Notions de positivité et d'amplitude des fibrés vectoriels
Théorèmes d'annulation sur les variétés kählériennes

Christophe Mourougane

13 janvier 1997

Il m'a fallu plusieurs pages copieusement raturées pour m'apercevoir qu'il est vain d'espérer remercier en quelques mots une personne qui pendant plusieurs années m'a fait part de ses connaissances et de ses intuitions, une personne qui a écouté mes idées avec attention et sans complaisance, une personne qui a entretenu et a né mon goût pour les mathématiques, une personne si sympathique. Je remercie Jean-Pierre Demailly.

Le texte que vous allez lire et mes connaissances mathématiques contiennent des touches de couleurs qui m'ont été inspirées par de nombreux mathématiciens, des amis, des enseignants, des rencontres d'un jour, des referees. Je tiens à les remercier.

Je tiens à remercier Arnaud Beauville et Eckart Viehweg pour avoir minutieusement lu ce texte et pour avoir fait des remarques.

Je tiens à remercier les membres du jury pour l'intérêt qu'ils témoignent pour mon travail.

Il y a à l'Institut Fourier des personnes dont l'aide qu'ils apportent, dont les sourires et les mots d'humeur colorent le quotidien. Je tiens à les remercier.

Table des matières

INTRODUCTION

. Introduction générale

L'idée directrice de ce texte est de relier les propriétés de positivité algébriques, analytiques et cohomologiques des fibrés vectoriels holomorphes sur les variétés analytiques complexes compactes lisses.

Soit $E \to X$ un fibré vectoriel holomorphe sur une variété X analytique complexe compacte lisse. Algébriquement, l'amplitude de E est reliée à l'abondance de sections de ses puissances symétriques S^kE : le fibré E est dit très ample si ses sections globales réalisent tous les jets d'ordre 1 à valeurs dans E et tous les couples de valeurs dans $E \oplus E \to X \times X - \Delta_X$. La notation Δ_X désigne la diagonale de $X \times X$. Le fibré E est dit ample si une de ses puissances symétriques est très ample.

Les notions de positivité analytiques se lisent en termes d'existence de métriques hermitiennes sur E à courbure positive : le fibré E est dit strictement positif au sens de Griffiths s'il peut être muni d'une métrique hermitienne de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont la forme de courbure, qui est une $(1,1)-$forme différentielle à valeurs dans le fibré des endomorphismes hermitiens de E, est définie positive sur les tenseurs élémentaires de $TX \otimes E$.

L'annulation des groupes de cohomologie de Dolbeault à valeurs dans E en certains bidegrés (p, q) avec $p + q > \dim X$ fournit des notions de positivité cohomologiques. Rappelons à titre d'exemple le théorème d'annulation d'Akizuki-Kodaira-Nakano :

Théorème. — *Soit $L \to X$ un fibré en droites ample sur une variété X analytique complexe compacte lisse. Alors pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p + q > \dim X$,*

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes L) = 0.$$

Ces notions cohomologiques ont d'importantes conséquences géométriques en particulier pour l'extension de sections holomorphes.

Nous donnerons des définitions précises de positivité dans les préliminaires et dans chaque chapitre. Dans ce chapitre introductif, le mot positif est à prendre en un sens très flexible. Ce texte est composé de trois parties largement indépendantes.

Images directes de fibrés en droites adjoints

D'après une conjecture de P. A. Griffiths [Gr 69], un fibré vectoriel $E \to X$ ample sur une variété X projective lisse serait strictement positif au sens de Griffiths. Ce résultat est élémentaire pour les fibrés en droites et les fibrés vectoriels très amples. Il a été démontré par H. Umemura [Um 73] sur les courbes en se ramenant au cas d'un fibré ample et stable. Ce dernier résultat a été précisé par F. Campana et H. Flenner [C-F 90] : il existe un revêtement fini ramifié de la courbe X tel que l'image réciproque de E soit quotient d'une somme de fibrés en droites amples.

Nous obtenons dans cette direction le

Théorème. — *Soit $E \to X$ un fibré vectoriel ample sur un espace projectif, une variété abélienne, ou une variété torique projective. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le fibré vectoriel $S^kE \otimes \det E$ est strictement positif au sens de Gri ths.*

L'hypothèse sur la variété de base X assure l'existence d'une auto-application $\theta : X \to X$ qui augmente la polarisation choisie.

Ce théorème est corollaire d'une étude des propriétés de positivité du faisceau image directe $\varphi_\star(K^\varphi_{X/Y} \otimes L)$ par un morphisme lisse $\varphi : X \to Y$ entre variétés kählériennes compactes lisses d'un fibré en droites L holomorphe semi-positif adjoint par le fibré canonique relatif $K^\varphi_{X/Y}$ de φ.

L'hypothèse naturelle sur le fibré en droites est ici l'effectivité numérique : un fibré en droites $L \to X$ sur une variété X projective lisse est dit numériquement effectif (nef) si son degré sur toute courbe est positif ou nul. Plus généralement, un fibré en droites $L \to X$ sur une variété (X, ω) kählérienne compacte lisse est dit numériquement effectif s'il peut être muni d'une métrique hermitienne de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont la courbure a une partie négative, mesurée par rapport à ω, arbitrairement petite. Un fibré vectoriel $E \to X$ est dit nef si le fibré en droites $\mathscr{O}_E(1) \to \mathbb{P}(E)$ canoniquement associé à E est nef sur $\mathbb{P}(E)$, la variété des hyperplans de E.

Le type de résultat que nous présentons est

Théorème. — *Soient X et Y deux variétés kählériennes compactes lisses, $\varphi : X \to Y$ une submersion et $L \to X$ un fibré en droites holomorphe numériquement e ectif et $\varphi-$ample. Alors le faisceau $\varphi_\star(K^\varphi_{X/Y} \otimes L)$ est localement libre et numériquement e ectif.*

Nous développons en particulier un procédé L^2 de construction de métriques hermitiennes sur $\varphi_\star(K^\varphi_{X/Y} \otimes L)$, introduit par J. P. Demailly [De 92]. Comme les métriques de Bergman, ces métriques prennent en compte les espaces de sections holomorphes de $K^\varphi_{X/Y} \otimes L$ sur les fibres de φ. Nous introduisons aussi une technique de régularisation par transport parallèle des métriques hermitiennes continues sur les fibrés vectoriels holomorphes avec contrôle de la courbure.

Les questions de positivité du faisceau image directe du faisceau canonique relatif ont été abordées dans le cadre projectif entre autres par T. Fujita [Fu 78], Y. Kawamata [Ka 81], J. Kollár [Ko 86] et E. Viehweg [Vi 95]. En particulier, elles sont importantes pour l'étude de l'additivité des dimensions de Kodaira-Iitaka et pour la description de polarisations sur les espaces de modules.

Versions kählériennes du théorème d'annulation de Bogomolov

Notons que l'hypothèse d'amplitude sur le fibré L dans le théorème d'annulation d'Akizuki-Kodaira-Nakano force la variété X à être projective. L'objet de la deuxième partie est d'obtenir sur les variétés kählériennes compactes lisses, sous des hypothèses de semi-positivité pour le fibré en droites L, des théorèmes d'annulation qui étendent, au moins partiellement, le théorème d'annulation d'Akizuki-Kodaira-Nakano. Cette démarche est essentiellement motivée par la perspective d'élaborer une théorie de Mori des variétés kählériennes compactes.

Considérons $L \to X$ un fibré en droites nef sur la variété X kählérienne compacte. Sa dimension numérique notée $\nu(L)$ est le plus grand entier naturel l tel que la classe de cohomologie de De Rham $c_1(L)^l$ ne soit pas nulle.

Une idée-force est l'utilisation du théorème de Calabi-Yau pour la construction d'une suite de métriques hermitiennes h_ε de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur le fibré en droites L nef afin de répartir de mieux en mieux la positivité de L sur la variété kählérienne compacte (X, ω), de même que sur une variété projective polarisée $(X, ic_h(L))$, la courbure $ic_h(L)$ de (L, h) est parfaitement répartie.

Nous parvenons dans le cadre kählérien, à une généralisation du théorème d'annulation de F. Bogomolov [Bo 78] :

Théorème. — *Soit $L \to X$ un fibré en droites numériquement e ectif de dimension numérique $\nu(L)$ sur une variété X kählérienne compacte lisse de dimension n. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$ avec $p > n - \nu(L)$,*

$$H^n(X, \Omega_X^p \otimes L) = 0.$$

Au cours de la démonstration, nous obtenons que les métriques h_ε permettent de réaliser la dimension numérique $\nu(L)$ comme le nombre de valeurs propres de courbure strictement positives sur un ensemble de mesure de plus en plus grande à mesure que ε tend vers zéro.

