Le problème d'équivalence pour les variétés de Cauchy-Riemann en dimension 5

Samuel Pocchiola

Université Paris-Sud

Mardi 30 septembre 2014

Le problème d’équivalence

Questions

1. A quelles conditions deux structures géométriques sont-elles localement équivalentes ?
2. Peut-on déterminer le groupe des isomorphismes locaux d’une structure géométrique ?

Exemples

- Deux variétés riemanniennes sont-elles (localement) isométriques ?
- Deux équations différentielles sont elles identiques modulo un changement de variable (transformation ponctuelle, transformation de contact, transformation préservant les fibres, etc...)
- Deux hypersurfaces réelles d'une variété complexe sont elles équivalentes modulo un biholomorphisme ?

Principe de la méthode de Cartan

La méthode de Cartan vise à fournir un fibré P au dessus de M et une section ω de P dans son fibré des co-repères tel qu'un isomorphisme

$$f \ : \quad (M, s) \longrightarrow (M, s')$$

se relève en un isomorphisme

$$F \ : \quad (P, \omega) \longrightarrow (P, \omega')$$

satisfaisant:

$$F^*\omega' = \omega,$$

et tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{tikzcd}
(M, s) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & (M, s') \arrow[d, "p'"] \\
(P, \omega) \arrow[r, "F"'] & (P, \omega').
\end{tikzcd}$$

G-structures, I

Soient M une variété différentielle et $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ un groupe de Lie.

Definition

Une G-structure sur M est un sous G-fibré du fibré des repères $F(M)$ sur M.

Exemple

- Une $O(n)$-structure sur M définit une variété riemannienne.
- Une $CO(n)$-structure définit une structure conforme.
- Si $G = GL(m, \mathbb{C}) \subset GL(2m, \mathbb{R})$, une G-structure définit une structure presque-complexe.
- Une $\{e\}$-structure sur M est la donnée d'une 1-forme à valeurs dans le fibré des repères de M. On parle aussi de repère mobile, ou de parallélisme absolu.

G-structures, II

1-forme de soudure

Soit P une G-structure. Le pullback θ de la 1-forme canonique de $F(M)$ sur P est la 1-forme de soudure.

Isomorphisme de G-structures

Soient M et N deux variétés différentielles, P une G-structure sur M et Q une G-structure sur N. Un isomorphisme de G-structures est un diffeomorphisme $f : M \longrightarrow N$ tel que $f_*(P) = Q$.

Méthode de Cartan

La méthode de Cartan vise à ramener l'étude d'une G-structure à celle d'une $\{e\}$-structure.

Torsion algébrique d'une G-structure, I

1-forme de connexion

Une 1-forme ω sur P est une connexion adaptée à la G-structure P si

1. ω est à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G,
2. $\omega(A^*) = A$ pour tout $A \in \mathfrak{g}$,
3. ω est G-équivariante, i.e. $R_a^* \omega = \mathrm{Ad}\, a^{-1} \omega$.

Torsion associée

Si ω est une connexion adaptée à la G-structure P, la torsion Ω de la G-structure est défine par l'équation de Cartan:

$$d\theta = -\omega \wedge \theta + \Omega.$$

Torsion algébrique d'une G-structure, II

Problème

Il existe plusieurs connexions adaptées produisant des torsions différentes.

Fait

La différence entre deux connexions adaptées est une 1-forme sur P, horizontale et G-équivariante. Elle peut être vue comme une 1-forme sur M à valeurs dans Ad_P, le fibré adjoint de M.

L'espace A^P des connexions adaptées est un espace affine pour $\Omega(Ad_P)$.

L'application $A^P \xrightarrow{\phi} \Omega^2(TM)$, qui associe à une connexion adaptée la torsion correspondante admet une linéarisation:

$$\tau \ : \ \Omega(Ad_P) \longrightarrow \Omega^2(TM).$$

Torsion algébrique d'une G-structure, III

Définition

L'image par ϕ dans coker(τ) d'une connexion adaptée ω ne dépend pas du choix de ω. Elle est appelée la torsion algébrique de la G-structure.

Théorème

Si P et Q sont deux G-structures de torsions algébriques respectives T et S, et si $f : P \longrightarrow Q$ est un isomorphisme, alors:

$$f^* S = T.$$

Calculs en coordonnées locales, I

Données

- M une variété différentielle de dimension m,
- ω un co-repère sur M,
- $G \in GL_n(R)$ un groupe de Lie,
- P une G-structure.

P est localement isomorphe au produit $M \times G$.
La 1-forme de soudure est donnée par

$$\theta := g \cdot \omega, \qquad \text{i.e.} \qquad \theta^i := \sum_{j=1}^{m} g^i_j \, \omega^j .$$

La différentielle extérieure de la 1-forme de soudure est donc donnée par:

$$d\theta^i = \sum_{j=1}^{m} \left(dg^i_j \wedge \omega^j + g^i_j \, d\omega^j \right)$$

Calculs en coordonnées locales, II

On introduit la forme de Maurer-Cartan sur G:

$$\gamma = dg \cdot g^{-1}, \qquad \text{i.e.} \qquad \gamma^i_j := \sum_{k=1}^{m} dg^i_k \, (g^{-1})^k_j \,,$$

de sorte que

$$\sum_{j=1}^{m} dg^i_j \wedge \omega^j = \sum_{j=1}^{m} d\gamma^i_j \wedge \theta^j .$$

Les 2-formes $d\omega^j$ se récrivent en fonction des 2-formes $\theta^i \wedge \theta^j$, soit:

$$d\theta^i = \sum_{j=1}^{m} \gamma^i_j \wedge \theta^j + \sum_{j<k=2}^{m} T^i_{jk}(x,g)\, \theta^j \wedge \theta^k .$$

Remarque

On retrouve la formule de Cartan. Le pull-back à P de la 1-forme γ est la 1-forme de connexion plate associée à la trivialisation $P \cong M \times G$. Les coefficients T^i_{jk} sont les coefficients du tenseur de torsion associé à la connexion plate γ.

Torsion algébrique en coordonnées, I

Question

Comment varient les coefficients de torsion T^i_{jk} lorsque l'on modifie la 1-forme de connexion ?

Une 1-forme de connexion adaptée est de la forme

$$\pi^k := \gamma^k - \sum_{i=1}^{p} z^k_i \, \theta^i .$$

(On parle de forme de Maurer-Cartan modifiée.)
L'équation de structure de P se récrit:

$$d\theta^i = \sum_{j=1}^{m} \pi^i_j \wedge \theta^j + \sum_{j<k=2}^{m} U^i_{jk} \, \theta^i \wedge \theta^j .$$

Torsion algébrique en coordonnées, II

Définition

Les coefficients de torsion T^i_{jk} invariants par la transformation

$$\gamma^k \longrightarrow \gamma^k - \sum_{i=1}^{p} z^k_i \, \theta^i$$

sont appelés les coefficients de torsion essentielle. Ce sont les composantes du tenseur de torsion algébrique.

Réduction des G-structures, I

Problème

Les coefficients de torsion essentielle T^i_{jk} constituent des invariants locaux de la G-structure, mais leur expression en coordonnées n'est pas invariante.

Exemple

Un invariant $I = T^i_{jk}$ peut s'écrire $I = x^2 + y$ dans un système de coordonnées, et $\overline{I} = \tan(\overline{x} - \overline{y})$ dans un autre.

Fait

En revanche, un isomorphisme local de G-structures transforme un coefficient de torsion essentielle T^i_{jk} constant en un coefficient $\overline{T}^i_{jk}$ égal à la même constante.

