Initiation à la méthode d'équivalence de E. Cartan

M. Petitot

31 mai 2016

Table des matières

1 La question posée **1**

2 Mise en équation du problème d'équivalence **2**

3 L'approche par le calcul extérieur **3**
3.1 Principes de l'algorithme 3
3.2 Construction d'une G-structure invariante 3
3.3 Equations de structure de Maurer-Cartan 4
3.4 Absorption de la torsion et réduction du groupe structural 5
3.5 Prolongation d'une structure géométrique 5

4 Exploitation de la méthode d'équivalence **5**
4.1 Sortie de l'algorithme 5
4.2 Invariants dérivés et syzygies 6
4.3 Changement de variable et groupe de symétries 7

5 Eléments théoriques **9**
5.1 Calcul des contraintes d'intégrabilité 9
5.2 Qu'est-ce qu'un groupe ? 10

6 Proposition **12**

1 La question posée

On considère la famille d'équations différentielles $E_f : y'' = f(x, y, y')$ et le groupe Φ formé des transformations de la forme

$$\varphi := (x, y) \mapsto (x + C,\, \eta(x, y))\,. \tag{1}$$

où C est une constante arbitraire et η une fonction arbitraire. Quand deux équations E_f et $E_{\bar f}$ se ramènent l'une à l'autre par une transformation $\varphi \in \Phi$, on écrira

$$E_f \sim E_{\bar f} \mod \Phi\,. \tag{2}$$

La question est de décider d'une telle équivalence et, si possible, de calculer la transformation φ quand celle–ci existe.

2 Mise en équation du problème d'équivalence

Les transformations $\varphi : (x, y) \mapsto (\bar x, \bar y)$ sont solutions du système fini d'équations et d'inéquations aux dérivées partielles $\bar x_x = 1$, $\bar x_y = 0$, $\bar y_y \neq 0$.

La transformation $\varphi \in \Phi$ cherchée est solution du syst. de Pfaff

$$\underbrace{\begin{pmatrix} d\bar p - \bar f(\bar x, \bar y, \bar p)\, d\bar x \\ d\bar y - \bar p\, d\bar x \\ d\bar x \end{pmatrix}}_{\omega_{\bar f}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{g:=S(a)} \underbrace{\begin{pmatrix} dp - f(x, y, p)\, dx \\ dy - p\, dx \\ dx \end{pmatrix}}_{\omega_f} \tag{3}$$

On a alors

$$E_f \sim E_{\bar f} \mod \Phi \text{ ssi } \exists g \in G \text{ tel que } \omega_{\bar f} = g \cdot \omega_f \tag{4}$$

Soit M la variété de coordonnées (x, y, p). L'équation (3) est un système différentiel décrivant l'action du groupe Φ sur la variété M et sur les fonctions $f(x, y, p)$. Le calcul donne

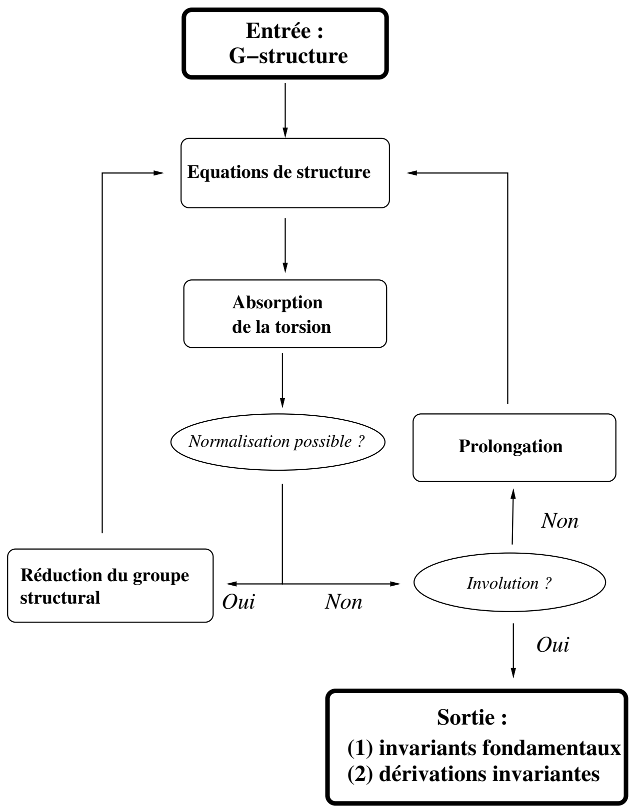
$$\begin{gathered} \bar x_x = 1,\ \bar x_y = 0,\ \bar x_p = 0,\ \bar y_p = 0,\ \bar y_y \neq 0, \\ \bar p = \bar y_x + p\bar y_y, \\ \bar f(\bar x,\ \bar y,\ \bar p) = \bar y_{xx} + 2p\bar y_{xy} + p^2 \bar y_{yy} + f(x, y, p)\ \bar y_y. \end{gathered} \tag{5}$$