Parvenir par cette méthode au théorème d'annulation de type Kawamata-Viehweg (i.e. sous les hypothèses du théorème précédent, l'annulation des groupes $H^q(X, \Omega_X^n \otimes L) = 0$ en degrés $q > n - \nu(L)$) nécessiterait un contrôle fin des différents représentants harmoniques pour les différentes métriques hermitiennes h_ε d'une classe dans la cohomologie de Dolbeault $H^{n,q}(X, L)$. Ce point reste encore incomplet dans l'article d'I. Enoki [En 93].

Les résultats obtenus s'étendent aux variétés de Fujiki (i.e. les variétés qui sont des modifications de variétés kählériennes compactes.)

Annulation générique des groupes de cohomologie d'un fibré semi-négatif

D'une part, sous des hypothèses de stricte positivité algébrique ou analytique pour le fibré en droites L, le théorème d'annulation d'Akizuki-Kodaira-Nakano conduit à la positivité cohomologique de L. D'autre part, les travaux de M. Green et R. Lazarsfeld [G-L 87] [G-L 91] décrivent la cohomologie générique des fibrés topologiquement triviaux (i.e. de première classe de Chern nulle et qui peuvent donc être munis d'une métrique hermitienne à courbure nulle).

Pour une variété (X, ω) kählérienne compacte, la notation $\mathrm{Pic}^0(X)$ désigne le tore complexe qui paramètre les classes d'isomorphie de fibrés en droites topologiquement triviaux sur X. Pour tout fibré L sur X, nous étudions les lieux exceptionnels de cohomologie des déformations de L par produit tensoriel par les fibrés en droites topologiquement triviaux :

$$S^q(L) := \left\{ y \in \mathrm{Pic}^0(X) / H^q(L \otimes \lambda_y) \neq 0 \right\}$$

où λ_y désignera un représentant de $y \in \mathrm{Pic}^0(X)$.

Nous obtenons pour un fibré en droites L semi-négatif (ou bien par dualité de Serre pour $K_X \otimes L$ où L est un fibré en droites semi-positif) des théorèmes d'annulation générique et de structure des lieux exceptionnels dont le prototype est

Théorème. — *Soient (X, ω) une variété kählérienne compacte lisse de dimension d'Albanese* $\dim \alpha(X)$ *et $L \to X$ un fibré en droites dont le dual est globalement engendré. Alors, pour* *tout entier q strictement inférieur à* $\dim \alpha(X)$, *le lieu exceptionnel* $S^q(L)$ *est un ensemble analytique réunion de translatés de sous-tores de* $\mathrm{Pic}^0(X)$ *de codimension supérieure à* $\dim \alpha(X) - q$. *De plus,* $S^q(L) \subset S^q(L^2) \subset S^q(L^3) \subset \cdots$.

Ici $\alpha : X \to \mathrm{Alb}(X)$ est le morphisme d'Albanese de X.

Hormis la dernière assertion, ce théorème s'étend sur les variétés projectives, aux fibrés en droites de dual numériquement effectif et abondant (i.e. de dimension numérique égale à la dimension de Kodaira-Iitaka). En effet, les lieux exceptionnels se transforment de façon naturelle au cours de modifications et de revêtements galoisiens de la variété de base.

Nous donnons aussi des versions pour les fibrés vectoriels obtenues principalement par des constructions d'images directes de fibrés en droites.

Nous retrouvons, à l'aide de la structure des lieux exceptionnels, des propriétés de périodicité dues à S.D. Cutkosky et V. Srinivas [C-S 93] de la fonction

$$k \mapsto h^q(L \otimes \mu^k)$$

où μ est un fibré en droites numériquement plat (i.e. dont la première classe de Chern est de torsion).

A partir d'idées présentes dans les travaux d' H. Skoda [Sk 78] sur la surjectivité des morphismes entre fibrés vectoriels, nous déterminons des cas où les fibrés en droites topologiquement triviaux ne modifient pas la cohomologie de L.

Il a fallu en particulier élaborer une théorie de Hodge des fibrés semi-négatifs. Il n'y a pas en général de conjugaison naturelle sur la cohomologie à valeurs dans L, si L est semi-négatif. Cependant, les formes harmoniques à valeurs dans L se comportent simplement par les principales opérations, notamment le produit extérieur. Nous obtenons dans ce cadre un théorème d'injectivité de l'application induite en cohomologie par le produit tensoriel par une section d'un fibré en droites semi-négatif, qui étend un résultat de J. Kollár. Nous étudions aussi les morphismes de Lefschetz de multiplication par la forme de Kähler agissant sur la cohomologie des fibrés semi-négatifs :

THÉORÈME. — *Si $p + q \leqslant n$ et si F est semi-positif, alors le morphisme de Lefschetz*

$$\omega^{n-p-q} \wedge \,:\, H^{p,q}(X, F) \longrightarrow H^{n-q,n-p}(X, F)$$

est surjectif.

Nous donnons une application de nos résultats au calcul de la caractéristique d'Euler de variétés définies par une section d'un fibré vectoriel semi-positif.

Certains résultats de M. Green et R. Lazarsfeld ont été conjecturés et exploités par A. Beauville [Be 88] et F. Catanese [Ca 91] pour l'étude des systèmes paracanoniques des variétés irrégulières. L. Ein et R. Lazarsfeld [E-L 96] ont résolu des conjectures de J. Kollár [Ko 95] sur les variétés de type d'Albanese général par les méthodes développées dans [G-L 91].

. Préliminaires

. . Géométrie di érentielle complexe

. . . Condition de Kähler.

Soit X une variété analytique complexe lisse munie d'une métrique hermitienne g de classe $\mathscr{C}^\infty$. La métrique g permet de mesurer les vecteurs du fibré tangent $TX := (T_\mathbb{R}X, J)$ muni de la structure complexe J. Elle permet par suite de mesurer les vecteurs du complexifié de l'espace tangent $T_\mathbb{C}X := (T_\mathbb{R}X \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}, Id \otimes i\times)$. On notera $T^{1,0}X$ et $T^{0,1}X$ les espaces propres de l'endomorphisme $J \otimes Id : T_\mathbb{C} \to T_\mathbb{C}$ pour les valeurs propres i et $-i$ respectivement. Ainsi, $T_\mathbb{C}X = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$.

Après oubli de la structure complexe J sur $T_\mathbb{R}X$, la partie réelle de la métrique hermitienne g fournit sur X une métrique riemannienne $g_\mathbb{R}$. La connexion de Levi-Civita associée sera notée ∇. La partie imaginaire de g est une $2-$forme différentielle sur X notée par commodité $-\omega/2$. La forme ω est réelle, de type $(1,1)$. Réciproquement, si Ω est une forme différentielle, réelle, de type $(1,1)$, $\xi \to \Omega(\xi, J\xi)/2$ définit par polarisation, en tout point de X, une forme G sesquilinéaire à symétrie hermitienne. On dira que Ω est définie positive si G l'est. Par ce procédé, la donnée d'une métrique hermitienne est équivalente à la donnée d'une forme réelle, de type $(1,1)$, définie positive.

Définition 2.1. — *Une forme réelle de type $(1,1)$ définie positive est dite de Kähler si elle est $d-$fermée. Une métrique g est dite kählérienne si la forme ω associée est une forme de Kähler.*

Cette condition est souvent utilisée par les caractérisations suivantes.

Proposition 2.2. — *([Wu] first lecture) Il y a équivalence entre*

(i) La métrique g est kählérienne i. e. $d\omega = 0$.

(ii) Les fibrés $T^{1,0}X$ et $T^{0,1}X$ sont conservés par la connexion de Levi-Civita $\nabla_\mathbb{C}$ sur $T_\mathbb{C}X$ associée à la métrique riemannienne $g_\mathbb{R} \otimes |\ |^2_\mathbb{C}$ i. e. $\nabla J = 0$.

(iii) Pour tout $x \in X$, il existe un système de coordonnées holomorphes $(z_1, \cdots, z_n)$ centré en x dans lequel l'écriture locale de ω est de la forme

$$\omega \simeq i\sum_j dz_j \wedge d\overline{z}_j - i\sum_{jklp} c_{jklp} z_l \overline{z}_p dz_j \wedge d\overline{z}_k + O(|z|^3).$$

(Un tel système est dit $\omega-$géodésique en x.)

(ii) montre que la condition de Kähler impose une relation forte entre la structure complexe et la structure métrique sur X.