Réduction des G-structures, II

Principe de réduction

1. Soit P une G-structure de tenseur de torsion algébrique T. Supposons qu'il existe un sous groupe $H \subset G$ et une H-structure $Q \subset P$ tels que Q soit le lieu géométrique des points $p \in P$ où $T(p)$ prend une valeur constante fixée. Alors un isomorphisme local de la G-structure P envoie nécessairement Q dans lui même. Autrement dit, un isomorphisme local de la G-structure P est un isomorphisme local de la H-structure Q.
2. On ramène ainsi l'étude du problème d'équivalence entre G-structures à un problème d'équivalence entre H-structures, avec $\dim H < \dim G$.

Prolongation des G-structures, I

Soient $V = \mathbb{R}^n$ un espace vectoriel, G un groupe de Lie agissant sur V et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

Prolongation de $\mathfrak{g}$

La première prolongation $\mathfrak{g}_1$ de $\mathfrak{g}$ est l'espace des applications bilinéaires symétriques $t : V \times V \to V$ telles que, pour tout $v_1 \in V$ fixé, l'application $v \in V \longrightarrow t(v, v_1)$ est un élément de $\mathfrak{g}$.

Prolongation de G

La première prolongation G_1 de G est le groupe des transformations linéaires $\bar{t}$ de $V \oplus \mathfrak{g}$, induites par les éléments t de $\mathfrak{g}_1$ par la formule:

$$\begin{aligned} \bar{t}(v) &= v + t(\cdot, v) \quad && \text{si} \quad v \in V, \\ \bar{t}(x) &= x && \text{si} \quad x \in \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

soit matriciellement:

$$\bar{t} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ t & I_r \end{pmatrix}.$$

Prolongation des G-structures, II

Choix d'un supplémentaire

Soit P une G-structure et soit $\phi : A^P \longrightarrow \Omega^2(TM)$, l'application qui à une connexion adaptée associe la torsion correspondante, et et soit $\tau : \Omega(Ad_P) \longrightarrow \Omega^2(TM)$ sa partie linéaire. On fixe une fois pour toutes un supplémentaire C de $\mathrm{Im}\,\tau$ dans $\Omega^2(TM)$.

Prolongation de P

1. Une connexion adaptée à P définit en tout point p un sous espace horizontal H_p de T_pP.
2. L'espace H_p définit à son tour un repère de T_pP via la 1-forme de soudure.
3. L'ensemble des connexions adaptées ω, vérifiant $\phi(\omega) \in C$, induit donc un ensemble P^1 de repères sur P.
4. P^1 est appelé la première prolongation de P.

Prolongation des G-structures, III

Lemme

P^1 est une G_1-structure sur P.

Théorème

P et P' sont isomorphes si et seulement si P^1 et P'^1 le sont.

Principe de la méthode de Cartan

Par réductions et prolongations successives, la méthode de Cartan vise à ramener un problème d'equivalence entre G-structures à celui d'une équivalence entre $\{e\}$-structures.

Le problème d'équivalence pour les $\{e\}$-structures

Soit M une variété de dimension m, et θ un co-repère de 1-formes sur M.

Equations de structure

$$d\theta^i = \sum_{j<k=2}^{m} T^i_{jk}\, \theta^i \wedge \theta^j .$$

$F_s = (T^i_{jk},$ et toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre s).

1. Le co-repère θ est dit régulier si pour tout s, F_s est de rang constant ρ_s.
2. la suite (ρ_s) est alors croissante et bornée par la dimension m de M.
3. le plus petit entier s tel que $\rho_s = \rho_{s+1}$ est appelé l'ordre de θ.

Le problème d'équivalence pour les $\{e\}$-structures

Soient:

1. M une variété de dimension m, et θ un co-repère de 1-formes sur M d'ordre s et de rang r.
2. M' une variété de dimension m', et θ' un co-repère de 1-formes sur M' d'ordre s' et de rang r'.

Théorème

(M, θ) et (M', θ') sont isomorphes si et seulement si:

1. *$s = s$' et $r = r'$.*
2. *Il existe les mêmes relations fonctionnelles entre les composantes de F_s et celles de F_s'.*

Equivalence des hypersurfaces réelles d'un espace complexe.

Poincaré, 1906.

Etant données deux hypersurfaces (locales) réelles $M, M' \subset \mathbb{C}^2$, existe-t-il un biholomorphisme (local) de $\mathbb{C}^2$ qui envoie M sur M' ?

La première réponse rigoureuse est donnée par Cartan en 1932.

Structures-CR

Structure CR

Une structure CR sur une variété M est la donnée d'un sous-fibré L de $\mathbb{C} \otimes TM$ de rang pair $2n$ tel que:

1. $L \cap \overline{L} = \{0\}$
2. L est formellement integrable, i.e. $[L, L] \subset L$.

L'entier n est la dimension CR de M et $k = \dim M - 2n$ est sa codimension.

Isomorphisme de structures CR

Etant données deux structures CR, (M, L) et (M', L'), un diffeomorphisme $\varphi : M \longrightarrow M'$ est un CR-isomorphisme entre M et M' si $\varphi(L) = L'$.

La forme de Levi

Forme de Levi

La forme de Levi LF_p d'une variété M en un point $p \in M$ est la forme hermitienne définie sur L_p par

$$LF(X, Y) = \frac{1}{2i}\left[\widetilde{X}, \overline{\widetilde{Y}}\right]_p \mod L_p \oplus \overline{L}_p,$$

où $X, Y \in L_p$ et $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ sont deux sections de $M \longrightarrow L$ telles que $\widetilde{X}_p = X$ and $\widetilde{Y}_p = Y$.

Invariant CR

C'est un invariant CR de M : si $\varphi : M \longrightarrow M'$ est un CR-isomorphisme entre M et M', alors $LF = \varphi^* LF'$.

Variétés Levi-plates

Un variété CR analytique réelle dont la forme de Levi est identiquement nulle est isomorphe à un produit $M \cong \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^k$.

Variétés CR de dimension 5

Le type (n, k)

Soit M une variété CR de dimension ≤ 5. Le couple (n, k) constitué de la dimension CR et de la codimension de M vérifie $2n + k \leq 5$, ce qui donne 4 valeurs possibles:

$$(1, 1), \qquad (1, 2), \qquad (1, 3), \qquad (2, 1).$$

Un autre invariant CR

Soit $\left(E^i\right)_{i\geq 1}$ la suite des sous-fibrés de $\mathbb{C}\otimes TM$ définis par:

$$E^1 := L \oplus \overline{L}, \qquad E^{i+1} := E^i \oplus \left[L, E^i\right] \oplus \left[\overline{L}, E^i\right],$$

et soit

$$r_i := \operatorname{rank}_{\mathbb{C}} E^i.$$

La suite $r := (r_i)_{i\geq 1}$ est un invariant CR de M.

Exemple

- On a toujours $r_1 = 2n$,
- $r_2 = r_1$ si et seulement si M is Levi-plate.

Variétés CR en dimension 5

6 classes générales

En distinguant selon le type de M, les valeurs possibles de la suite r et le rang de la forme de Levi, on obtient 6 classes générales de variétés CR en dimension 5.

Classe I

Classe I

Variétés CR non Levi-plates de type $(1,1)$.

Résultats

- Le problème d'équivalence pour cette classe a été résolu par Cartan en 1932.
- J. Merker et M. Sabzevari (2013) ont obtenu une expression explicite des invariants locaux en fonction d'une fonction graphante de M.

L'enjeu des calculs explicites

Méthode de Cartan intrinsèque

Il est souvent possible de conduire la méthode de Cartan sans calculer explicitement les coefficients de torsion. La première identité de Bianchi:

$$DT = \Omega \wedge \theta,$$

donne des informations sur la dépendance des coefficients de torsion en fonction des paramètres de groupe, ce qui permet de "deviner" les normalisations à effectuer.

