Courbes de Bézier
Option agrégation C

Christophe Ritzenthaler

October 28, 2009

Abstract

Résumé : on décrit ici les propriétés des courbes de Bézier et leur application au lissage.

Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury demande que la discussion soit accompagnée d'exemples traités par ordinateur. Il est souhaitable que vous organisiez votre présentation comme si le jury n'avait pas connaissance du texte. Le jury aura néanmoins le texte sous les yeux pendant votre exposé.

1 Premières définitions

1.1 Polynômes de Bernstein

Définition 1.1. *Soit n un entier positif. On définit pour $i \in \{0, \dots, n\}$, les* polynômes de Bernstein *par la formule*

$$B_{i,n}(X) = \binom{n}{i} X^i (1 - X)^{n-i}.$$

Dans la suite on considérera uniquement ces polynômes sur $[0, 1]$.

Proposition 1.1. *On a les propriétés suivantes:*

1. $\forall i \in \{0, \dots, n\}, \forall u \in [0, 1]$, $B_{i,n}(u) \geq 0$.
2. *Partition de l'unité :* $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u) = 1$.
3. $B_{i,n}$ *atteint son maximum en* $u = i/n$.
4. *Définition récursive :* $B_{i,n}(u) = (1 - u)B_{i,n-1}(u) + uB_{i-1,n-1}(u)$. *On a convenu que* $B_{i,n} = 0$ *si* $i < 0$ *ou* $i > n$.

1.2 Courbes de Bézier

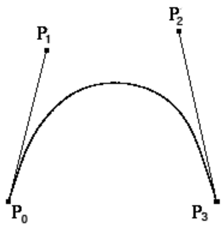
Définition 1.2. *Pour $n+1$ points du plan $P_i = (x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, on définit la* courbe de Bézier C *associé à l'ensemble de ces points par*

$$\begin{cases} x(u) & = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u) x_i \\ y(u) & = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u) y_i \end{cases}$$

pour $u \in [0,1]$. En abrégé, $C(u) = \sum B_{i,n}(u) P_i$.

Les P_i sont appelés *points de contrôle.* Un exemple de courbe de Bézier avec 4 points de controle est donné Fig.1.

Figure 1: Courbe de Bézier



Proposition 1.2 (Propriétés des courbes de Bézier)**.**

1. *Contrôle local : le point de contrôle P_i influence la courbe au voisinage de $u = i/n$. De plus $C(0) = P_0$ et $C(1) = P_n$.*
2. *Si on note $C_n(P_0, \ldots, P_n)$ la courbe associée aux points de contrôle $(P_i)_{0,\ldots,n}$, on a la définition récursive*

$$C_n(P_0, \ldots, P_n)(u) = (1-u) C_{n-1}(P_0, \ldots, P_{n-1})(u) + u C_{n-1}(P_1, \ldots, P_n)(u) \qquad (1)$$

3. *La courbe est à l'intérieur de l'enveloppe convexe des points de contrôle.*
4. *La droite $((x_0, y_0); (x_1, y_1))$ (resp. $((x_{n-1}, y_{n-1}); (x_n, y_n))$ est tangente à la courbe en (x_0, y_0) (resp. (x_n, y_n)).*
5. *Une courbe de Bézier est infiniment dérivable.*
6. *Une ligne droite rencontre au plus autant de fois la courbe de Bézier que la ligne polygonale joignant les points de contrôle (ceci signifie que la courbe suit assez fidèlement cette ligne sans osciller).*

Remarque 1. *Le fait d'ajouter des points de contrôle permet d'influer sur la forme de la courbe. Cependant il n'est pas judicieux d'élever trop le degré d'une courbe. On préfère donc utiliser le cas $n = 3$ (courbe de Bézier cubique) et les relier entre elles de manière à garantir une continuité C^1. La courbe de Bézier cubique se trace en partant du point P_0, en se dirigeant vers P_1 et en arrivant au point P_3 selon la direction $(P_2; P3)$. En général, la courbe ne passe ni par P_1 ni par P_2 : ces points sont simplement là pour donner une information de direction. La distance entre P_0 et P_1 détermine la 'longueur' du déplacement dans la direction de P_1 avant de tourner vers P_3.*

2 Méthodes de calcul

2.1 Algorithme de De Casteljau

La formule (1) permet de construire un algorithme pour déterminer récursivement la position d'un point $C(u)$ sur la courbe grâce à des interpolations linéaires en partant des points de contrôle. Bien qu'aussi coûteux que l'algorithme de Horner d'évaluation directe des polynômes, il est avantageux car moins sujet aux erreurs d'arrondis.