(iii) montre que les relations entre opérateurs différentiels du premier ordre (relations de Hodge) sur une variété kählérienne lisse seront analogues à celles obtenues sur l'espace hermitien plat $(\mathbb{C}^n, |\ |^2)$.

. . . Connexion de Chern d'un fibré vectoriel holomorphe hermitien.

Soient X une variété analytique complexe lisse et $(E,h)\to X$ un fibré vectoriel holomorphe hermitien (i.e. muni d'une métrique hermitienne de classe $\mathscr{C}^\infty$) de rang r sur X. Le fibré vectoriel holomorphe $TX = (T_{\mathbb{R}}X, J)$ est isomorphe à $(T^{1,0}X, \times i)$ tandis que son conjugué $\overline{TX} := (T_{\mathbb{R}}X, -J)$ est isomorphe à $(T^{0,1}X, \times i)$. Ainsi,

$$\bigwedge^d T^\star_{\mathbb{C}}X = \bigwedge^d (T^\star X + \overline{T^\star X}) = \bigoplus_{p+q=d} \bigwedge^{p,q} T^\star X$$

où $\bigwedge^{p,q} T^\star X := \bigwedge^p T^\star X \wedge \bigwedge^q \overline{T^\star X}$.

On notera $\mathscr{C}^\infty(X, \bigwedge^{p,q} T^\star X \otimes E) = A^{p,q}(X,E)$ l'espace des $(p,q)-$formes de classe $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs dans le fibré vectoriel holomorphe E. La donnée de la métrique hermitienne h permet de définir en tout point $x\in X$ un accouplement sesquilinéaire

$$\{\ ,\ \} : \bigwedge^d T^\star_{\mathbb{C},x}X \otimes E_x \times \bigwedge^{d'} T^\star_{\mathbb{C},x}X \otimes E_x \to \bigwedge^{d+d'} T^\star_{\mathbb{C},x}X$$

par

$$\{u\otimes e, u'\otimes e'\} := h(e,e')u\wedge \overline{u'}.$$

Une connexion $D : \mathscr{C}^\infty(X,E) \to \mathscr{C}^\infty(X, T^\star_{\mathbb{C}}X\otimes E)$ est dite *compatible avec la structure complexe de E* si sa partie de type $(0,1)$, $D^{0,1} : \mathscr{C}^\infty(X,E) \to \mathscr{C}^\infty(X, \overline{T^\star X}\otimes E)$, coïncide avec l'opérateur de structure $\overline{\partial}_E$.

Une connexion D sur le fibré hermitien (E,h) est dite *hermitienne* si pour toutes sections locales e et e' de E,

$$dh(e,e') = \{De, e'\} + \{e, De'\}.$$

Proposition 2.3. — *Sur un fibré holomorphe hermitien (E,h), il existe une unique connexion hermitienne compatible avec la structure complexe. Elle est appelée connexion de Chern de (E,h). Sa courbure, appelée courbure de Chern de (E,h) ou courbure de h et notée $ic_h(E)$, est une $(1,1)-$forme à valeurs dans le fibré des endomorphismes hermitiens de (E,h).*

On définira par la suite d'autres opérateurs différentiels agissant sur des espaces de formes. Pour deux tels opérateurs A et B de degré respectif a et b, on pose

$$[A,B] := AB - (-1)^{ab}BA.$$

. . Notions de positivité

. . . Conventions.

Sur une variété analytique complexe lisse, on parlera indifféremment d'un diviseur D, du faisceau localement libre $\mathscr{O}(D)$ des fonctions méromorphes m telles que div$m+D$ soit effectif et du fibré en droites dont les sections holomorphes locales décrivent le faisceau $\mathscr{O}(D)$.

Le dual d'un fibré vectoriel E sera noté $E^\star$. Cependant, on utilisera aussi la notation E^{-1} si E est un fibré en droites.

. . . Définitions algébriques.

Soit $E \to X$ un fibré vectoriel holomorphe sur une variété X analytique complexe lisse. On désignera par Δ_X la diagonale de $X \times X$ et par $J^1 E$ le fibré vectoriel holomorphe des jets d'ordre 1 de E. On rappelle quelques définitions classiques.

Le fibré E est dit *globalement engendré* si pour tout $x \in X$, l'application d'évaluation des sections globales $H^0(X, E) \to E_x$ est surjective.

Le fibré E est dit *semi-ample* si une de ses puissances symétriques $S^k E$ (avec $k \in \mathbb{N} - \{0\}$) est globalement engendrée.

Le fibré E est dit *très ample* si pour tout $x \in X$, l'application d'évaluation $H^0(X, E) \to J^1 E_x$ est surjective et pour tout $(x, y) \in X \times X - \Delta_X$, l'application d'évaluation $H^0(X, E) \to E_x \oplus E_y$ est surjective.

Le fibré E est dit *ample* si une de ses puissances symétriques $S^k E$ (avec $k \in \mathbb{N} - \{0\}$) est très ample.

On rappelle maintenant le critère d'amplitude de Seshadri :

Proposition 2.4. — *[Ha] Un fibré en droites $L \to X$ holomorphe sur une variété X projective est ample si et seulement si il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\forall C \text{ courbe de } X, \deg_C L > \varepsilon \max_{x \in C} \operatorname{mult}_x C$$

où $\deg_C L$ *est le degré du fibré L sur la courbe C et* $\operatorname{mult}_x C$ *la multiplicité de la courbe C au point x.*

Ce critère motive la notion d'effectivité numérique. La définition qui suit repose sur le caractère projectif de la variété de base.

Définition 2.5. — *Un fibré $E \to X$ vectoriel holomorphe sur une variété X projective lisse est dit* numériquement effectif (nef) *si pour tout morphisme f d'une courbe dans X, tout quotient localement libre de rang 1 de $f^\star E$ est de degré positif ou nul.*

Par le critère d'amplitude de Seshadri, sur une variété projective lisse, un fibré en droites est nef si et seulement si sa première classe de Chern $c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{R})$ est dans l'adhérence du cône convexe des classes de diviseurs amples.

. . . Définitions analytiques.

Une $(1, 1)-$forme alternée Θ sur un espace vectoriel complexe (T, J) à valeurs dans l'espace des endomorphismes hermitiens d'un espace vectoriel hermitien $(V, \langle \ , \ \rangle)$ est dite *semi-positive au sens de Gri ths* (resp. *strictement positive au sens de Gri ths*) si

$$\forall \xi \otimes v \in T \otimes V - \{0\}, \ \langle (\xi, J\xi) \rfloor \Theta v, v \rangle \geqslant 0 \ (\text{ resp.} > 0).$$

On notera $\Theta \geqslant_{\text{Griff}} 0$ (resp. $\Theta >_{\text{Griff}} 0$).

La forme Θ est dite *semi-positive au sens de Nakano* si considérée comme forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne sur $T \otimes V$, elle est semi-positive.

Définition 2.6. — *[Gr] Un fibré vectoriel holomorphe E sur une variété X analytique complexe lisse est dit* semi-positif au sens de Griffiths *resp.* semi-positif au sens de Nakano *s'il peut être muni d'une métrique h hermitienne de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont la courbure de Chern, $(1,1)-$forme di érentielle à valeurs dans le fibré des endomorphismes hermitiens de (E,h), est semi-positive au sens de Gri ths (resp. semi-positive au sens de Nakano) en tout point de X.*

Suivant le théorème 1.12 de [D-P-S 94], on pose la

Définition 2.7. — *Un fibré vectoriel holomorphe $E \to X$ sur une variété X analytique complexe lisse est dit* numériquement effectif *s'il existe une suite (h_m) de métriques hermitiennes de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur S^mE telle que, pour une métrique ω fixée sur X,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists m_0 \,/\, \forall m \geqslant m_0,\ \forall x \in X,\ \ ic_{h_m}(S^mE) + m\varepsilon\omega \otimes Id_E \geqslant_{Gri} 0.$$

Le théorème 4.1 de [De 92'] permet construire des métriques hermitiennes sur E à partir de métriques hermitiennes sur le fibré en droites $\mathscr{O}_E(1) \to \mathbb{P}(E)$ canoniquement associé à E sur $\mathbb{P}(E)$, la variété des hyperplans de E. C'est la clef de la

Proposition 2.8. — *Un fibré vectoriel $E \to X$ sur une variété X analytique complexe lisse est nef (resp ample) si et seulement si le fibré en droites $\mathscr{O}_E(1)$ est nef (resp. ample) sur $\mathbb{P}(E)$.*

L'analogue pour la stricte positivité au sens de Griffiths est l'objet de la conjecture de Griffiths. Cete proposition sert en particulier à montrer que si X est projective, la définition analytique de l'effectivité numérique est équivalente à la définition algébrique : on est ramené aux cas des fibrés en droites pour lequel il suffit d'appliquer le critère de Seshadri.