Le calcul explicite des invariants locaux est un enjeu en soi. Citons Sidney Webster:

> *Despite their importance, until now [the invariants of pseudoconvex domains] have been fully computed, to our knowledge, only in the case of the unit ball $D = B^n$, where they all vanish!*

L'enjeu des calculs explicites

Phénomène de branchement

- Les normalisations successives des paramètres de groupe peuvent nécéssiter des divisions par des coefficients de torsion.
- Il est alors crucial de contrôler l'annulation potentielle de ces coefficients, ce que seul le calcul explicite permet de faire.
- La distinction entre les cas d'annulation et de non annulation conduit à l'existence de plusieurs “branches” du problème.

Classe II

Classe II

Variétés CR de type $(1, 2)$ et telles que $r = (2, 3, 4)$. Appelées aussi variétés de Engel.

Résultats

- Le problème d'équivalence pour cette classe a été résolu par Beloshapka, Ezhov et Schmalz (2007).
- On obtient dans cette thèse une expression explicite des invariants locaux en fonction d'une fonction graphante.

Classe III-1

Classe III-1

Variétés CR de type $(1,3)$ et telles que $r = (2,3,5)$.

Résultats

Le problème d'équivalence pour cette classe a été résolu par J. Merker et M. Sabzevari (2013), avec l'explicitation des invariants locaux.

Classe III-2

Classe III-2

Variétés CR de type $(1, 3)$ et telles que $r = (2, 3, 4, 5)$.

Résultats

- L'existence de cette classe a été remarquée par J. Merker.
- Le problème d'équivalence a été résolu pour cette classe dans cette thèse, avec explicitation des invariants locaux.

Classe IV-1

Classe IV-1

Variétés CR de type $(2, 1)$ dont la forme de Levi est non-dégénérée en tout point.

Résultats

- Le problème d'équivalence pour les variétés Levi non-dégénérés de dimension quelconque a été résolu par Chern et Moser en 1974.
- L'obtention explicite des invariants locaux en fonction d'une fonction graphante est toujours considéré comme un problème ouvert.

Classe IV-2

Classe IV-2

Variétés CR de type $(2, 1)$ dont la forme de Levi est de rang 1 en tout point, et qui sont 2-nondégénérées.

Résultats

- Ebenfelt a proposé une solution qui s'est avérée être partielle (2001).
- Solutions indépendantes proposées par Medori-Spiro, Isaev-Zaitsev et Pocchiola (2013).

Les modèles

Variétés CR dont le groupe d'automorphismes est de dimension maximale

- Pour chacune de ces 6 classes, la variété CR dont le groupe d'automorphismes est de dimension maximale est appelée le modèle.
- La méthode de Cartan permet généralement d'interpréter les variétés CR d'une même classe comme des déformations de ces variétés modèles, par le biais d'une connexion de Cartan.
- La résolution du probème d'équivalence pour les modèles permet de déterminer leur groupe d'automorphismes. Elle peut servir de guide pour le cas plus complexe des variétés CR quelconques, car on obtient dans les deux cas la même séquence initiale de réductions et de prolongations.

Les modèles

Classe II: la cubique de Beloshapka

$$\mathrm{B}: \quad \begin{aligned} w_1 &= \overline{w_1} + 2\, i\, z\bar{z}, \\ w_2 &= \overline{w_2} + 2\, i\, z\bar{z}\,(z + \bar{z})\,, \end{aligned}$$

Classe III-2: N $\subset \mathbb{C}^4$

$$
\text{N}: \qquad
\begin{aligned}
w_1 &= \overline{w_1} + 2\,i\,z\overline{z},\\
w_2 &= \overline{w_2} + 2\,i\,z\overline{z}\,(z + \overline{z})\,,\\
w_3 &= \overline{w_3} + 2i\,z\overline{z}(z^2 + \frac{3}{2}\,z\overline{z} + \overline{z}^2),
\end{aligned}
$$

Classe IV-2: le tube au-dessus du cône de lumière

$$\mathrm{LC}: \qquad (\mathrm{Re}\, z_1)^2 - (\mathrm{Re}\, z_2)^2 - (\mathrm{Re}\, z_3)^2 = 0, \qquad \mathrm{Re}\, z_1 > 0.$$

Résumé des résultats obtenus

Le groupe d'automorphisme des modèles

La détermination du groupe d'automorphismes des modèles pour les variétés de type II, III-2 et IV-2 par la méthode d'équivalence de Cartan.

Résumé des résultats obtenus

Les variétés de la classe II

La résolution du problème d'équivalence pour les variétés CR de la classe II (déja étudiée par Beloshapka, Ezhov et Schmalz), avec l'obtention de l'expression explicite des quatre invariants locaux en fonction d'une fonction graphante.

Résumé des résultats obtenus

Les variétés de la classe III-2

La résolution du problème d'équivalence pour les variétés CR de la classe III-2. Cette classe n'a pas été étudiée auparavant.

Résumé des résultats obtenus

Les variétés Levi-dégénérees de rang 1

La résolution du problème d'équivalence pour les variétés CR de la classe IV-2, avec notamment l'explicitation de deux invariants fondamentaux J et W, dont l'annulation simultanée caractérise l'équivalence locale au cône de lumière.

Equivalence des variétés CR de dimension 5

Avec l'aide des résultats dûs:

1. à Cartan pour les variétés de la classe I,
2. à Chern et Moser pour les variétés dont la forme de Levi est partout non-dégénérée (classe IV-1),
3. à Merker et Sabzevari pour les variétés de la classe III-1,

on obtient:

Equivalence des variétés CR de dimension 5

Le problème d'equivalence est complètement résolu pour les variétés CR de dimension 5.

Théorème principal

Deux invariants fondamentaux, J et W, interviennent dans la résolution du problème d'équivalence pour les variétés CR de la classe IV-2. Une telle variété CR M est localement biholomorphe au tube au dessus du cône de lumière,

$$\mathrm{LC}: \qquad (\operatorname{Re} z_1)^2 - (\operatorname{Re} z_2)^2 - (\operatorname{Re} z_3)^2 = 0, \qquad \operatorname{Re} z_1 > 0,$$

dont l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux, $\mathfrak{aut}_{CR}(\mathrm{LC})$, est de dimension **10**, si et seulement si:

$$J \equiv W \equiv 0.$$

Si $J \not\equiv 0$, ou si $W \not\equiv 0$, un parallélisme absolu est construit sur M. En particulier, l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de M satisfait:

$$\dim \mathfrak{aut}_{CR}(M) \leq 5.$$

Explicitation du problème en fonction d'une fonction graphante

Une hypersurface $M \subset \mathbb{C}^3$ est localement représentée comme un graphe:

$$u = F\left(z_1, z_2, \overline{z_1}, \overline{z_2}, v\right).$$

Problème

Comment exprimer le fait que:

1. M est une variété CR de dimension CR égale à 2 ?
2. La forme de Levi de M est de rang 1 ?
3. M est 2-non dégénérée ?

Explicitation du problème en fonction d'une fonction graphante,II

1. Les champs de vecteurs:

$$\mathcal{L}_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + A^j \frac{\partial}{\partial v}, \quad \text{avec} \qquad A^j := -i \, \frac{F_{z_j}}{1 + i \, F_v}, \qquad j = 1, 2,$$

   constituent une base du fibré CR de M.