Ainsi le problème d'équivalence (2) se ramène au calcul des contraintes d'intégrabilité d'un système différentiel. Ce calcul est réalisable, soit par l'algèbre différentielle commutative (J.F. Ritt), soit par l'algèbre différentielle extérieure (E. Cartan). On sait donc décider (par deux méthodes) si la transformation $\varphi \in \Phi$ existe. Dans ce cas, les groupes de symétrie des équations E_f et $E_{\bar f}$ sont conjugués par φ. En général il est impossible d'obtenir φ par des formules explicites.

Dans la thèse de R. Dridi, on montre que la transformation φ est solution d'un système polynomial (non différentiel) ssi les groupes de symétrie des équations E_f et $E_{\bar{f}}$ sont finis. Le calcul de la transformation φ est le plus facile quand les équations E_f et $E_{\bar{f}}$ ont un groupe de symétrie réduit à l'élément neutre.

3 L'approche par le calcul extérieur

3.1 Principes de l'algorithme



3.2 Construction d'une G-structure invariante

Les matrices $S(a)$ forment un groupe dit *groupe structural*, noté G, qui agit sur les corepères de la variété M. Pour une fonction f déterminée, l'application $(x, y, p) \mapsto \omega_f(x, y, p)$ est une section du fibré des corepères de M. On considère le sous–ensemble des corepères de M contenant, sur chaque fibre au–dessus du point (x, y, p), les corepères de la forme $g \cdot \omega_f(x, y, p)$ lorsque g parcourt le groupe structural G. On obtient ainsi une G-structure $P_f \to M$ dont la forme canonique (tautologique) est $\theta_f := S \cdot \omega_f$. Localement, $P_f \simeq G \times M$ pour le système de coordonnées (a_1, a_2, a_3, x, y, p).

Un isomorphisme φ entre deux G-structures de même base M est un difféomorphisme de $\varphi : M \to M$ qui transforme les (co)repères de l'une en les (co)repères de l'autre. On montre que cette condition est équivalente à l'égalité de leurs formes canoniques respectives modulo le difféomorphisme φ.

Ainsi E. Cartan reformule le problème d'équivalence de deux systèmes différentiels E_f et $E_{\bar{f}}$ comme le problème d'équivalence des deux G-structures associées P_f et $P_{\bar{f}}$. De manière lapidaire

$$\text{pour tout } \varphi \in \Phi, \quad \varphi_* E_f = E_{\bar{f}} \text{ ssi } \varphi_* P_f = P_{\bar{f}} \,. \tag{6}$$

Pour l'exemple (1), l'existence de $\varphi \in \Phi$ se ramène au calcul des contraintes d'intégrabilité du système de Pfaff linéaire $\theta_f := (\theta^1, \theta^2, \theta^3)$:

$$\begin{array}{rcl} \theta_f & = & \theta_{\bar{f}} \\ \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 & \neq & 0 \end{array} \tag{7}$$

où l'inéquation traduit que $\varphi : M \to M$ est invertible, i.e. que la derivée jacobienne $\varphi' \neq 0$ en tout point de M.