. . . Des propriétés algébriques aux propriétés analytiques.

La construction de métriques hermitiennes à courbure semi-positive sur un fibré vectoriel holomorphe $E \to X$ de rang r globalement engendré est obtenue par l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi_E : & X & \to & \mathrm{Grass}(r, H^0(X,E)) \\ & x & \mapsto & \{s \in H^0(X,E)/s(x) = 0\} \end{array}$$

de X dans la variété grassmannienne des sous espaces de codimension r de $H^0(X,E)$. En effet, le fibré vectoriel E est alors obtenu comme image réciproque par Φ_E du fibré quotient universel sur $\mathrm{Grass}(r, H^0(X,E))$ ([G-H 78] page 207). Reste à noter que la métrique quotient d'une métrique plate sur le fibré vectoriel trivial $\mathrm{Grass}(r, H^0(X,E)) \times H^0(X,E)$ est à courbure semi-positive au sens de Griffiths ([Gr 69] 2.d).

Pour un fibré en droites L effectif (i. e. qui admet une section holomorphe non nullle), on dispose d'une application rationnelle

$$\Phi_L : X - - \to \mathrm{Grass}(1, H^0(X,L)) =: \mathbb{P}(H^0(X,L)).$$

Le rang générique de la courbure de la métrique (singulière) image réciproque sur L est la dimension de l'image de Φ_L.

Définition 2.9. — *La dimension de Kodaira-Iitaka de L, notée $\kappa(L)$, est le maximum des rangs des applications rationnelles $\Phi_{L^m} : X - - \to \mathbb{P}(H^0(X,L^m))$, $(m \geqslant 1)$, avec par convention $\kappa(L) = -\infty$ si aucune puissance tensorielle de L n'a de section holomorphe non nulle.*

. . . Des propriétés analytiques aux propriétés algébriques.

On montre à l'aide de la théorie des estimations L^2 qu'un fibré vectoriel E strictement positif au sens de Griffiths sur une variété analytique complexe lisse compacte est ample. On construit pour cela explicitement des sections holomorphes de $\mathscr{O}_E(1)$ avec des jets prescrits en deux points quelconques de $\mathbb{P}(E)$.

L'outil principal est le

THÉORÈME 2.1. — *[De] Soit q un entier strictement positif. Soit (X, ω) une variété kählérienne complète lisse de dimension n. Soit $L \to X$ un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique hermitienne singulière $h \simeq |\ |^2 e^{-\varphi}$ à poids φ localement intégrable telle que, au sens des courants*

$$ic_h(L) \geqslant \omega \text{ i.e. localement } i\partial\overline{\partial}\varphi \geqslant \omega.$$

Alors pour toute forme $u \in L^2(\bigwedge^{n,q} T^\star X \otimes L, \omega, h)$, $\overline{\partial}_L$ −fermée, il existe une forme $v \in L^2(\bigwedge^{n,q-1} T^\star X \otimes L, \omega, h)$ telle que $u = \overline{\partial}_L v$. De plus, on a l'estimation L^2

$$\int_X |v|^2 e^{-\varphi} dv_\omega \leqslant \frac{1}{q} \int_X |u|^2 e^{-\varphi} dv_\omega.$$

Ici, la notation $L^2(\bigwedge^{n,q} T^\star X \otimes L, \omega, h)$ désigne l'espace des (n, q)−formes à valeurs dans le fibré hermitien (L, h) de carré intégrable pour les métriques ω et h.

Le choix de poids à pôles logarithmiques et l'estimation L^2 suffisent pour obtenir les jets souhaités.

Première partie

IMAGES DIRECTES DE FIBRÉS EN DROITES ADJOINTS

. Introduction

L'objet de cette partie est l'étude des propriétés d'amplitude et de positivité sur Y de l'image directe $\varphi_\star L$ d'un fibré en droites holomorphe L par un morphisme lisse $\varphi : X \to Y$ entre variétés analytiques complexes compactes connexes lisses. Nous montrerons qu'en général l'amplitude de L n'implique pas celle de l'image directe $\varphi_\star L$, mais seulement celle de l'image directe $\varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)$ du fibré adjoint par le fibré canonique relatif.

Des résultats dans cette direction ont été démontrés par Fujita [Fu 78] dans le cas où Y est une courbe, par Kawamata [Ka 81] et Kollár [Ko 86] pour l'image directe du fibré canonique relatif sur les variétés projectives. Citons le résultat principal de Kawamata, dont la démonstration a été simplifiée par Kollár :

Théorème. — *Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme surjectif entre variétés projectives lisses. Supposons que le diviseur de ramification soit à croisements normaux et qu'en dehors d'un ensemble de codimension , les fibres de φ soient réduites.*
Alors $\varphi_\star(K_{X/Y})$ est localement libre et numériquement e ectif.

En découle par utilisation de revêtements cycliques, le

Corollaire. — *([Vi] corollaire .). Soient $\varphi : X \to Y$ un morphisme surjectif lisse entre deux variétés projectives lisses et $L \to X$ un fibré en droites semi-ample.*
Alors $\varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)$ est localement libre et numériquement e ectif.

Les méthodes utilisées dans le cadre analytique conduisent à des propriétés de positivité en termes de tenseurs de courbure, a priori plus fortes que les propriétés de positivité algébriques.

Nous obtenons des applications en direction de la conjecture de Griffiths reliant amplitude et positivité des fibrés vectoriels ([Gr 69], problème 0.9), et pour la classification des variétés kählériennes compactes dont le fibré tangent est numériquement effectif [D-P-S 94].

. . Définitions

Pour tout morphisme $f : X \to Y$ entre variétés algébriques ou analytiques complexes lisses, nous noterons $K^f_{X/Y}$ ou $K_{X/Y}$ *le fibré en droites canonique relatif* $K_X \otimes f^\star K_Y^{-1}$. Si f est un morphisme fini, $K_{X/Y}$ est le fibré en droites associé au diviseur de ramification du morphisme f. Si f est une submersion, $K_{X/Y}$ est égal au déterminant du faisceau des différentielles relatives $\Omega_{X/Y}$ défini par $\Delta^\star(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)$ où $\Delta : X \to X \times_Y X$ est le morphisme diagonal relatif à f et $\mathscr{I}$ le faisceau d'idéaux de $\Delta(X)$ dans $X \times_Y X$.

On utilisera les notions d'amplitude, d'effectivité numérique (définition 2.7) et de positivité au sens de Griffiths (définition 2.6).

Un fibré en droites sur une variété X est dit *gros* si sa dimension de Kodaira-Iitaka est égale à la dimension de X. Un fibré vectoriel E est dit *gros* si le fibré en droites canoniquement associé $\mathscr{O}_E(1)$ est gros sur $\mathbb{P}(E)$ la variété des hyperplans de E.

Soit f une submersion entre variétés complexes compactes. Un fibré vectoriel sur la source de f est dit *$f-$ample (resp. $f-$nef, resp. $f-$gros)* si ses restrictions à toutes les fibres du morphisme f sont des fibrés amples (resp. nef, resp. gros).

. . Etude d'un exemple

L'image réciproque d'un fibré vectoriel nef (par un morphisme quelconque) est un fibré vectoriel nef. La situation est différente pour les images directes.

Soit $\pi : X \to Y$ le revêtement cyclique ramifié le long d'un diviseur lisse et réduit B donné par une section générique d'un fibré en droites globalement engendré L^k. Alors $\pi_\star \mathscr{O}_X = \bigoplus_{j=0}^{k-1} L^{-j}$ n'est pas nef ; par contre puisque le fibré canonique relatif donné par la ramification est $K_{X/Y} = \pi^\star L^{k-1}$, le faisceau localement libre $\pi_\star K_{X/Y} = \pi_\star(\mathscr{O}_X) \otimes L^{k-1} = \bigoplus_{j=0}^{k-1} L^j$ est nef.

. . Enoncé des résultats

Au paragraphe 5 nous exposons une démonstration algébrique des résultats de positivité pour l'image directe par un morphisme lisse d'un fibré en droites nef et relativement gros adjoint par le fibré canonique relatif.

Théorème 3.1. — *(Version algébrique) Soient $\varphi : X \to Y$ un morphisme surjectif lisse entre deux variétés projectives lisses, et $L \to X$ un fibré en droites ample (resp. numériquement e ectif et $\varphi-$gros).*
Alors $\varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)$ est localement libre et ample (resp. localement libre et numériquement effectif).