2. Il existe une fonction k sur M telle que le champ de vecteur

$$\mathcal{K} := k \, \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$$

   engendre le noyau de la forme de Levi. On a:

$$k = -\frac{F_{z_2,\overline{z_1}} + F_{z_2,\overline{z_1}} F_v^2 - i \, F_{\overline{z_1}} F_{z_2,v} - F_{\overline{z_1}} F_v \, F_{v,z_2} + i \, F_{z_2} \, F_{\overline{z_1}} F_{v,v} - F_{z_2} \, F_v \, F_{v,\overline{z_1}}}{F_{z_1,\overline{z_1}} + F_{z_1,\overline{z_1}} F_v^2 - i \, F_{\overline{z_1}} F_{z_1,v} - F_{\overline{z_1}} F_v \, F_{z_1,v} + i \, F_{z_1} \, F_{\overline{z_1},v} + F_{z_1} \, F_{\overline{z_1}} F_{v,v} - F_{z_1} \, F_v \, F_{v,\overline{z_1}}}.$$

3. Le fait que M est 2-non dégénérée correspond à la condition:

$$\overline{\mathcal{L}_1}(k) \neq 0.$$

Explicitation du problème en fonction d'une fonction graphante, III

Repère initial

1. On dispose déjà des champs $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{K}$, $\overline{\mathcal{L}_1}$ et $\overline{\mathcal{K}}$ qui constituent une base du fibré $\mathbb{C} \otimes TM$.
2. On définit le champ de vecteur $\mathcal{T}$ par $\mathcal{T} := i\left[\mathcal{L}_1, \overline{\mathcal{L}_1}\right]$.
3. $(\mathcal{L}_1, \mathcal{K}, \overline{\mathcal{L}_1}, \overline{\mathcal{K}}, \mathcal{T})$ définit un repère sur M.
4. On note $\omega_0 := \left(\rho_0, \kappa_0, \zeta_0, \overline{\kappa}_0, \overline{\zeta}_0\right)$ le co-repère dual.

Equations de structures

Equations de structures

La différentielle extérieure de ω_0 est donnée par:

$$
\begin{aligned}
d\rho_0 &= P\ \rho_0 \wedge \kappa_0 - \mathcal{L}_1(k)\ \rho_0 \wedge \zeta_0 + \overline{P}\ \rho_0 \wedge \overline{\kappa_0} - \overline{\mathcal{L}_1}(\overline{k})\ \rho_0 \wedge \overline{\zeta_0} + \\
&\quad + i\ \kappa_0 \wedge \overline{\kappa_0}\ , \\
d\kappa_0 &= -\mathcal{T}(k)\ \rho_0 \wedge \zeta_0 - \mathcal{L}_1(k)\ \kappa_0 \wedge \zeta_0 + \overline{\mathcal{L}_1}(k)\ \zeta_0 \wedge \overline{\kappa}_0\ , \\
d\zeta_0 &= 0, \\
d\overline{\kappa}_0 &= -\mathcal{T}(\overline{k})\ \rho_0 \wedge \overline{\zeta_0} - \mathcal{L}_1(\overline{k})\ \kappa_0 \wedge \overline{\zeta}_0 - \overline{\mathcal{L}_1}(\overline{k})\ \overline{\kappa_0} \wedge \overline{\zeta}_0\ , \\
d\overline{\zeta_0} &= 0.
\end{aligned}
$$

Explicitation du problème en fonction d'une fonction graphante, IV

La fonction P

Dans les équations ci-dessus, la fonction P est définie par:

$$P = \frac{I_{z_1} + A^1 I_v - I A^1_v}{I},$$

avec:

$$I := i \left(\overline{A^1_{z_1}} - A^1_{\overline{z}_1} + A^1 \overline{A^1_v} - \overline{A^1} A^1_v \right).$$

Formalisme des calculs

Dans la suite, tous les calculs sont exprimés en fonction des fonctions k et P et de leur dérivées selon les champs $\mathcal{L}_1$, $\overline{\mathcal{L}_1}$, $\mathcal{K}$, $\overline{\mathcal{K}}$ et $\mathcal{T}$, eux-même exprimés par les formules précédentes en fonction de la fonction graphante F de M.

Formulaire de calculs

Les équations de structure précédentes sont équivalentes aux relations entre crochets de Lie:

$$
\begin{aligned}
\left[\mathcal{T}, \mathcal{L}_1\right] &= -P\,\mathcal{T}, & \left[\mathcal{T}, \mathcal{K}\right] &= \mathcal{L}_1(k)\,\mathcal{T} + \mathcal{T}(k)\,\mathcal{L}_1,\\
\left[\mathcal{T}, \overline{\mathcal{L}_1}\right] &= -\overline{P}\,\mathcal{T}, & \left[\mathcal{T}, \overline{\mathcal{K}}\right] &= \overline{\mathcal{L}_1}(\overline{k})\,\mathcal{T} + \mathcal{T}(\overline{k})\,\overline{\mathcal{L}_1},\\
\left[\mathcal{L}_1, \overline{\mathcal{L}_1}\right] &= -i\,\mathcal{T}, & \left[\mathcal{L}_1, \mathcal{K}\right] &= \mathcal{L}_1(k)\,\mathcal{L}_1,\\
\left[\mathcal{L}_1, \overline{\mathcal{K}}\right] &= \mathcal{L}_1(\overline{k})\,\overline{\mathcal{L}_1}, & \left[\overline{\mathcal{L}_1}, \mathcal{K}\right] &= \overline{\mathcal{L}_1}(k)\,\mathcal{L}_1,\\
\left[\overline{\mathcal{L}_1}, \overline{\mathcal{K}}\right] &= \overline{\mathcal{L}_1}(\overline{k})\,\overline{\mathcal{L}_1}, & \left[\mathcal{K}, \overline{\mathcal{K}}\right] &= 0.
\end{aligned}
$$

On a aussi les relations supplémentaires:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}(\overline{k}) &= 0,\\
\mathcal{K}(P) &= -P\,\mathcal{L}_1(k) - \mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1(k)\right),\\
\mathcal{K}(\overline{P}) &= -P\,\overline{\mathcal{L}_1}(k) - \overline{\mathcal{L}_1}\left(\mathcal{L}_1(k)\right) - i\,\mathcal{T}(k).
\end{aligned}
$$

Les invariants J et W

La fonction J

$$
\begin{aligned}
J = \frac{5}{18}\,\frac{\mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1(\overline{k})\right)^2}{\mathcal{L}_1(\overline{k})^2}\,P + \frac{1}{3}\,P\,\mathcal{L}_1\left(P\right) - \frac{1}{9}\,\frac{\mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1(\overline{k})\right)}{\mathcal{L}_1(\overline{k})}\,P^2 \\
+ \frac{20}{27}\,\frac{\mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1(\overline{k})\right)^3}{\mathcal{L}_1(\overline{k})^3} - \frac{5}{6}\,\frac{\mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1(\overline{k})\right)\,\mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1(\overline{k})\right)\right)}{\mathcal{L}_1(\overline{k})^2} \\
+ \frac{1}{6}\,\frac{\mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1(\overline{k})\right)\,\mathcal{L}_1(P)}{\mathcal{L}_1(\overline{k})} - \frac{1}{6}\,\frac{\mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1(\overline{k})\right)\right)}{\mathcal{L}_1(\overline{k})}\,P \\
- \frac{2}{27}\,P^3 - \frac{1}{6}\,\mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1\left(P\right)\right) + \frac{1}{6}\,\frac{\mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1(\overline{k})\right)\right)\right)}{\mathcal{L}_1(\overline{k})}
\end{aligned}
$$

Les invariants J et W

La fonction W

$$W := \frac{2}{3}\,\frac{\mathcal{L}_1\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)} + \frac{2}{3}\,\frac{\mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1(\overline{k})\right)}{\mathcal{L}_1(\overline{k})} + \frac{1}{3}\,\frac{\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)\mathcal{K}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)^3} - \frac{1}{3}\,\frac{\mathcal{K}\left(\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)^2} + \frac{i}{3}\,\frac{\mathcal{T}(k)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)}$$

La G-structure

Idée

Un isomorphisme CR de M stabilise:

1. le fibré $T^{1,0}M$
2. le noyau de la forme de Levi

Lemme

Un isomorphisme CR de M transforme ω_0 en un co-repère de la forme $g \cdot \omega_0$, avec:

$$g := \begin{pmatrix} \mathrm{c}\bar{\mathrm{c}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{b} & \mathrm{c} & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{d} & \mathrm{e} & \mathrm{f} & 0 & 0 \\ \bar{\mathrm{b}} & 0 & 0 & \bar{\mathrm{c}} & 0 \\ \bar{\mathrm{d}} & 0 & 0 & \bar{\mathrm{e}} & \bar{\mathrm{f}} \end{pmatrix},$$

où b, c, d, e and f sont des fonctions à valeurs complexes sur M, avec de plus c et f $\neq 0$.