3.3 Equations de structure de Maurer-Cartan

L'égalité $\theta_f = \theta_{\bar{f}}$ implique $d\theta_f = d\theta_{\bar{f}}$ (le φ_* est omis partout). Le calcul de $d\theta_f$ et de $d\theta_{\bar{f}}$ donne

$$\begin{aligned} d\theta = d(S \cdot \omega) &= dS \wedge \omega + S \cdot d\omega \\ &= (dS \cdot S^{-1}) \wedge (S \cdot \omega) + S \cdot d\omega \\ &= (dS \cdot S^{-1}) \wedge \theta + S \cdot d\omega \,. \end{aligned}$$

On reconnait la matrice de Maurer-Cartan du groupe structural G, à savoir $dS \cdot S^{-1}$ qu'on écrit sous la forme $\big(dS \cdot S^{-1}\big)^i_j = A^i_{j\rho}\, \pi^\rho$ et la torsion $\big(S \cdot d\omega\big)^i = T^i_{jk}\, \theta^j \wedge \theta^k$ avec $1 \leq i, j, k \leq 3$.

On obtient les équations de structure, dites de Maurer-Cartan

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \pi^1 \wedge \theta^1 + \pi^2 \wedge \theta^2 + T^1_{1,3}\theta^1 \wedge \theta^3 + T^1_{2,3}\theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^2 &= \pi^3 \wedge \theta^2 + T^2_{1,3}\theta^1 \wedge \theta^3 + T^2_{2,3}\theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^3 &= 0, \end{aligned}$$

avec les coefficients de torsion

$$\begin{aligned}
T^1_{1,3} &= -\frac{f_y a_1 + a_2}{a_1} \\
T^1_{2,3} &= \frac{a_1 f_y a_2 - f_p {a_1}^2 + {a_2}^2}{a_1 a_3} \\
T^2_{1,3} &= -\frac{a_3}{a_1} \\
T^2_{2,3} &= \frac{a_2}{a_1}
\end{aligned}$$

et les 3 formes G-invariantes

$$\begin{aligned}
\pi^1 &= \frac{1}{a_1}\ da_1 \\
\pi^2 &= -\frac{a_2}{a_1 a_3}\ da_1 + \frac{1}{a_3}\ da_2 \\
\pi^3 &= \frac{1}{a_3}\ da_3
\end{aligned}$$

3.4 Absorption de la torsion et réduction du groupe structural

3.5 Prolongation d'une structure géométrique

à faire!!!

4 Exploitation de la méthode d'équivalence

4.1 Sortie de l'algorithme

Une G-structure en *involution* décrite par les équations de structure

$$\begin{aligned}
d\theta^1 &= -\theta^1 \wedge \theta^4 + T^1_{2,3}\ \theta^2 \wedge \theta^3 \\
d\theta^2 &= -\theta^1 \wedge \theta^3 - \theta^2 \wedge \theta^4 \\
d\theta^3 &= 0 \\
d\theta^4 &= T^4_{1,2}\ \theta^1 \wedge \theta^2 + T^4_{2,3}\ \theta^2 \wedge \theta^3
\end{aligned} \tag{8}$$

pour les formes invariantes ($a := a_3$)

$$
\begin{aligned}
\theta^1 &= a\left((dp - f\,dx) - \frac{1}{2}f_p(dy - pdx)\right)\\
\theta^2 &= a\,(dy - pdx)\\
\theta^3 &= dx\\
\theta^4 &= \frac{1}{2}f_{pp}(dy - pdx) + \frac{1}{2}f_p dx + \frac{da}{a}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

et les coefficients de torsion invariants

$$
\begin{aligned}
I_1 &= T^1_{2,3} = -\frac{1}{4}\,(f_p)^2 - f_y + \frac{1}{2}\,D_x f_p\\
I_2 &= T^4_{1,2} = \frac{f_{ppp}}{2a^2}\\
I_3 &= T^4_{2,3} = \frac{f_{yp} - D_x f_{pp}}{2a}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