En suivant un schéma de démonstration analogue, nous obtenons au paragraphe 6 une version kählérienne de ce résultat.

Théorème 3.2. — *(Version analytique) Soient $\varphi : X \to Y$ une submersion entre deux variétés kählériennes compactes lisses et $L \to X$ un fibré en droites numériquement e ectif et $\varphi-$ample.*
Alors $\varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)$ est localement libre et numériquement e ectif.

Il suffit ici aussi de supposer que L est seulement $\varphi-$gros. Mais la technique est alors plus difficile. La démonstration repose sur la construction de métriques hermitiennes à l'aide d'estimations L^2. Le théorème 3.2 montre en particulier le résultat suivant :

Corollaire 3.1. — *[D-P-S] Soit X une variété kählérienne compacte lisse dont le fibré tangent est numériquement e ectif. Alors, il existe un revêtement étale fini $\widetilde{X} \to X$ tel que, en notant $\alpha_{\widetilde{X}}$ le morphisme d'Albanese de $\widetilde{X}$, pour tout entier naturel k, $\alpha_{\widetilde{X}\star}(K_{X_{\widetilde{X}}}^{-k})$ est un fibré vectoriel numériquement e ectif.*

En ajoutant une hypothèse (H) sur la variété de base, on obtient au paragraphe 7 une conclusion plus forte que celle du théorème 3.1 :

Hypothèse (H). — Il existe sur Y une auto-application $\theta : Y \to Y$ et une métrique kählérienne ω telles que, pour un réel $\alpha > 1$, $\{\theta^\star \omega\} \geqslant \alpha\{\omega\}$.

Ici $\{a\}$ désigne la classe de $i\partial\overline{\partial}$-cohomologie de la (1,1)-forme différentielle a. La notation $\{a\} \geqslant \{b\}$ signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction F de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Y telle que

$$a \geqslant b + i\partial\overline{\partial} F - \varepsilon\omega.$$

Théorème 3.3. — *Soient X et Y deux variétés projectives lisses, $\varphi : X \to Y$ une submersion, et $L \to X$ un fibré en droites ample. Supposons que l'hypothèse* (H) *soit satisfaite sur Y.*

Alors le fibré $\varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)$ est strictement positif au sens de Gri ths (donc ample).

Un outil important de la démonstration est un procédé de régularisation des métriques continues sur un fibré vectoriel.

Le théorème 3.3 a pour corollaire le résultat suivant, qui serait une conséquence de la conjecture de Griffiths.

Corollaire 3.2. — *Soit Y une variété projective lisse dont un revêtement ramifié est une variété projective lisse vérifiant l'hypothèse* (H). *Soit $E \to Y$ un fibré vectoriel ample sur Y. Alors pour tout entier naturel k, $S^k E \otimes \det E$ est strictement positif au sens de Gri ths.*

Ce corollaire s'applique en particulier sur les variétés projectives lisses à courbure sectionnelle holomorphe constante positive ou nulle (i.e. l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ et les variétés revêtues sans ramification par des variétés abéliennes [Ig 54]).

. . Compléments sur l'hypothèse (H)

L'hypothèse (H) est satisfaite par

- les tores compacts : par image réciproque par la multiplication par 2, une métrique kählérienne est multipliée par 4.

- l'espace projectif : pour l'élévation au carré des coordonnées homogènes, l'image réciproque de $\mathcal{O}(1)$ est $\mathcal{O}(2)$.

- plus généralement les variétés toriques [Da 78] : l'élévation au carré des composantes dans les cartes affines $\mathbb{C}^n$ se recolle car les changements de cartes sont des mônomes de Laurent. L'effet de cette auto-application θ sur les fibrés en droites est déterminé par l'effet sur leurs restrictions au tore dense et donc par l'effet sur les caractères de ce tore. Si L est un fibré en droites associé au caractère λ, le fibré $\theta^\star L$ est isomorphe à L^2 puisque le caractère $\theta^\star\lambda$ est égal à λ^2.

Cette hypothèse a été initialement considérée pour retrouver sur $\mathbb{C}$ une application analogue aux morphismes de Frobenius. Elle fournit d'autre part, dans certains contextes, un substitut au produit tensoriel de fibrés en droites.

. Préliminaires

Les lemmes suivants seront utiles dans la manipulation des faisceaux.

Lemme 4.1. — *([Ha] exercice III. .) Formule de projection*

Soient $f : X \to Y$ un morphisme de variétés, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X, et $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre de rang fini sur Y.

Alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, les images directes supérieures $\mathcal{R}^i f_\star(\mathcal{F} \otimes f^\star\mathcal{E})$ et $\mathcal{R}^i f_\star(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{E}$ sont naturellement isomorphes.

Lemme 4.2. — *([Ha] proposition III. .) Formule de changement de base*

Soient $f : X \to Y$ un morphisme de variétés et $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X. Soient Y' une variété et $\theta : Y' \to Y$ un morphisme plat. Soit enfin $X' := X \times_Y Y'$. On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\Theta} & X \\ {\scriptstyle g}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{\theta} & Y \end{array} \quad \textit{avec } \mathscr{F} \to X.$$

Alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\theta^\star \mathscr{R}^i f_\star(\mathscr{F})$ et $\mathscr{R}^i g_\star(\Theta^\star \mathscr{F})$ sont naturellement isomorphes.

Avec les notations précédentes, les faisceaux de différentielles relatives $\Omega_{X'/Y'}$ et $\Theta^\star(\Omega_{X/Y})$ sont isomorphes ([Ha 77] proposition II.8.10). Si de plus f, et par suite g sont des submersions, $K^g_{X'/Y'} = \det(\Omega_{X'/Y'})$ et $\Theta^\star K^f_{X/Y}$ sont isomorphes. On obtient ainsi une formule de changement de base pour les fibrés adjoints : pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\theta^\star \mathscr{R}^i f_\star(K^f_{X/Y} \otimes \mathscr{F}) \simeq \mathscr{R}^i g_\star(K^g_{X'/Y'} \otimes \Theta^\star \mathscr{F}).$$

Cette formule peut aussi être obtenue à partir de la première formule de changement de base par application de la dualité de Serre sur les fibres de f : puisque f est supposée submersive, ses fibres sont réduites et lisses et leur faisceau dualisant coïncide avec la restriction du faisceau canonique relatif.

Dans le cadre analytique, nous utiliserons les lemmes suivants :

Lemme 4.3. — *Soient X une variété complexe compacte et $p : (E, h) \to X$ un fibré vectoriel hermitien. Soit $D = D' + D''$ sa connexion de Chern. Soit s une section holomorphe locale de E au voisinage d'un point x_0 de X. Alors pour tout x au voisinage de x_0 et $\xi \in T_x X$,*

$$(\xi, J_x\xi) \rfloor\, i\partial\overline{\partial}_x \log \|s\|^2 \geqslant \frac{\langle (\xi, J_x\xi) \rfloor\, i c_h(E)_x s_x, s_x \rangle_h}{\|s_x\|^2}$$

avec égalité si $D's = 0$ au point x.

Lemme 4.4. — *([De '], lemme .) Soient X une variété complexe compacte, γ une $(1, 1)$-forme réelle sur X, et $p : (E^\star, h) \to X$ un fibré vectoriel hermitien.*

Alors

$$i c_{h^\star}(E) \geqslant_{Gri} \gamma \otimes \mathrm{Id}_E \iff i c_h(E^\star) \leqslant_{Gri} -\gamma \otimes \mathrm{Id}_{E^\star} \iff i\partial\overline{\partial} \log h \geqslant p^\star \gamma,$$

où $\log h$ est considérée comme fonction sur l'espace total $E^\star$. Ici $\geqslant_{Gri}$ désigne la positivité au sens de Gri ths.

Lemme 4.5. — *Soient $u_1, \ldots, u_p$ des fonctions plurisousharmoniques sur une variété complexe X. Alors, $\log(e^{u_1} + \cdots + e^{u_p})$ est plurisousharmonique sur X.*

Ces deux derniers lemmes montrent en particulier que la "somme" de métriques à courbure négative est encore à courbure négative.

. Démonstration du théorème algébrique

Ici, X et Y sont deux variétés projectives lisses de dimension respective n et m. Le morphisme $\varphi : X \to Y$ est une submersion, le fibré en droites $L \to Y$ est $\varphi-$gros.