La G-structure

Soit G_1 le groupe de Lie réel de dimension 10 dont les éléments sont de la forme:

$$g := \begin{pmatrix} c\bar{c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 0 \\ \bar{b} & 0 & 0 & \bar{c} & 0 \\ \bar{d} & 0 & 0 & \bar{e} & \bar{f} \end{pmatrix},$$

avec c, f $\in \mathbb{C}^*$ et b, e, d $\in \mathbb{C}$.

G_1-structure

On définit la G-structure P^1 sur M comme étant l'ensemble des co-repères ω de la forme $g \cdot \omega_0$.

Torsion de P^1

$$
\begin{aligned}
d\rho = \alpha^1 \wedge \rho + \overline{\alpha^1} \wedge \rho \\
&+ T^{\rho}_{\rho\kappa}\, \rho \wedge \kappa + T^{\rho}_{\rho\zeta}\, \rho \wedge \zeta + T^{\rho}_{\rho\overline{\kappa}}\, \rho \wedge \overline{\kappa} + T^{\rho}_{\rho\overline{\zeta}}\, \rho \wedge \overline{\zeta} + i\, \kappa \wedge \overline{\kappa},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\kappa = \alpha^1 \wedge \kappa + \alpha^2 \wedge \rho \\
&+ T^{\kappa}_{\rho\kappa}\, \rho \wedge \kappa + T^{\kappa}_{\rho\zeta}\, \rho \wedge \zeta + T^{\kappa}_{\rho\overline{\kappa}}\, \rho \wedge \overline{\kappa} + T^{\kappa}_{\rho\overline{\zeta}}\, \rho \wedge \overline{\zeta} \\
&\qquad + T^{\kappa}_{\kappa\zeta}\, \kappa \wedge \zeta + T^{\kappa}_{\kappa\overline{\kappa}}\, \kappa \wedge \overline{\kappa} + T^{\kappa}_{\zeta\overline{\kappa}}\, \zeta \wedge \overline{\kappa},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\zeta = \alpha^3 \wedge \rho + \alpha^4 \wedge \kappa + \alpha^5 \wedge \zeta \\
&+ T^{\zeta}_{\rho\kappa}\, \rho \wedge \kappa + T^{\zeta}_{\rho\zeta}\, \rho \wedge \zeta + T^{\zeta}_{\rho\overline{\kappa}}\, \rho \wedge \overline{\kappa} + T^{\zeta}_{\rho\overline{\zeta}}\, \rho \wedge \overline{\zeta} \\
&\qquad + T^{\zeta}_{\kappa\zeta}\, \kappa \wedge \zeta + T^{\zeta}_{\kappa\overline{\kappa}}\, \kappa \wedge \overline{\kappa} + T^{\zeta}_{\zeta\overline{\kappa}}\, \zeta \wedge \overline{\kappa}.
\end{aligned}
$$

Normalisation

Le coefficient $T^{\kappa}_{\zeta\overline{\kappa}}$ est l'unique coefficient de torsion invariant par les transformations:

$$\tilde{\alpha}^i := \alpha^i - x^i_\rho\,\rho - x^i_\kappa\,\kappa - x^i_\zeta\,\zeta\, - \,x^i_{\overline{\kappa}}\,\overline{\kappa}\, - \,x^i_{\overline{\zeta}}\,\overline{\zeta},$$

On choisit la normalisation:

$$T^{\kappa}_{\zeta\overline{\kappa}} = 1,$$

ce qui conduit à:

$$\mathrm{f} = \frac{\mathrm{c}}{\overline{\mathrm{c}}}\,\overline{\mathcal{L}_1}(k).$$

G_2-structure

Groupe G_2

On obtient une G_2-structure P^2, où G_2 est le groupe de Lie réel de dimension 8 dont les éléments g sont de la forme:

$$g = \begin{pmatrix} c\bar{c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 & 0 \\ d & e & \frac{c}{\bar{c}} & 0 & 0 \\ \bar{b} & 0 & 0 & \bar{c} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{d} & \bar{e} & \frac{\bar{c}}{c} \end{pmatrix}.$$

Torsion de P^2

$$
\begin{aligned}
d\rho = \beta^1 \wedge \rho + \overline{\beta^1} \wedge \rho \\
+ U^{\rho}_{\rho\kappa}\, \rho \wedge \kappa + U^{\rho}_{\rho\zeta}\, \rho \wedge \zeta + U^{\rho}_{\rho\overline{\kappa}}\, \rho \wedge \overline{\kappa} + U^{\rho}_{\rho\overline{\zeta}}\, \rho \wedge \overline{\zeta} + i\, \kappa \wedge \overline{\kappa},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\kappa = \beta^1 \wedge \kappa + \beta^2 \wedge \rho \\
+ U^{\kappa}_{\rho\kappa}\, \rho \wedge \kappa + U^{\kappa}_{\rho\zeta}\, \rho \wedge \zeta + U^{\kappa}_{\rho\overline{\kappa}}\, \rho \wedge \overline{\kappa} \\
+ U^{\kappa}_{\rho\overline{\zeta}}\, \rho \wedge \overline{\zeta} + U^{\kappa}_{\kappa\zeta}\, \kappa \wedge \zeta + U^{\kappa}_{\kappa\overline{\kappa}}\, \kappa \wedge \overline{\kappa} + \zeta \wedge \overline{\kappa},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\zeta = \beta^3 \wedge \rho + \beta^4 \wedge \kappa + \beta^1 \wedge \zeta - \overline{\beta^1} \wedge \zeta \\
+ U^{\zeta}_{\rho\kappa}\, \rho \wedge \kappa + U^{\zeta}_{\rho\zeta}\, \rho \wedge \zeta + U^{\zeta}_{\rho\overline{\kappa}}\, \rho \wedge \overline{\kappa} + U^{\zeta}_{\rho\overline{\zeta}}\, \rho \wedge \overline{\zeta} \\
+ U^{\zeta}_{\kappa\zeta}\, \kappa \wedge \zeta + U^{\zeta}_{\kappa\overline{\kappa}}\, \kappa \wedge \overline{\kappa} + U^{\zeta}_{\kappa\overline{\zeta}}\, \kappa \wedge \overline{\zeta} \\
+ U^{\zeta}_{\zeta\overline{\kappa}}\, \zeta \wedge \overline{\kappa} + U^{\zeta}_{\zeta\overline{\zeta}}\, \zeta \wedge \overline{\zeta}.
\end{aligned}
$$

Normalisation

Torsion invariante

La torsion invariante est donnée par:

$$2\,U^{\kappa}_{\kappa\overline{\kappa}} - U^{\zeta}_{\zeta\overline{\kappa}} - U^{\rho}_{\rho\overline{\kappa}},$$

et conduit à la normalisation du paramètre b.