4.2 Invariants dérivés et syzygies

Soit une fonction invariante $I = I_{;1}\,\theta^1 + I_{;2}\,\theta^2 + \cdots + I_{;4}\,\theta^4$. Alors les coefficients $I_{;1}\ \cdots I_{;4}$ sont de nouveaux invariants. Ces dérivations invariantes $X_1, \cdots, X_4$ forment le repère dual du corepère θ_f invariant. Le calcul donne

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \tfrac{\partial}{\partial\theta^1} &&= \frac{1}{a}\,\frac{\partial}{\partial p}\\
X_2 &= \tfrac{\partial}{\partial\theta^2} &&= \frac{1}{a}\,\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\,\frac{f_p}{a}\,\frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{2}\,f_{pp}\frac{\partial}{\partial a}\\
X_3 &= \tfrac{\partial}{\partial\theta^3} &&= D_x - \frac{1}{2}\,a f_p\frac{\partial}{\partial a}\\
X_4 &= \tfrac{\partial}{\partial\theta^4} &&= a\frac{\partial}{\partial a}\,.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

L'identité fondamentale $d^2\,\theta^i = 0$ pour $i = 1, \cdots, 4$ permet d'obtenir les syzygies entre les invariants sans connaître leur expression en coordonnées locales

$$
\begin{gathered}
I_{1;1} + I_3 = 0, \quad I_{1;4} = 0, \quad I_{2;4} + 2I_2 = 0,\\
I_{3;1} + I_{2;3} = 0, \quad I_{3;4} + I_3 = 0.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

4.3 Changement de variable et groupe de symétries

Par construction, le groupe des symétries d'une équation E_f est égal au groupe des automorphismes de la G-structure covariante P_f.

Théorème 1. *Si la e-structure $P_f \to M$ est en involution, la dimension de son groupe d'automorphismes est égal à la dimension de M moins le nombre d'invariants (dérivés ou non) fonctionellement indépendants.*

Le théorème de la fonction implicite dit que deux fonctions f_1 et f_2 sont reliées par une dépendance *fonctionnelle* du type $F(f_1, f_2) = 0$ ssi leurs différentielles df_1 et df_2 sont linéairement dépendantes. Ce principe est encore vrai pour tester la dépendance *algébrique* de 2 éléments de l'algèbre des coordonnées d'une variété algébrique irréductible (utiliser les différentielles de Kähler).

Théorème 2. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'équation $y'' = f(x, y, y') \sim y'' = 0 \mod \Phi$.*

(ii) *Les 2 invariants I_1 et I_2 sont nuls.*

(iii) *Le groupe de symétrie de l'eq. E_f est le groupe $(x, y) \mapsto (x + d, ax + by + c)$.*

(iv) *Le groupe de symétrie de l'eq. E_f est un groupe à 4 paramètres.*

Démonstration. indication : utiliser les syzygies (12). Le point clé est de montrer que si les invariants sont I_1, I_2, I_3 sont constants, ils sont nuls. □

Utilisation de l'algèbre différentielle commutative

Pour $\bar{f} := 0$, le syst. (5) est triangularisé pour le ranking d'élimination $[\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}] \succ [f] \succ (x, y, p)$:

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{xx} &= -\bar{y}_y f + p\bar{y}_y f_p - \frac{1}{2}\, p\bar{y}_y f_{pp} \\
\bar{y}_{xy} &= -\frac{1}{2}\,\bar{y}_y f_p + \frac{1}{2}\, p\bar{y}_y f_{pp} \\
\bar{y}_{yy} &= -\frac{1}{2}\,\bar{y}_y f_{pp} \\
\bar{x}_x &= 1 \\
\bar{x}_y &= 0 \\
f_{ppp} &= 0 \\
f_{xp} &= -f_{pp} f + 2f_y + \frac{1}{2}\, f_p^2 - p f_{yp}.
\end{aligned}$$

Pour le problème de self équivalence $f = \bar{f} = 0$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} \bar{y}_{xx} & = & 0 \\ \bar{y}_{xy} & = & 0 \\ \bar{y}_{yy} & = & 0 \\ \bar{x}_x & = & 1 \\ \bar{x}_y & = & 0 \end{array}$$

ce qui correspond au groupe $\bar{y} = Ax + By + C$ et $\bar{x} = x + D$.