. . Réduction du cas ample au cas nef

Il suffit d'étudier le cas où L est numériquement effectif et relativement gros. En effet, dans le cas où L est ample, il existe un entier p tel que $L^p \otimes \varphi^\star \mathscr{O}_Y(-1)$ reste nef. Il existe une variété projective lisse Y', un revêtement fini $\rho : Y' \to Y$ et un fibré en droites $G_{Y'}$ ample sur Y' tels que $\rho^\star \mathscr{O}_Y(1) = G^p_{Y'}$. On complète la situation par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} L' \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d] \\ X' \arrow[r, "\varrho"] \arrow[d, "\varphi'"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ Y' \arrow[r, "\rho"] & Y \end{tikzcd}$$

Alors les fibrés $(L' \otimes \varphi'^\star G^{-1}_{Y'})^p = \varrho^\star (L^p \otimes \varphi^\star \mathscr{O}_Y(-1))$ et donc $L' \otimes \varphi'^\star G^{-1}_{Y'}$ sont nef et $\varphi'-$gros. Si le cas nef est démontré,

$$\varphi'_\star(K_{X'/Y'} \otimes L' \otimes \varphi'^\star G^{-1}_{Y'}) = \varphi'_\star(K_{X'/Y'} \otimes L') \otimes G^{-1}_{Y'}$$

sera numériquement effectif et $\varphi'_\star(K_{X'/Y'} \otimes L')$ sera ample. Par la formule de projection,

$$\varphi'_\star(K_{X'/Y'} \otimes L') = \rho^\star \varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L).$$

Puisque ρ est un morphisme fini, un théorème d' Hartshorne ([Ha 66] proposition 4.3) assure que $\varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)$ sera ample ; ce qui conclut la démonstration de la réduction au cas nef. On suppose donc $L \to X$ numériquement effectif et $\varphi-$gros.

. . Première étape : $\varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)$ est localement libre

Puisque φ est un morphisme lisse, le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg [Ka 82] [Vi 82], s'applique sur les fibres de φ (qui sont toutes réduites et lisses) et donne, en désignant par X_y la fibre de φ en y,

$$\forall j > 0, \quad H^j(X_y, K_{X_y} \otimes L) = 0.$$

Par platitude de φ,

$$y \mapsto \dim H^0(X_y, K_{X_y} \otimes L)$$

est localement constante sur Y. Par un théorème de Grauert ([Ha 77] corollaire III.12.9) le faisceau $\varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)$ est localement libre.

. . Deuxième étape : lemme de Castelnuovo-Mumford

Soit $G \to Y$ un fibré en droites très ample sur Y. On montre que pour toute donnée (X, φ, L) vérifiant les hypothèses du théorème 3.1, si E désigne le fibré vectoriel associé au faisceau localement libre $\varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)$, alors $E \otimes K_Y \otimes G^{m+1}$ est globalement engendré.

A cette fin, on dispose du critère de Castelnuovo-Mumford [Mu 66].

Lemme 5.1. — *Soit Y une variété projective lisse munie d'un fibré en droites très ample G. Soit $E \to Y$ un fibré vectoriel. Si les groupes de cohomologie $H^i(Y, E \otimes G^{-i})$ sont nuls pour tout $i > 0$, alors E est globalement engendré.*

Ce lemme se démontre en vérifiant que les morphismes de restriction aux intersections transverses décroissantes de diviseurs de $|G|$ sont surjectifs.

Il suffit donc de vérifier l'annulation, pour $0 < i \leqslant m$, de

$$\begin{aligned} & H^i\left(Y, E \otimes K_Y \otimes G^{m+1-i}\right) \\ &= H^i\left(Y, \varphi_\star(K_X \otimes L) \otimes G^{m+1-i}\right) \\ &= H^i\left(X, K_X \otimes L \otimes \varphi^\star G^{m+1-i}\right). \end{aligned}$$

La deuxième égalité a lieu car les images directes supérieures $\mathscr{R}^j\varphi_\star(K_X \otimes L) = K_Y \otimes \mathscr{R}^j\varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)$ sont nulles par le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg.

Maintenant, puisque L et G sont nef, $L \otimes \varphi^\star G^{m+1-i}$ l'est aussi. Puisque L est $\varphi-$gros, la classe $\varphi_\star\left(c_1(L)^{n-m}\right)$ est représentée, en tout point y de Y, par l'entier strictement positif $\int_{F_y} c_1(L_{|F_y})^{n-m}$ où F_y est la fibre de φ en y. Puisque de plus G est très ample,

$$\int_X \left(c_1(L \otimes \varphi^\star G^{m+1-i})\right)^n = \sum_{k=0}^{m} C_n^k (m+1-i)^k \int_Y \varphi_\star\left(c_1(L)^{n-k}\right) \wedge c_1(G)^k$$

est une somme de termes positifs dont le dernier est strictement positif. La dimension numérique et par suite la dimension de Kodaira-Iitaka de $L \otimes \varphi^\star G^{m+1-i}$ sont donc maximales : $L \otimes \varphi^\star G^{m+1-i}$ est gros. On applique alors le théorème de Kawamata-Viehweg pour conclure.

. . Troisième étape : produits fibrés

On déduit de l'étape précédente que pour tout $s \in \mathbb{N}$, $E^{\otimes s} \otimes K_Y \otimes G^{m+1}$ est globalement engendré.

Pour cela, on considère une construction inspirée de E. Viehweg ([Vi 83] Lemma 3.5). Soit $X^{(s)} := X \times_\varphi X \times_\varphi \cdots \times_\varphi X$ le produit fibré de s copies de X. On note $\varphi_i^{(s)} : X^{(s)} \to X_i$ la projection sur le $i^{\text{ième}}$ facteur, $\varphi_i : X_i = X \to Y$ l'application φ et $L_i \to X_i$ le fibré en droites L. Puisque X, Y et φ sont lisses le produit fibré $X^{(s)}$ est une variété lisse. L'application naturelle $\varphi^{(s)} : X^{(s)} \to Y$ est lisse. $L^{(s)} := \bigotimes_{i=1}^{s} \varphi_i^{(s)\star} L_i$ est nef et $\varphi^{(s)}-$gros.

Afin d'exploiter le résultat de l'étape précédente, il suffit de remarquer que, par application des formules de projection et de changement de base pour les fibrés adjoints,

$$\varphi_\star^{(s)}(K_{X^{(s)}/Y} \otimes L^{(s)}) = (\varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L))^{\otimes s}.$$

. . Quatrième étape : $\varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)$ est nef

Soit $\pi : \mathbb{P}(E) \to Y$ la variété des hyperplans de E. Sur $\mathbb{P}(E)$, on dispose d'une application surjective entre fibrés

$$\pi^\star E^{\otimes s} \to \pi^\star S^s E \to \mathscr{O}_E(s)$$

obtenue par la symétrisation suivie de l'application d'évaluation fibre à fibre sur $\mathscr{O}_E(s)$. On en déduit une application surjective

$$\pi^\star(E^{\otimes s} \otimes K_Y \otimes G^{m+1}) \to \mathscr{O}_E(s) \otimes \pi^\star(K_Y \otimes G^{m+1})$$

qui permet de munir $\mathscr{O}_E(s) \otimes \pi^\star(K_Y \otimes G^{m+1})$ d'une métrique à courbure positive et donc $\mathscr{O}_E(1)$ d'une métrique $h^{(s)}$ dont la courbure vérifie

$$ic_{h^{(s)}}\left(\mathscr{O}_E(1)\right) \geqslant -\frac{1}{s}\pi^\star ic_H(K_Y \otimes G^{m+1})$$

où H est une métrique hermitienne de classe $\mathscr{C}^\infty$ fixée sur $K_Y \otimes G^{m+1}$. Les fibrés $\mathscr{O}_E(1)$ et $E = \varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)$ sont donc nef.

. Démonstration du théorème analytique

Le morphisme $\varphi : X \to Y$ est une submersion entre variétés kählériennes compactes lisses. Le fibré en droites $L \to X$ est nef et $\varphi-$ample.

. . Métriques sur les fibrés en droites nef et relativement amples

On cherche à traduire en termes de métriques l'hypothèse sur le fibré en droites.

Lemme 6.1. — *Soient $\varphi : X \to Y$ une application surjective entre variétés kählériennes compactes lisses et $L \to X$ un fibré en droites sur X nef et $\varphi-$ample. Soit ω une métrique kählérienne sur Y.*

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une métrique hermitienne H de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur L telle que $ic_H(L) + \varepsilon\varphi^\star\omega$ soit une métrique kählérienne sur X.