2.2 Algorithme de subdivision

Dans bien des applications, on a besoin de discrétiser la courbe en calculant les positions de ses points pour des valeurs u_k, $k = 0, \ldots, N$. Pour pouvoir appliquer un algorithme de dichotomie, on suppose $N = 2^p$ et $u_k = k/2^p$. Dans ce qui suit on va appliquer la méthode pour une courbe de Bézier cubique mais elle s'étend facilement aux degrés plus élevés.
Tout commence par l'écriture matricielle de l'équation de la courbe

$$\begin{aligned} C(u) &= \begin{bmatrix}(1-t)^3 & 3t(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}P_0\\P_1\\P_2\\P_3\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\-3 & 3 & 0 & 0\\3 & -6 & 3 & 0\\1 & 3 & -3 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}P_0\\P_1\\P_2\\P_3\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Soit

$$M = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\-3 & 3 & 0 & 0\\3 & -6 & 3 & 0\\1 & 3 & -3 & 1\end{bmatrix}.$$

On cherche à paramétrer la courbe $C(t)$ avec $t \in [0, 1/2]$ sous la forme d'une courbe de Bézier. Il faut donc écrire $C_g(t) = C(t/2), t \in [0, 1]$:

$$C_g(t) = C(t/2) = \begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1/2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1/4 & 0\\0 & 0 & 0 & 1/8\end{bmatrix} M \begin{bmatrix}P_0\\P_1\\P_2\\P_3\end{bmatrix}.$$

Pour déterminer les points de contrôle de la courbe C_g, on doit écrire

$$C_g(t) = \begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3\end{bmatrix} MS \begin{bmatrix}P_0\\P_1\\P_2\\P_3\end{bmatrix}.$$

Il faut donc que

$$S = M^{-1} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1/2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1/4 & 0\\0 & 0 & 0 & 1/8\end{bmatrix} M = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1/2 & 1/2 & 0 & 0\\1/4 & 1/2 & 1/4 & 0\\1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8\end{bmatrix}.$$

Ainsi si les $P_{i,j}$ sont les points de contrôle à l'étape j pour une des parties de la courbe, on obtient, par symétrie, deux nouveaux ensembles de points de contrôle $P_{i,j+1}$ (pour la partie $[0, t/2]$) et $P'_{i,j+1}$ (pour la partie $[t/2, 1]$)

$$\begin{bmatrix} P_{0,j+1} \\ P_{1,j+1} \\ P_{2,j+1} \\ P_{3,j+1} \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} P_{0,j} \\ P_{1,j} \\ P_{2,j} \\ P_{3,j} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} P'_{0,j+1} \\ P'_{1,j+1} \\ P'_{2,j+1} \\ P'_{3,j+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{0,j} \\ P_{1,j} \\ P_{2,j} \\ P_{3,j} \end{bmatrix}.$$

Rappelons que les points $P_{0,j}, P_{4,j} = P'_{0,j}, P'_{4,j}$ appartiennent à la courbe. On arrête la récurrence lorsque la distance entre ces points est plus petite qu'une borne fixée.

3 Application au lissage et généralisation

3.1 Lissage

Les courbes de Bézier composent l'outil de la base du dessin vectoriel qui repose sur la transcription mathématique des objets. Les courbes de Bézier cubiques, les plus utilisées, se retrouvent en graphisme et dans de multiples systèmes de synthèse d'images, tels que PostScript, Metafont et The GIMP, pour dessiner des courbes 'lisses' joignant des points ou des polygones de Bézier.

Ainsi, étant donné un chemin polyngonal P_i, on pourra approximer la tangente au point P_i par le vecteur $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ renormalisé pour avoir une longueur $\rho|\overrightarrow{P_iP_{i+1}}|$. Le paramètre ρ contrôle en quelque sorte l'importance de la courbure au niveau des points de contrôle.