Normalisation du paramètre b

$$\mathrm{b} = -i\,\overline{\mathrm{c}}\mathrm{e} + i\,\frac{\mathrm{c}}{3}\left(\frac{\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)} - \overline{P}\right).$$

G_3-structure

G_3-structure

On obtient une G_3-structure P^3, où G_3 est constitué des éléments g de la forme:

$$g = \begin{pmatrix} c\bar{c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i\, e\bar{c} & c & 0 & 0 & 0 \\ d & e & \frac{c}{\bar{c}} & 0 & 0 \\ i\, \bar{e}c & 0 & 0 & \bar{c} & 0 \\ \bar{d} & 0 & 0 & \bar{e} & \frac{\bar{c}}{c} \end{pmatrix}.$$

Torsion de P^3

$$
\begin{aligned}
d\rho = {} & \gamma^1 \wedge \rho + \overline{\gamma^1} \wedge \rho \\
& + V^{\rho}_{\rho\kappa}\, \rho \wedge \kappa + V^{\rho}_{\rho\zeta}\, \rho \wedge \zeta + V^{\rho}_{\rho\overline{\kappa}}\, \rho \wedge \overline{\kappa} + V^{\rho}_{\rho\overline{\zeta}}\, \rho \wedge \overline{\zeta} + i\, \kappa \wedge \overline{\kappa},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\kappa = {} & \gamma^1 \wedge \kappa + \gamma^2 \wedge \rho \\
& + V^{\kappa}_{\rho\kappa}\, \rho \wedge \kappa + V^{\kappa}_{\rho\zeta}\, \rho \wedge \zeta + V^{\kappa}_{\rho\overline{\kappa}}\, \rho \wedge \overline{\kappa} + V^{\kappa}_{\rho\overline{\zeta}}\, \rho \wedge \overline{\zeta} \\
& + V^{\kappa}_{\kappa\zeta}\, \kappa \wedge \zeta + V^{\kappa}_{\kappa\overline{\kappa}}\, \kappa \wedge \overline{\kappa} + \zeta \wedge \overline{\kappa},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\zeta = {} & \gamma^3 \wedge \rho + i\, \gamma^2 \wedge \kappa + \gamma^1 \wedge \zeta - \overline{\gamma^1} \wedge \zeta \\
& + V^{\zeta}_{\rho\kappa}\, \rho \wedge \kappa + V^{\zeta}_{\rho\zeta}\, \rho \wedge \zeta + V^{\zeta}_{\rho\overline{\kappa}}\, \rho \wedge \overline{\kappa} + V^{\zeta}_{\rho\overline{\zeta}}\, \rho \wedge \overline{\zeta} \\
& + V^{\zeta}_{\kappa\zeta}\, \kappa \wedge \zeta + V^{\zeta}_{\kappa\overline{\kappa}}\, \kappa \wedge \overline{\kappa} + V^{\zeta}_{\kappa\overline{\zeta}}\, \kappa \wedge \overline{\zeta} \\
& + V^{\zeta}_{\zeta\overline{\kappa}}\, \zeta \wedge \overline{\kappa} + V^{\zeta}_{\zeta\overline{\zeta}}\, \zeta \wedge \overline{\zeta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V^{\kappa}_{\rho\kappa} = {} & \frac{i}{3}\,\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}^2}\,\frac{\mathcal{K}\left(\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)^2} - \frac{i}{3}\,\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}^2}\,\frac{\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)\mathcal{K}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)^3} \\
& - \frac{i}{3}\,\frac{\overline{\mathrm{e}}}{\overline{\mathrm{c}}^2}\,\frac{\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)} + \frac{2}{9}\,\frac{i}{\mathrm{c}\overline{\mathrm{c}}}\,\frac{\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)P}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)} \\
& - \frac{2i}{3}\,\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}^2}\,P + \frac{i}{3}\,\frac{\overline{\mathrm{e}}}{\overline{\mathrm{c}}^2}\,\overline{P} + \frac{1}{3}\,\frac{i}{\mathrm{c}\overline{\mathrm{c}}}\,\mathcal{L}_1(\overline{P}) - \frac{2}{9}\,\frac{i}{\mathrm{c}\overline{\mathrm{c}}}\,P\overline{P} \\
& - i\,\frac{\overline{\mathrm{c}}\mathrm{e}^2}{\mathrm{c}^3}\,\frac{\mathcal{L}_1(k)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)} + \frac{1}{9}\,\frac{i}{\mathrm{c}\overline{\mathrm{c}}}\,\frac{\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)\mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1(\overline{k})\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)\,\mathcal{L}_1(\overline{k})} \\
& - \frac{1}{9}\,\frac{i}{\mathrm{c}\overline{\mathrm{c}}}\,\frac{\mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1(\overline{k})\right)\overline{P}}{\mathcal{L}_1(\overline{k})} + \frac{i}{3}\,\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}^2}\,\frac{\mathcal{L}_1\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)} \\
& + \frac{1}{3}\,\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}^2}\,\frac{\mathcal{T}(k)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{c}^2}\,\frac{\mathcal{L}_1(k)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)} \\
& + \frac{1}{3}\,\frac{i}{\mathrm{c}\overline{\mathrm{c}}}\,\frac{\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)\mathcal{L}_1\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)^2} - \frac{1}{3}\,\frac{i}{\mathrm{c}\overline{\mathrm{c}}}\,\frac{\mathcal{L}_1\left(\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V^{\zeta}_{\rho\kappa} = {} & \frac{2i}{3}\,\frac{\mathrm{e}\bar{\mathrm{e}}}{\mathrm{c}\bar{\mathrm{c}}^{2}}\,\frac{\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)} + \frac{i}{3}\,\frac{\mathrm{e}\bar{\mathrm{e}}}{\mathrm{c}\,\bar{\mathrm{c}}^{2}}\,\overline{P} - \frac{i}{3}\,\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}^2\bar{\mathrm{c}}}\,\frac{\overline{P}\mathcal{L}_1\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)} \\
& + \frac{i}{3}\,\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{c}^3}\,\frac{\mathcal{L}_1\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{c}^2\bar{\mathrm{c}}}\,\frac{\mathcal{L}_1\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)} - \frac{\mathrm{e}\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{c}\bar{\mathrm{c}}^{2}}\,\frac{\overline{\mathcal{L}_1}(\bar{k})}{\mathcal{L}_1(\bar{k})} \\
& + \frac{2i}{3}\,\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}^2\bar{\mathrm{c}}}\,\frac{\mathcal{L}_1\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)^2} - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}^2\bar{\mathrm{c}}}\,\frac{\mathcal{T}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)} + \frac{i}{3}\,\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}^2\bar{\mathrm{c}}}\,\overline{\mathcal{L}_1}(\overline{P}) \\
& + \frac{5i}{9}\,\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}^2\bar{\mathrm{c}}}\,\frac{P\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)} - \frac{i}{3}\,\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}^2\bar{\mathrm{c}}}\,\frac{\mathcal{L}_1\left(\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)} + \frac{1}{3}\,\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{c}^3}\,\frac{\mathcal{T}(k)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)} \\
& + \frac{i}{3}\,\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{c}^3}\,\frac{\mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1(\bar{k})\right)}{\mathcal{L}_1(\bar{k})} - \frac{\mathrm{d}\,\bar{\mathrm{e}}}{\mathrm{c}\,\bar{\mathrm{c}}^{2}} + \frac{2}{3}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{c}^2\bar{\mathrm{c}}}\,P - \frac{i}{9}\,\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}^2\bar{\mathrm{c}}}\,\frac{\overline{P}\mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1\left(\bar{k}\right)\right)}{\mathcal{L}_1\left(\bar{k}\right)} \\
& - \frac{i}{3}\,\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{c}^3}\,\frac{\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)\mathcal{K}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)}{\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)^3} + \frac{i}{3}\,\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{c}^3}\,\frac{\mathcal{K}\left(\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)\right)}{\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)^2} - \frac{2i}{9}\,\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}^2\bar{\mathrm{c}}}\,\overline{P}P \\
& - \frac{2i}{9}\,\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}^2\bar{\mathrm{c}}}\,\frac{\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)\mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1(\bar{k})\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)\mathcal{L}_1(\bar{k})} + i\,\frac{\mathrm{e}\bar{\mathrm{e}}^2}{\bar{\mathrm{c}}^3}\,\frac{\overline{\mathcal{L}_1}\left(\bar{k}\right)}{\mathcal{L}_1(\bar{k})} - \\
& \qquad i\,\frac{\mathrm{e}^2\bar{\mathrm{e}}}{\mathrm{c}^2\bar{\mathrm{c}}} + \frac{1}{3}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{c}^2\bar{\mathrm{c}}}\,\frac{\mathcal{L}_1\left(\mathcal{L}_1(\bar{k})\right)}{\mathcal{L}_1(\bar{k})}
\end{aligned}
$$