Démonstration. — Puisque L est $\varphi-$ample et que Y est compacte, les estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ (théorème 2.1) fournissent une puissance p-ième L^p de L ($p \gg 0$) telle que les fibres de φ se plongent dans des espaces projectifs grâce à L^p : en chaque point $y \in Y$, il suffit que la courbure de $L^p_{|\varphi^{-1}(y)}$ compense certains poids logarithmiques, que l'on peut choisir dépendant continument de y. On obtient alors le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
L^p \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_{E_p}(1) \arrow[d] \\
X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & P(E_p^\star) \arrow[d] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

avec $E_p := \varphi_\star(L^p)$ localement libre.

On fixe une métrique sur E_p. Pour la métrique h induite sur L, il existe un réel $A > 0$ tel que $ic(E_p) \geqslant -pA\omega \otimes \mathrm{Id}_{E_p}$. Par suite, $ic_h(L) + (A+1)\varphi^\star\omega$ est une métrique kählérienne sur X. Comme L est nef, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une métrique h_ε sur L telle que

$$ic_{h_\varepsilon}(L) \geqslant -\varepsilon\Big(ic_h(L) + (A+1)\varphi^\star\omega\Big).$$

La métrique $\tilde{h} := (h_\varepsilon h^\varepsilon)^{1/1+\varepsilon}$ est alors telle que $ic_{\tilde{h}}(L) + \varepsilon(A+1)\varphi^\star\omega$ soit une métrique kählérienne sur X. ■

. . Démonstration du théorème analytique

. . . Première étape : construction de métriques sur les images directes.

La proposition suivante fournit dans le cadre kählérien, l'argument analogue au fait que, dans un cadre projectif, pour toute donnée (X, φ, L) satisfaisant les hypothèses du théorème 3.1, le fibré $K_Y \otimes G^{m+1}$ ne dépendant que de Y suffit à rendre $\varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L) \otimes K_Y \otimes G^{m+1}$ globalement engendré (Deuxième étape).

Proposition 6.2. — *Soient $\varphi : X \to Y$ une submersion entre variétés kählériennes compactes et $L \to X$ un fibré en droites sur X nef et $\varphi-$ample. Soit ω une métrique kählérienne sur Y. Alors il existe une constante A ne dépendant que de ω et de Y, telle que pour toute donnée (X, φ, L) vérifiant les hypothèses du théorème . , on peut munir $\varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)$ d'une métrique hermitienne de classe $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant*

$$ic(\varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)) \geqslant_{Gri} -A\omega \otimes \mathrm{Id}_{\varphi_\star(K_{X/Y}\otimes L)}.$$

Démonstration. — On utilise les méthodes de construction de métriques par estimations L^2 développées dans [De 92'].

Puisque L est nef et $\varphi-$ample, le lemme 6.1 fournit une métrique sur L telle que $w := ic(L) + \varphi^\star\omega$ soit une métrique kählérienne sur X. Soit (U_j) un recouvrement de Y par des boules relativement compactes dans des cartes. Soit v_j une fonction sur U_j quadratique en les coordonnées, bornée, et vérifiant

$$ic_\omega(K_Y^{-1}) - i\partial\overline{\partial}\, v_j \geqslant \omega.$$

On définit

$$\mathscr{H}_j := \Big\{ s \in H^0(\varphi^{-1}(U_j), K_{X/Y} \otimes L) / \int_{\varphi^{-1}(U_j)} |s|^2_{K_{X/Y}\otimes L} e^{v_j\circ\varphi} dV_w < +\infty \Big\},$$

où la métrique sur $K_{X/Y} = K_X \otimes \varphi^\star K_Y^{-1}$ est déduite des métriques w et ω. Les poids sont tels que

$$ic(K_X^{-1}) + ic(K_{X/Y} \otimes L) - \varphi^\star\, i\partial\overline{\partial}\, v_j \geqslant ic(L) + \varphi^\star\omega = w.$$

Ce calcul met en évidence la nécessité d'adjoindre $K_{X/Y}$ à L pour obtenir des estimations qui ne dépendent que de la base Y.

Pour $y \in U_j$ et $\xi \in E_y^\star$, soit la forme linéaire

$$\begin{array}{rcl} \Xi : \mathscr{H}_j & \to & \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & s(y).\xi \end{array}$$

où on considère $s \in H^0(U_j, E)$ avec E_y et $E_y^\star$ en dualité naturelle. On note $\|\xi\|_j$ la norme de la forme linéaire Ξ. En choisissant une base hilbertienne de $\mathscr{H}_j$, on constate que $\log\| \ \|_j^2$ est une fonction plurisousharmonique sur l'espace total $E_{|U_j}$. Soient (U_j') et (U_j'') deux recouvrements de Y par des boules telles que $U_j' \subset\subset U_j'' \subset\subset U_j$ et θ_j une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support dans U_j'', partout inférieure à 1 et identiquement égale à 1 sur U_j'. Pour $y \in Y$ et $\xi \in E_y^\star$, on pose

$$\|\xi\|^2 := \sum \theta_j^2(y)\|\xi\|_j^2.$$

La fin de la démonstration consiste à montrer que la métrique ainsi définie (sur $E^\star$ et par dualité sur E) satisfait les conditions requises dans la proposition 6.2. Pour ceci, il suffit d'appliquer le lemme suivant qui permet de contrôler la perte de positivité due aux recollements des métriques $\| \ \|_j$.

Lemme 6.3. — *([De ’] lemme .) Soit X une variété complexe munie d'une $(1,1)-$forme positive Ω. Soient $V_j' \subset V_j'' \subset V_j$ des recouvrements localement finis de X par des ouverts relativement compacts. Soit θ_j une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support dans V_j'', partout inférieure à 1 et identiquement égale à 1 sur V_j'. Soient B_j des constantes telles que*

$$i(\theta_j\partial\overline{\partial}\theta_j - \partial\theta_j \wedge \overline{\partial}\theta_j) \geqslant -B_j\Omega \quad \text{sur } V_j'' \setminus V_j'.$$

Soit w_j une fonction presque plurisousharmonique sur V_j telle que, $i\partial\overline{\partial}\, w_j \geqslant \gamma$ pour une $(1,1)-$-forme réelle γ sur X, de classe $\mathscr{C}^\infty$. Soient enfin C_j des constantes telles que

$$\forall x \in V_j'' \setminus V_j' \;\; w_j(x) \leqslant C_j + \sup_{k \neq j V_k' \ni x} w_k(x).$$

Alors la fonction $w := \log(\sum \theta_j^2 e^{w_j})$ est presque plurisousharmonique, et son hessien vérifie

$$i\partial\overline{\partial}\, w \geqslant \gamma - 2\Big(\sum \mathbb{1}_{V_j''\setminus V_j'} B_j e^{C_j}\Big)\Omega.$$

On montre d'abord l'existence d'une constante C ne dépendant que de Y telle que

$$\log\|\xi\|_j^2 \leqslant C + \log\|\xi\|_k^2 \;\text{ sur } p^{-1}((U_j'' \setminus U_j') \cap U_k') \subset E^\star,$$

où $p : E^\star \to Y$ est la projection naturelle.

Soient donc $y \in (U_j'' \setminus U_j') \cap U_k'$ et $\xi \in E_y^\star$. Soit $h_j \in \mathscr{H}_j$ telle que $\|h_j\|_{\mathscr{H}_j} = 1$ et $|h_j(y).\xi| = \|\xi\|_j$. Il existe une constante c_0 ne dépendant que des recouvrements de Y, indépendante de $y \in Y$ et une fonction χ de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans $U_j \cap U_k$, égale à 1 sur un voisinage V_y de y et telle que $|\overline{\partial}\chi| \leqslant c_0$.
Soit $\psi := (2\dim Y)\log|\varphi - y|$ sur $\varphi^{-1}(U_k)$. La fonction ψ est majorée sur $\varphi^{-1}(U_k)$ et minorée en dehors de V_y par des constantes ne dépendant que des recouvrements de Y. Puisque φ est une submersion, on a

$$\int_{\varphi^{-1}(U_k)} |f|^2 e^{-\psi}\, dV_w < +\infty \Longrightarrow f \equiv 0 \;\text{ sur } \varphi^{-1}(y).$$

$\varphi^{-1}(U_k)$ est faiblement pseudo - convexe,
$\int_{\varphi^{-1}(U_k)} |\overline{\partial}(\chi h_j)|^2 e^{v_k\circ\varphi - \psi}\, dV_w < +\infty$,
$ic(K_X^{-1}) + ic(K_{X/Y} \otimes L) - \varphi^\star\, i\partial\overline{\partial}\, v_k + i\partial\overline{\partial}\,\psi \geqslant w.$

L'application des estimations L^2 de Hörmander (théorème 2.1) fournit donc une section $f_k \in \mathscr{C}^\infty(\varphi^{-1}(U_k), K_{X/Y} \otimes L)$ telle que

- $\overline{\partial}(f_k - \chi h_j) = 0$
- $\int_{\varphi^{-1}(U_k)} |f_k|^2 e^{v_k \circ \varphi - \psi} dV_w \leqslant c_1 \int_{\varphi^{-1}(U_k)} |\overline{\partial}(\chi h_j)|^2 e^{v_k \circ \varphi - \psi} dV_w$
- $f_k \equiv 0$ sur $\varphi^{-1}(y)$.