Pour l'équation de Painlevé 1, $\bar{f} := 6\bar{y}^2 + \bar{x}$, le syst. (5) est triangularisé pour le ranking d'élimination $[\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}] \succ [f] \succ (x, y, p)$:

$$C_\varphi \left\{ \begin{array}{lcl} \bar{x} & \rightarrow & 1/12 f_{xxy} + 1/12 p^2 f_{yyy} - 1/12 p f_{xyy} - 1/24 f_y^2 + 1/12 f f_{yy} \\ & & + \text{ 37 termes contenant une dérivée partielle de } f \text{ par rapport à } p \\ \bar{y} & \rightarrow & 1/12\, f_y - 1/24\, f_{xp} - 1/24\, f_{pp} f + 1/48\, {f_p}^2 - 1/24\, p f_{yp} \\ \bar{p} & \rightarrow & \cdots \end{array} \right.$$

$$C_f \left\{ \begin{array}{rcl} f_{xxxxp} & \rightarrow & -24 + 5/2\, f p f_{pp} f_p f_{yp} - 4\, f_x f_{xyp} + \cdots \\ f_{xxyp} & \rightarrow & -p f_{pp} f_{yy} + 3\, p f_{ypp} f_y + \cdots \\ & & \\ f_{xyyp} & \rightarrow & 2\, f_{yyy} + {f_{yp}}^2 - p f_{yyyp} - f_{yypp} f - 2\, f_{ypp} f y + \cdots \\ f_{xpp} & \rightarrow & f_{yp} - p f_{ypp} \\ f_{ppp} & \rightarrow & 0 \end{array} \right.$$

Le même système triangulaire en termes d'invariants

$$C_\varphi \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x} & = & -\dfrac{I_1^2}{24} - \dfrac{I_{1;33}}{12}, \\ \bar{y} & = & -\dfrac{I_1}{12}, \\ \bar{p} & = & -\dfrac{I_{1;3}}{12}. \end{array} \right.$$

$$C_f \left\{ \begin{array}{rcl} I_2 & = & 0, \\ I_3 & = & 0, \\ I_{1;331} & = & 0, \\ I_1 I_{1;2} + I_{1;332} & = & 0, \\ I_1 I_{1;3} + I_{1;333} - 1 & = & 0. \end{array} \right.$$

5 Eléments théoriques

Définition 3 (système différentiel)**.** *Soit X et Y deux variétés algébriques. Un* système différentiel *est une variété* algébrique *plongée dans un espace de jets* $\mathrm{J}^q(X, Y)$ *pour un certain ordre* $q \in \mathbb{N}$.

Il faut simplement comprendre que les coefficients des développements de Taylor des solutions sont contraints de vérifier un nombre fini d'équations et d'inéquations polynomiales. Un système polynomial, du genre $x^2 + y^2 = 1$ est un système différentiel sur l'espace de jets J^0 une fois précisée la variable indépendante : x, y ou même une nouvelle variable t.

L'idée est de remplacer les variétés algébriques par des *diffiétés* au sens de A. M. Vinogradov. Essentiellement, une algèbre différentielle réduite (i.e. sans éléments nilpotents) remplace l'algèbre des coordonnées d'une variété algébrique. Le point clé est que l'on dispose d'une paquetage DIFFERENTIA-LALGEBRA basé sur la réduction de Ritt permettant de tester l'égalité à 0 d'un polynôme différentiel modulo un système fini d'équations et d'inéquations différentielles polynomiales.

5.1 Calcul des contraintes d'intégrabilité

Un système différentiel $V^q \subset J^q$ sera dit en *involution* si la donnée des coordonnées d'un point quelconque de V^q, i.e. d'un développement limité à l'ordre q se prolonge en *au moins* un développement de Taylor (on ne demande pas qu'il converge).