Normalisation

On obtient la normalisation du paramètre d:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d} = -i\,\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{e}^2\overline{\mathrm{c}}}{\mathrm{c}} &+ i\,\frac{2}{9}\,\frac{\mathrm{c}}{\overline{\mathrm{c}}}\,\frac{\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)^2}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)^2} + i\,\frac{1}{18}\,\frac{\mathrm{c}}{\overline{\mathrm{c}}}\,\frac{\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)\overline{P}}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)} \\
&- i\,\frac{1}{9}\,\frac{\mathrm{c}}{\overline{\mathrm{c}}}\,\overline{P}^2 + i\,\frac{1}{6}\,\frac{\mathrm{c}}{\overline{\mathrm{c}}}\,\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{P}\right) - i\,\frac{1}{6}\,\frac{\mathrm{c}}{\overline{\mathrm{c}}}\,\frac{\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)},
\end{aligned}
$$

et une G_4-structure P^4 correspondante.

Réduction de P^4: apparition des branches

J et W apparaissent comme des combinaisons linéaires des coefficients de torsion de P^4.

1. Si $J \neq 0$, on normalise
$$\mathrm{c} = J^{\frac{1}{3}},$$
2. Si $W \neq 0$, on normalise
$$\mathrm{c} = W.$$

Cas $J \neq 0$

La normalisation

$$\mathrm{c} = J^{\frac{1}{3}}$$

conduit à une G_5 structure P^5, puis à la normalisation du dernier paramètre de groupe:

$$\mathrm{e} = \frac{1}{3}\,\frac{J^{1/3}}{\overline{J}^{1/3}}\left(-\frac{\overline{\mathcal{L}_1}(\overline{J})}{\overline{J}} + 2\,\frac{\overline{\mathcal{L}_1}\left(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\right)}{\overline{\mathcal{L}_1}(k)} + \overline{P}\right).$$

On utilise de manière cruciale le lemme suivant:

Lemme

La fonction J satisfait l'équation différentielle:

$$\mathcal{K}(J) + 3\,\mathcal{L}_1(k)\,J = 0.$$

Cas $W \neq 0$

La normalisation

$$\mathrm{c} = W$$

conduit à une G_5 structure P^5, puis à la normalisation du dernier paramètre de groupe, via l'équation:

$$0 = -2\,\overline{\epsilon} - \frac{\overline{\mathcal{L}_1}\,(W)}{W\overline{W}} - \frac{1}{3}\,\frac{\overline{\mathcal{L}_1}\,\big(\overline{\mathcal{L}_1}(k)\big)}{W\overline{\mathcal{L}_1}(k)} + \frac{1}{3}\,\frac{\overline{P}}{\overline{W}}.$$

On utilise de manière cruciale le lemme suivant:

Lemme

La fonction W satisfait l'équation différentielle:

$$\overline{\mathcal{K}}(W) + 2\,\overline{\mathcal{L}_1}(k)\,\overline{W} = 0.$$

Cas $J = W = 0$

On effectue deux prolongations successives de P^4. On obtient un fibré P_{prol} de dimension 10 et une $\{e\}$-structure sur P_{prol}, constituée des 10 formes: ρ, κ, ζ, $\overline{\kappa}$, $\overline{\zeta}$, π^1, π^2, $\overline{\pi^1}$, $\overline{\pi^2}$, Λ, qui satisfont les équations de structure:

$$
\begin{aligned}
d\rho &= \pi^1 \wedge \rho + \overline{\pi^1} \wedge \rho + i\, \kappa \wedge \overline{\kappa}, \\
d\kappa &= \pi^1 \wedge \kappa + \pi^2 \wedge \rho + \zeta \wedge \overline{\kappa}, \\
d\zeta &= i\, \pi^2 \wedge \kappa + \pi^1 \wedge \zeta - \overline{\pi^1} \wedge \zeta, \\
d\pi^1 &= i\, \kappa \wedge \overline{\pi^2} + \zeta \wedge \overline{\zeta} + \Lambda \wedge \rho, \\
d\pi^2 &= \pi^2 \wedge \overline{\pi^1} + \zeta \wedge \overline{\pi^2} + \Lambda \wedge \kappa, \\
d\Lambda &= i\, \pi^2 \wedge \overline{\pi^2} + \Lambda \wedge \pi^1 + \Lambda \wedge \overline{\pi^1}.
\end{aligned}
$$

Fin de la preuve du théorème

Ce sont les équations de structure du tube au-dessus du cône de lumière.

Théorème

La cubique de Beloshapka,

$$\mathrm{B}: \qquad \begin{aligned} w_1 &= \overline{w_1} + 2\,i\,z\bar{z}\,, \\ w_2 &= \overline{w_2} + 2\,i\,z\bar{z}\,(z+\bar{z})\,, \end{aligned}$$

possède une algèbre de Lie d'automorphismes infinitśimaux de dimension **5***. Une base des formes de Maurer-Cartan de* $\mathrm{aut}_{\mathrm{CR}}(\mathrm{B})$ *est donnée par les* 5 *formes différentielles* σ, ρ, ζ, $\overline{\zeta}$, α, *qui satisfont aux équations de Maurer-Cartan:*

$$\begin{aligned} d\sigma &= 3\,\alpha\wedge\sigma + \rho\wedge\zeta + \rho\wedge\overline{\zeta}\,, \\ d\rho &= 2\,\alpha\wedge\rho + i\;\zeta\wedge\overline{\zeta}\,, \\ d\zeta &= \alpha\wedge\zeta\,, \\ d\overline{\zeta} &= \alpha\wedge\overline{\zeta}\,, \\ d\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Théorème

Le modèle de la classe III_2:

$$\mathrm{N}: \qquad \begin{aligned} w_1 &= \overline{w_1} + 2\, i\, z\bar{z}, \\ w_2 &= \overline{w_2} + 2\, i\, z\bar{z}\,(z+\bar{z})\,, \\ w_3 &= \overline{w_3} + 2i\, z\bar{z}(z^2 + \frac{3}{2}\, z\bar{z} + \bar{z}^2), \end{aligned}$$

possède une algèbre de Lie d'automorphismes infinitśimaux de dimension **6***. Une base des formes de Maurer-Cartan de* $\mathrm{aut}_{\mathrm{CR}}(\mathrm{N})$ *est constituée par les* 6 *formes différentielles* τ, σ, ρ, ζ, $\overline{\zeta}$, α, *qui satisfont aux équations de Maurer-Cartan:*

$$\begin{aligned} d\tau &= 4\,\alpha\wedge\tau + \sigma\wedge\zeta + \sigma\wedge\overline{\zeta}\,, \\ d\sigma &= 3\,\alpha\wedge\sigma + \rho\wedge\zeta + \rho\wedge\overline{\zeta}\,, \\ d\rho &= 2\,\alpha\wedge\rho + i\;\zeta\wedge\overline{\zeta}\,, \\ d\zeta &= \alpha\wedge\zeta\,, \\ d\overline{\zeta} &= \alpha\wedge\overline{\zeta}\,, \\ d\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Théorème

