'' + y = 0$ Pourquoi $\{\cos, \sin\}$ est une famille libre ? Formules pour $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$?

2.8. Oral 8. —
Exercices illustrant l'utilisation de vecteurs propres et valeurs propres dans des domaines variés
ou
Exercices utilisant les permutations d'un ensemble fini

Développement : calcul d'une racine carrée explicite d'une certaine matrice symétrique réelle A de taille 3 (les valeurs propres étaient $0, 1, 16$)

Q : unicité de B telle que $B^2 = A$? combien au moins y a-t-il de solutions ?
Q : unicité de B symétrique positive telle que $B^2 = A$? (*)
Q : résolvez l'exo numéro tant de votre liste *(un système différentiel du premier ordre en (x(t),y(t)) à coefficients constant avec second membre)*
Q : quelle est la forme générale des solutions de l'équation $X'(t) = A.X(t)$, A à coefficients constant ?

Q :Comment calculer rapidement $\exp(tA)$ dans le cas de votre matrice A ?
(ici A vérifiait $A^2 = I$)
Q :Et maintenant qu'on a la solution de l'équation sans second membre, comment trouver la solution de l'équation avec second membre ?
Q : Retour sur (*) avec indication : soit β une valeur propre de B, lien entre β et les valeurs propres de A ? Si $\{\beta_i\}$ est la liste des valeurs propres de B, que vaut $\oplus \operatorname{Ker}(B - \beta_i I)$? Lien entre $\operatorname{Ker}(B - \beta_i I)$ et $\operatorname{Ker}(A - \beta_i^2 I)$? Comment conclure ?

2.9. Oral 9. —
Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM et mettant en oeuvre des algorithmes associés.
ou
? ?

Le candidat présente notamment une illustration informatique : pour autant que je comprenne, il s'agissait de l'algorithme d'Euclide sur un tableur ; mais c'était rapidement présenté et pas très clair

Q : montrer $pgcd(a, b) = 1$ ssi pour tout nombre premier p on a $\mathrm{Min}(v_p(a), v_p(b)) = 0$
($v_p(a)$ est l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de a)
Q : vous avez parlé de « suite des nombres premiers » ; pourquoi est-ce bien une suite ?
R : si p est premier $p! + 1$ est encore premier
(le jury guide alors le candidat dans la démonstration de l'infinitude des nombres premiers)
Q : quelle relation entre $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/b\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/\operatorname{pgcd}(a, b)\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/\operatorname{ppcm}(a, b)\mathbf{Z}$? *(le candidat avait écrit les deux l'un en dessous de l'autre au tableau)*
R :isomorphisme
Q :pour quelle structure ?
R : ce sont tous des corps, donc pour la structure de corps
Q : $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ est toujours un corps ? déterminer les éléments inversibles de $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$.
Q :trouver le reste de la division de $x^{2016} - 1$ par $x^{50} - 1$

2.10. Oral 10. — Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés de la somme. Exemples
ou
Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications

Développement Série de Fourier de f définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$, en déduire $\sum 1/n^2$

Q : Comment calculer $\sum 1/n^4$? à partir du résultat de votre exercice et d'un résultat de votre leçon ?
R : Parseval
Q : Allez y, faites le calcul
Q : vous avez écrit l'égalité entre f et sa série de Fourier. Peut on intégrer cette égalité

entre 0 et $\pi/2$ en intervertissant série et intégrale ?
R : d'après Dirichlet, il y a convergence normale donc oui
Q : la convergence normale peut elle se voir directement sur la série que vous avez calculée ?
Q : allez-y, intégrez entre 0 et $\pi/2$ le développement en série de Fourier de f. Qu'obtenez vous ?
(on obtient la somme de la série $\sum(-1)^n/(2n+1)^3$*) ; les questions qui précèdent complètent utilement le développement proposé par le candidat, qui était sans doute jugé un peu léger)*
Q : connaissez vous d'autres résultats de convergence d'une fonction vers sa série de Fourier ? notamment qui s'expriment à l'aide d'une norme ?
(La convergence normale, évoquée dans la leçon du candidat, est déjà une convergence pour une norme, mais le jury attendait plutôt la norme $\mathbf{L}^2$ *comme réponse)*
Q :soient f et g continues telles que $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout n. A-t-on $f = g$?