Par exemple, le système différentiel $V^1 \subset \mathrm{J}^1$ défini par les équations (x, y sont les deux variables indépendantes)

$$\begin{array}{rcll} u_x & = & x & [1] \\ u_y & = & u & [2] \end{array} \tag{13}$$

n'est pas en involution. Sur ce cas simplissime, l'algorithme ROSENFELD–GROEBNER procède par dérivations *croisées*. En dérivant l'équation [1] on obtient $u_{xy} = 0$ tandis qu'en dérivant l'équation [2], on obtient $u_{xy} = u_x = x$. D'où la contrainte $x = 0$ portant sur la variable supposée indépendante x. Un tel système n'a pas de solution ; d'ailleurs en dérivant une fois de plus, on aboutit à la contradiction $u_{xxy} = 1 = 0$.

Pour E. Cartan, un système différentiel défini sur la variété M est un système de Pfaff avec condition d'indépendance. Le système *vide* (i.e. ne comportant aucune équation) est

$$
\begin{array}{rcll}
\omega := du - u_x dx - u_y dy & = & 0 & [1] \\
dx \wedge dy & \neq & 0 & [2]
\end{array}
\tag{14}
$$

A ce système, on associe le drapeau de 1-formes $I \subset J \subset \Omega^1(M)$ obtenu en posant

$$I := (\omega), \quad J := (\omega, dx, dy)\,.$$

Un système de Pfaff est dit *lineaire* ssi $dI = 0 \mod J$, ce qui est toujours le cas pour un système vide. Sur l'exemple (13),

$$d\omega = dx \wedge du_x + dy \wedge du_y = 0 \mod dx, dy\,.$$

On remarquera que le système vide ne vérifie pas la condition de complète intégrabilité de Frobénius $dI = 0 \mod I$.

Le système de Pfaff associé au système différentiel (13) s'obtient en spécialisant les formes de contact figurant dans le module I, ce qui donne

$$
\begin{array}{rcll}
\omega := du - x dx - u dy & = & 0 & [1'] \\
dx \wedge dy & \neq & 0 & [2']
\end{array}
\tag{15}
$$

On vérifie qu'un système de Pfaff linéaire reste linéaire quand on le spécialise. E. Cartan montre que ce système est impossible par le raisonnement suivant :

$$
\begin{array}{rcll}
d\omega & = & dy \wedge du & \\
 & = & dy \wedge (x dx + u dy) & \mod \omega \\
 & = & -x\, dx \wedge dy & \mod \omega
\end{array}
$$

Comme $dx \wedge dy \neq 0$, on en déduit la contrainte $x = 0$ portant sur une variable supposée indépendante.

5.2 Qu'est-ce qu'un groupe ?

La définition que l'on donne aujourd'hui d'un groupe de Lie n'a pas grand chose à voir avec la notion de groupe développée par S. Lie et E. Cartan dans le but de traiter le problème d'équivalence.

Définition 4 (groupe, algèbre de Lie)**.** *Un groupe est la donnée d'un système différentiel dont l'ensemble des solutions est fermé par composition et passage à l'inverse. L'algèbre de Lie de ce groupe est la donnée du système différentiel linéarisé associé.*

Exemples classiques

(i) Groupe des transformations conformes du plan affine : équations de Cauchy-Riemann

$$\bar{x}_x = \bar{y}_y, \quad \bar{x}_y = -\bar{y}_x, \quad (\bar{x}_x)^2 + (\bar{y}_x)^2 \neq 0$$

(ii) Transformations homographiques de la droite affine : scharzienne

$$\bar{x}_{xxx} - \frac{3}{2}\frac{(\bar{x}_{xx})^2}{\bar{x}_x} = 0, \quad \bar{x}_x \neq 0\,.$$

(iii) Racines cubiques de l'unité : $(\bar{x})^3 = x^3$.