Le tube au-dessus du cône de lumière:

$$\mathrm{LC}: \qquad (\mathrm{Re}\, z_1)^2 - (\mathrm{Re}\, z_2)^2 - (\mathrm{Re}\, z_3)^2 = 0, \qquad \mathrm{Re}\, z_1 > 0.$$

possède une algèbre de Lie d'automorphismes infinitśimaux de dimension **10***. Une base des formes de Maurer-Cartan de* $\mathrm{aut}_{CR}(\mathrm{LC})$ *est constituée par les* 10 *formes différentielles* ρ, κ, ζ, $\overline{\kappa}$, $\overline{\zeta}$, π^1, π^2, $\overline{\pi^1}$, $\overline{\pi^2}$, Λ, *qui satisfont les équations de Maurer-Cartan:*

$$\begin{aligned}
d\rho &= \pi^1 \wedge \rho + \overline{\pi^1} \wedge \rho + i\, \kappa \wedge \overline{\kappa},\\
d\kappa &= \pi^1 \wedge \kappa + \pi^2 \wedge \rho + \zeta \wedge \overline{\kappa},\\
d\zeta &= i\, \pi^2 \wedge \kappa + \pi^1 \wedge \zeta - \overline{\pi^1} \wedge \zeta,\\
d\pi^1 &= i\, \kappa \wedge \overline{\pi^2} + \zeta \wedge \overline{\zeta} + \Lambda \wedge \rho,\\
d\pi^2 &= \pi^2 \wedge \overline{\pi^1} + \zeta \wedge \overline{\pi^2} + \Lambda \wedge \kappa,\\
d\Lambda &= i\, \pi^2 \wedge \overline{\pi^2} + \Lambda \wedge \pi^1 + \Lambda \wedge \overline{\pi^1}.
\end{aligned}$$

Théorème

Soit M une variété CR appartenant à la classe II. *Il existe un sous-fibré P du fibré des co-repères $\mathbb{C} \otimes F(M)$ de M et un co-repère $\omega := (\Lambda, \sigma, \rho, \zeta, \overline{\zeta})$ de P tel que tout CR-difféomorphisme h de M induit un difféomorphisme h^* de P satisfaisant $h^*(\omega) = \omega$. De plus, les équations de structure de ω sur P sont de la forme:*

$$
\begin{aligned}
d\sigma &= 3\,\Lambda \wedge \sigma + \rho \wedge \zeta + \rho \wedge \overline{\zeta}, \\
d\rho &= 2\,\Lambda \wedge \rho + i\, \zeta \wedge \overline{\zeta} \\
d\zeta &= \Lambda \wedge \zeta + \mathfrak{I}_1\, \sigma \wedge \rho + \mathfrak{I}_2\, \sigma \wedge \zeta + \mathfrak{I}_3\, \sigma \wedge \overline{\zeta} + \mathfrak{I}_4\, \rho \wedge \zeta + \mathfrak{I}_5\, \rho \wedge \overline{\zeta}, \\
d\overline{\zeta} &= \Lambda \wedge \overline{\zeta} + \overline{\mathfrak{I}_1}\, \sigma \wedge \rho + \overline{\mathfrak{I}_3}\, \sigma \wedge \zeta + \overline{\mathfrak{I}_2}\, \sigma \wedge \overline{\zeta} + \overline{\mathfrak{I}_5}\, \rho \wedge \zeta + \overline{\mathfrak{I}_4}\, \rho \wedge \overline{\zeta}, \\
d\Lambda &= \frac{i}{2} \mathfrak{I}_1\, \sigma \wedge \overline{\zeta} - \frac{i}{2}\, \overline{\mathfrak{I}_1}\, \sigma \wedge \zeta - \frac{1}{3} \left(\mathfrak{I}_2 + \overline{\mathfrak{I}_3} \right) \rho \wedge \zeta - \frac{1}{3} \left(\overline{\mathfrak{I}_2} + \mathfrak{I}_3 \right) \rho \wedge \zeta \\
&\quad + \mathfrak{I}_0\, \sigma \wedge \zeta \,,
\end{aligned}
$$

où $\mathfrak{I}_0$, $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}_3$, $\mathfrak{I}_4$, $\mathfrak{I}_5$, sont des fonctions sur P.

Théorème

Soit M une variété CR appartenant à la classe III_2. *Il existe un sous-fibré P du fibré des co-repères* $\mathbb{C} \otimes F(M)$ *de M et un co-repère* $\omega := (\Lambda, \tau, \sigma, \rho, \zeta, \overline{\zeta})$ *de P tel que tout CR-difféomorphisme h de M induit un difféomorphisme* h^* *de P satisfaisant* $h^*(\omega) = \omega$. *De plus, les équations de structure de* ω *sur P sont de la forme:*

$$d\tau = 4\,\Lambda \wedge \tau + \mathfrak{J}_1\,\tau \wedge \zeta - \mathfrak{J}_1\,\tau \wedge \overline{\zeta} + 3\,\mathfrak{J}_1\,\sigma \wedge \rho + \sigma \wedge \zeta + \sigma \wedge \overline{\zeta}\,,$$

$$\begin{aligned} d\sigma = 3\,\Lambda \wedge \sigma \\ &+ \mathfrak{J}_2\,\tau \wedge \rho + \mathfrak{J}_3\,\tau \wedge \zeta + \overline{\mathfrak{J}_3}\,\tau \wedge \overline{\zeta} + \mathfrak{J}_4\,\sigma \wedge \rho \\ &- \frac{\mathfrak{J}_1}{2}\,\sigma \wedge \zeta + \frac{\mathfrak{J}_1}{2}\,\sigma \wedge \overline{\zeta} + \rho \wedge \zeta + \rho \wedge \overline{\zeta}, \end{aligned}$$

Théorème

$$d\rho = 2\Lambda \wedge \rho$$
$$+ \mathfrak{J}_5\, \tau \wedge \sigma + \mathfrak{J}_6\, \tau \wedge \rho + \mathfrak{J}_7\, \tau \wedge \zeta + \overline{\mathfrak{J}_7}\, \tau \wedge \overline{\zeta} + \mathfrak{J}_8\, \sigma \wedge \rho + \mathfrak{J}_9\, \sigma \wedge \zeta$$
$$+ \overline{\mathfrak{J}_9}\, \sigma \wedge \overline{\zeta} - \frac{\mathfrak{J}_1}{2}\, \rho \wedge \zeta + \frac{\overline{\mathfrak{J}_1}}{2}\, \rho \wedge \overline{\zeta} + i\ \zeta \wedge \overline{\zeta}\ ,$$

$$d\zeta = \Lambda \wedge \zeta$$
$$+ \mathfrak{J}_{10}\, \tau \wedge \sigma + \mathfrak{J}_{11}\, \tau \wedge \rho + \mathfrak{J}_{12}\, \tau \wedge \zeta + \mathfrak{J}_{13}\, \tau \wedge \overline{\zeta}$$
$$+ \mathfrak{J}_{14}\, \sigma \wedge \rho + \mathfrak{J}_{15}\, \sigma \wedge \zeta\ ,$$

$$d\Lambda = \sum_{\nu\mu} X_{\nu\mu}\, \nu \wedge \mu\ , \qquad \nu,\ \mu = \tau,\ \sigma,\ \rho,\ \zeta, \overline{\zeta},$$

où $\mathfrak{J}_i$, $X_{\nu\mu}$, sont des fonctions sur P.