Cependant, on constate que cette méthode conduit à des phénomènes de 'bosses' après chaque point de contrôle. D'où l'idée de calculer la tangente au point P_i comme la moyenne de la direction précédente $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ et de la direction suivante $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$. De plus on renormalise avec un coefficient ρ.

3.2 Courbes de Bézier rationnelles

Bien que pratiques et intuitives, les courbes de Bézier souffrent de nombreux problèmes. Le plus important est qu'elles ne permettent pas de tracer des courbes aussi simples que des arcs de cercles comme le précise le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Il n'existe pas de courbe paramétrée polynomiale qui décrive un arc de cercle.*

Pour pallier à ce problème, on peut généraliser les courbes de Bézier.

Définition 3.1 (Courbes de Bézier rationnelles)**.** *On se donne $n+1$ points P_i et pour chaque point un poids $w_i > 0$. On définit alors*

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u) P_i}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,u}}, \quad u \in [0,1].$$

4 Suggestions

Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous *pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

1. On pourra démontrer les résultats de la Prop.1.1.
2. Quelle est l'utilité de Prop.1.1 (4) ?
3. On pourra détailler la remarque 1.
4. Commenter le paragraphe 2.1.
5. Implanter l'algorithme de subdivision.
6. On pourra illustrer la section 3.1 avec quelques exemples de courbes.
7. On pourra démontrer le Th.3.1.
8. Montrer comment tracer un arc de cercle avec une courbe de Bézier rationnelle.

5 Les remarques du jury pour les textes

Introduction et conclusion :
"Le jury n'ayant a priori pas lu le texte, le candidat commencera par présenter celui-ci. Un plan en début d'exposé est apprécié, annonçant en particulier les propriétés du modèle que le candidat va dégager. Il est important d'expliquer le problème et le modèle, de l'illustrer, ainsi que d'y revenir en fin d'exposé. Le modèle mathématique a-t-il les propriétés attendues ? Des propriétés parasites surprenantes ? A-t-on résolu le problème posé ?"

La programmation :
"Il est vivement souhaité que des illustrations informatiques (simulation, résolution numérique ou formelle, cas particuliers éclairants ...) soient présentées, mais il ne s'agit pas d'une épreuve de programmation. Un programme qui ne fonctionne pas n'est en rien rédhibitoire et le jury appréciera un regard critique du candidat sur une tentative non aboutie. Une utilisation raisonnée des fonctions des logiciels disponibles est plus appréciée qu'une reprogrammation d'algorithmes standards. Bien intégré dans l'exposé, un tel travail peut en revanche devenir pertinent pour illustrer les insuffisances d'une méthode naïve."

Les démonstrations :
"S'il est exclu de plaquer une démonstration d'un théorème du programme dans l'exposé, les démonstrations mathématiques de certaines assertions du texte sont très appréciées. Lorsqu'une démonstration est ébauchée dans le texte, le candidat peut choisir de la compléter. Il est alors particulièrement apprécié que le candidat précise les point mathématiques nécessaires pour une démonstration rigoureuse. Le candidat peut, tout comme le texte, utiliser des arguments heuristiques s'il les signale comme tels. Cependant le candidat ne doit pas oublier qu'il s'agit d'une épreuve de l'agrégation externe de mathématiques, et qu'un exposé ne comportant aucun argument mathématique précis est vivement déconseillé."

À ne pas faire :
"Le principal travers observé chez les candidats est la répétition linéaire du texte, y compris des passages non compris en espérant que le jury ne demandera pas de détails. Rappelons qu'utiliser des notions que l'on ne comprend pas, dans cette épreuve comme dans les autres,

est une faute lourdement sanctionnée. Enfin, rappelons qu'aucun développement n'est attendu. Le candidat est libre de proposer des démonstrations de résultats utilisés,mais le jury peut les refuser, ou demander au candidat d'en donner seulement les grandes lignes."

À faire :
"Quelques qualités appréciées : prise de distance et d'initiative par rapport au texte, étude d'un exemple ou d'un cas simple pour comprendre le texte et le faire comprendre au jury, simplification ou, à l'inverse, généralisation du problème proposé, étude qualitative ou heuristique, critique du modèle."