Le passage du groupe vers l'algèbre de Lie est simple pour les groupes continus. Par exemple, pour le groupe des transformations homographiques, on pose $\bar{x}(x) = x + \varepsilon X(x)$. Le calcul (en première variation) donne (en tuant ε^2 mais en gardant ε supposé non nul)

$$X_{xxx} = 0\,.$$

L'algèbre de Lie d'un groupe discret est un $\mathbb{Z}$-module pour la construction de M. Lazard. Cette construction s'applique au groupe libre (à n générateurs) où l'algèbre de Lie associée est l'algèbre de Lie libre à n générateurs. Cette algèbre de Lie est un $\mathbb{Z}$-module libre, donc sans torsion ; l'extension des coefficients au corps $\mathbb{Q}$ ne pose aucun problème. Pour les racines cubiques de l'unité, ça semble plus délicat. Le calcul en 1ere variation $\bar{x} = x + \varepsilon X$ à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}$ donne $3X = 0$, ce qui peut avoir un sens. Si on divise par 3, on retrouve le point de vue classique, l'algèbre de Lie est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel réduit à 0.

Une question intéressante (mais qui se pose rarement en pratique) est la possibilité de vérifier qu'un système différentiel définit bien un groupe, cela sans savoir intégrer ce système par des formules explicites.

Montrons que le système $\bar{x}_{xx} = 0,\ \bar{x}_x \neq 0$ convient. Il faut d'abord montrer que ce système est invariant quand on échange x et $\bar{x}$. On part de $\bar{x}_x\, x_{\bar{x}} = 1$ et on dérive par rapport à x en utilisant le *chain rule*, ce qui donne

$$\bar{x}_{xx}\, x_{\bar{x}} + x_{\bar{x}\bar{x}}\, (\bar{x}_x)^2 = 0\,.$$

Si $\bar{x}_{xx} = 0$, cela implique bien que $x_{\bar{x}\bar{x}} = 0$ grâce à l'inégalité $\bar{x}_x \neq 0$ qui joue un rôle crucial. Pour la composition des transformations, on peut utiliser la formule de Faa Di Bruno permettant de dériver une fonction composée $f(g(x))$, n fois par rapport à x.

Remarquons que le groupe $x \mapsto ax + b$ a *presque* le même système de définition que son algèbre de Lie, ... à part l'inéquation $\bar{x}_x \neq 0$.

Théorème 5. *Tout groupe admet un prolongement* holohédrique *où il est caractérisé par un nombre fini de* 0*-formes et de* 1*-formes invariantes. De plus, le système de Pfaff associé est en involution.*

La présence de 0-formes signifie que le groupe n'opère pas transitivement, ce qui est encore mal compris aujourd'hui. Il me semble qu'il faut traduire ce magnifique théorème de E. Cartan de la façon suivante :

Théorème 6. *Tout groupe est égal au groupe des automorphismes d'une certaine structure géométrique en involution.*

Ce théorème permet à E. Cartan de calculer tous les sous-groupes du groupe des difféomorphismes du plan, un calcul initié par son maître à penser S. Lie.

Exemples Pour le groupe des transformations conformes, la G-structure est définie par sa forme tautologique

$$\theta = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 \neq 0\,.$$

On remarque que des groupes caractérisés par l'invariance d'une 2-forme, par exemple, le groupe des difféomorphismes du plan affine qui laissent invariant l'élément de surface $dx \wedge dy$, E. Cartan préfère se ramener à une 1-forme invariante, à savoir

$$\theta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \text{ avec } ad - bc = 1\,.$$

Le calcul de la G-structure caractérisant les transformations homographiques est assez difficile (quand on ne connaît pas le résultat à l'avance!!).

6 Propositions

	$\dim G < \infty$	$\dim M < \infty$	théorie classique
(i)	$\dim G < \infty$	$\dim M = \infty$	équivalence de Darboux
	$\dim G = \infty$	$\dim M = \infty$	équivalence de Cartan

(ii) S. S. Chern a fait remarqué qu'on peut prédire (cohomologie des algèbres de Lie ?) la suite des algèbres de Lie qui interviennent au cours des prolongations.

(iii) Identifier le groupe des symétries d'une équation (système de racines)

(iv) G-structures et théorie de gauge en physique : exemple ?