Quelques exercices d'algèbre

Seront traités préférentiellement les exercices dont l'énoncé est encadré.

1 Algèbre générale

1.1 Extension successives de la notion de nombre

1.1.1 Arithmétique de $\mathbb{Z}$

Exercice 1.1 1. *Donner la définition du pgcd et du ppcm dans* $\mathbb{Z}$.

2. *Déterminer le pgcd de* 221 *et de* 136.

Exercice 1.2 1. *Donner la définition de nombre premier dans* $\mathbb{Z}$.

2. *Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.*
3. *Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme* $4k+3$, $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.3 1. *Donner la définition d'un groupe.*

2. *Déterminer tous les sous-groupes de* $\mathbb{Z}$.

Exercice 1.4 *Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel* n, *le reste de la division par* 7 *de l'entier*

$$A_n = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$$

Exercice 1.5 *Soit* p *un nombre premier.*

Montrer que $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.

Exercice 1.6 1. *Enoncer le théorème de Bézout dans* $\mathbb{Z}$.

2. *Calculer l'inverse de* 47 *modulo* 13.

Exercice 1.7 1. *Résoudre, dans* $\mathbb{Z}^2$, *l'équation* $31x + 45y = 3$.

2. *Résoudre, dans* $\mathbb{Z}^2$, *l'équation* $2x^2 + 5y^2 = 1000$.

1.1.2 Corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Exercice 1.8 *Soient* $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ *et* $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ *où* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Montrer que* $\mathbb{U}$ *et* $\mathbb{U}_n$ *sont des sous-groupes de* $\mathbb{C}^*$.
2. *Déterminer tous les sous groupes finis de* $\mathbb{C}^*$.

Exercice 1.9 *Polygônes réguliers constructibles à la règle et au compas*

1. *Construire un triangle équilatéral. Un carré. Un polygône régulier à 12 côtés.*
2. *Un pentagone.*

1.2 Anneaux et corps

1.3 Polynômes et fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif K

Exercice 1.10

1. *Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss.*
2. *Factoriser dans* $\mathbb{C}[X]$ *(resp.* $\mathbb{R}[X]$*) les polynômes suivants :*
   (a) $X^4 - 1$,
   (b) $X^4 + X^2 + 1$,

Exercice 1.11 *Déterminer le pgcd de* $X^a - 1$ *et* $X^b - 1$ *où* a *et* b *sont deux entiers naturels non nuls.*

Exercice 1.12 *Soit l'application*

$$\begin{array}{rcl} \Phi : K[X] & \to & K^K \\ P & \mapsto & (x \mapsto P(x)) \end{array}$$

1. *L'application* Φ *est-elle surjective ?*
2. *L'application* Φ *est-elle injective ?*

Exercice 1.13 *Décrire tous les polynômes irréductibles*

1. *de* $\mathbb{C}[X]$,
2. *de* $\mathbb{R}[X]$,
3. *de degré* ≤ 4 *dans* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 1.14 *Soit* $K \subset \mathbb{C}$. *Déterminer tous les polyômes* $P \in K[X]$ *tels que* P' *divise* P.

2 Algèbre linéaire sur un sous-corps de $\mathbb{C}$

2.1 Espaces vectoriels et algèbres, espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 2.1 1. *Donner des exemples de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.*

2. *Montrer que l'ensemble des fonctions deux fois dérivables $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel t, $y''(t) + e^{t^2} y(t) = 0$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?*

Exercice 2.2 1. *La famille $(x \mapsto e^{nx})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle libre dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?*

2. *Idem pour la famille $(x \mapsto \cos(nx), x \mapsto \sin(nx)))_{n\in\mathbb{N}^*}$?*

Exercice 2.3 *Soit f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E tel que $p \circ p = p$.*
Montrer que $\operatorname{Ker f}$ et $\operatorname{Im f}$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 2.4 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.*
A quelle condition existe t-il un endomorphisme f de E tel que $\operatorname{Ker f} = \operatorname{Im f}$?

2.2 Matrices

Exercice 2.5 *Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ telle que*

$$\forall i, \quad |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

2.3 Systèmes d'équations linéaires et opérations élémentaires

2.4 Déterminants

2.5 Dualité

Exercice 2.6 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n.*

1. *Donner la définition d'une forme linéaire sur E.*
2. *Donner la dimension de E^*, l'espace dual de E.*

Exercice 2.7 *Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$ et $a_0, \ldots, a_n$ des nombres réels distincts. On considère les formes linéaires $\phi_i : P \mapsto P(a_i)$.*

1. *Montrer que $\Phi = (\phi_0, \ldots, \phi_n)$ est une base de E^*.*
2. *Déterminer la base duale de Φ dans E.*

Exercice 2.8 *Formule des trois niveaux.*
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3 et E^* son dual.
Montrer que les formes linéaires $P \mapsto \int_a^b P(t)dt$, $P \mapsto P(a)$, $P \mapsto P(b)$ et $P \mapsto P\left(\frac{a+b}{2}\right)$ sont liées dans E^*.

2.6 Réduction des endomorphismes, cas particulier lorsque le corps est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Exercice 2.9 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n, montrer qu'il existe deux nombres réels α_n et β_n (qu'on pourra expliciter) tels que

$$A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2.$$

2.7 Formes quadratiques

3 Algèbre linéaire euclidienne et hermitienne

3.1 Espaces euclidiens

Exercice 3.1

1. *Donner la définition d'un espace euclidien.*
2. *Donner des exemples d'espaces euclidiens.*

Exercice 3.2 *Soit E un espace euclidien.*

1. *Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\forall u, v \in E, \quad |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

2. *Cas d'égalité ?*
3. *Démontrer l'inégalité triangulaire dans E.*

Exercice 3.3 *Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. On pose*

$$O(E) = \{f \in L(E) \mid \forall u, v \in E\ \langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle\}$$

et $SO(E) = \{f \in O(E) \mid \det(f) = 1\}$.

1. *Montrer que $O(E)$ et $SO(E)$ sont des groupes.*
2. $\star$ *Sont-ils compacts ? Connexes ?*

3.2 Angles

3.3 Calcul matriciel et normes euclidiennes

3.4 Calculs vectoriels en dimension 3

3.5 Espaces hermitiens

Références

[Dan] J.-F. Dantzer, *Mathématiques pour l'agrégation interne*, Vuibert

[Esc] J.-P. Escofier, *Toute l'algèbre de Licence*, Dunod

[GOU] X. Gourdon, *Les maths en tête*, Algèbre, Ellipses

[MON] J.M. Monier, *Algèbre 1, 2 ; Analyse 1, 2, 3, 4 ; Géométrie*, Ellipses