On obtient alors, en utilisant les bornes de ψ et le fait que $|v_j - v_k|$ est majorée par une constante ne dépendant que de Y

$$\|f_k - \chi h_j\|_{\mathscr{H}_k} \leqslant c_2 \|h_j\|_{\mathscr{H}_j} = c_2.$$

Par suite

$$\|\xi\|_k^2 \geqslant \frac{|(f_k - \chi h_j)(y).\xi|^2}{\|f_k - \chi h_j\|^2_{\mathscr{H}_k}} \geqslant \frac{|h_j(y).\xi|^2}{c_2} \geqslant \frac{\|\xi\|_j^2}{c_2}.$$

D'où l'existence de la constante C.

En outre, il existe une constante B ne dépendant que de Y telle que

$$i\theta_j \partial\overline{\partial}\theta_j - i\partial\theta_j \wedge \overline{\partial}\theta_j \geqslant -B\omega$$

et donc

$$i(\theta_j \circ p)\partial\overline{\partial}(\theta_j \circ p) - i\partial(\theta_j \circ p) \wedge \overline{\partial}(\theta_j \circ p) \geqslant -Bp^\star\omega.$$

Le lemme de recollement 6.3 fournit donc

$$i\partial\overline{\partial} \log \|\xi\|^2 \geqslant p^\star\Big(-2Be^C\big(\sum_j \mathbb{1}_{U_j'' \setminus U_j'}\big)\omega\Big) \geqslant -Ap^\star\omega$$

pour une constante A ne dépendant que de Y.

Le lemme 4.4 permet alors de conclure

$$ic(\varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)) \geqslant_{\text{Griff}} -A\omega \otimes \mathrm{Id}_{\varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)}.$$

■

. . . Deuxième étape : produits fibrés.

La construction de E. Viehweg des produits fibrés et la proposition 6.2 permettent de munir $E^{\otimes s}$ d'une métrique hermitienne de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont la courbure vérifie :

$$ic(E^{\otimes s}) \geqslant_{\text{Griff}} -A\omega \otimes Id.$$

. . . Troisième étape : $\varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)$ est nef.

On utilise l'application surjective $\pi^\star E^{\otimes s} \to \mathscr{O}_E(s)$ pour munir $\mathscr{O}_E(1)$ d'une métrique hermitienne de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont la courbure vérifie :

$$ic\left(\mathscr{O}_E(1)\right) \geqslant -\frac{A}{s}\pi^\star\omega.$$

Le fibré E est donc nef.

. Démonstration du théorème de positivité au sens de Gri ths

. . Transport de la positivité par morphisme fini

On montre d'abord que, comme l'amplitude ([Ha 66] proposition 4.3), la positivité au sens de Griffiths est conservée par morphisme fini. Comme le montrent les lemmes 4.4 et 4.5, il est plus naturel d'étudier le transport de la négativité au sens de Griffiths.

Proposition 7.1. — *Soit $F : X' \to X$ un morphisme fini surjectif entre variétés kählériennes compactes. Soient ω une métrique kählérienne sur X et $p : E \to X$ un fibré vectoriel sur X. Soit ν un réel.*

Alors

$$ic(F^\star E) <_{Gri} -\nu F^\star\omega \otimes \mathrm{Id} \Longleftrightarrow ic(E) <_{Gri} -\nu\omega \otimes \mathrm{Id}.$$

Démonstration. — L'implication $\Longleftarrow$ est démontrée dans [Fr 79] : il suffit de corriger la métrique image réciproque aux points où la différentielle de F s'annule.

Pour l'autre implication, on considère une métrique hermitienne h de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $F^\star E$ telle que pour un $\alpha > 0$ assez petit

$$ic_h(F^\star E) <_{\mathrm{Griff}} -(\nu + \alpha)F^\star\omega \otimes \mathrm{Id}_{F^\star E}.$$

On munit E de la métrique trace h_0 définie par

$$\forall x \in X,\ \forall v \in E_x, \quad h_0(x)(v) = \frac{1}{\deg F} \sum_{\substack{F(x')=x \\ TV=v}} h(x')(V)$$

où T est défini par

$$\begin{tikzcd} F^\star E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X' \arrow[r, "F"] & X. \end{tikzcd}$$

La métrique hermitienne h_0 sur E est continue sur X, de classe $\mathscr{C}^\infty$ en dehors du lieu de ramification de F.

On montre maintenant l'inégalité

$$i\partial_E\overline{\partial}_E \log h_0 > (\nu + \alpha)p^\star\omega \text{ au sens des courants.}$$

Puisque la métrique h_0 est continue, il suffit d'étudier sa courbure en dehors du lieu de ramification de F. Soit $x_0 \in X$ en dehors du lieu de ramification de F. Soient $(F_j^{-1})_{1\leqslant j\leqslant \deg F}$ (resp. $(T_j^{-1})_{1\leqslant j\leqslant \deg F}$) des inverses de F (resp. T) définis sur un voisinage ouvert de x_0. Alors au voisinage de x_0,

$$\log h_0(x)(v) = \log\Big(\frac{1}{\deg F} \sum_{j=1}^{\deg F} h(F_j^{-1}(x))(T_j^{-1}v)\Big).$$

On choisit des repères $h-$normaux aux voisinages des points $F_j^{-1}(x_0)$. Ainsi un calcul analogue à celui de la démonstration du lemme 4.5 permet d'obtenir l'inégalité de courbure souhaitée.

On remarque que cette inégalité permet ici de définir la connexion de Chern du fibré hermitien continu (E, h_0). En effet, aux points où la fonction h_0 est de classe $\mathscr{C}^\infty$, on a

$$i\partial_E h_0 \wedge \overline{\partial}_E h_0 = h_0 i\partial_E \overline{\partial}_E h_0 - h_0^2 i\partial_E \overline{\partial}_E \log h_0.$$

Puisque $i\partial_E\overline{\partial}_E h_0$ et $i\partial_E\overline{\partial}_E \log h_0$ sont des courants positifs fermés, ils sont à coefficients localement intégrables. La fonction h_0 est localement bornée. Par conséquent, $\partial_E h_0$ et donc $\partial_X h_0$ sont de carré localement intégrables. La connexion de Chern de (E, h_0) est localement définie par la $1-$forme $h_0^{-1}\partial_X h_0$ de carré localement intégrable. Sa courbure est localement donnée par $\overline{\partial}_X(h_0^{-1}\partial_X h_0)$ au sens des courants.

On explicite maintenant le procédé de régularisation de la métrique hermitienne h_0. Puisqu'il s'agit de fonctions à valeurs matricielles, le procédé de Richberg de régularisation des fonctions plurisousharmoniques continues à l'aide de fonctions maximum ne s'applique pas. La méthode proposée ici résout la difficulté par utilisation du transport parallèle.

Lemme 7.2. — *Soient (X, ω) une variété kählérienne compacte et $p : E \to X$ un fibré vectoriel sur X. Soit h_0 une métrique hermitienne continue sur E telle que, pour un réel ν, et un réel $\alpha > 0$*

$$i\partial_E\overline{\partial}_E h_0 > (\nu + \alpha) h_0 p^\star\omega \quad \textit{au sens des courants.}$$

Alors il existe sur E une métrique hermitienne h de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que

$$ic_h(E) <_{Gri} \; -\nu\omega \otimes \mathrm{Id}_E.$$

Remarque. — Le procédé de régularisation et le résultat sont valables pour un majorant non nécessairement décomposable. Il faut alors modifier la démonstration en utilisant le lemme 4.3 au lieu du lemme 4.4.

Démonstration. — On étend au cas de fonctions continues à valeurs matricielles la méthode de régularisation développée dans [De 82].

Soient H une métrique hermitienne de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur E, D^H la connexion de Chern associée et $\tau := \tau^H$ le transport parallèle relatif à D^H. Soit $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie par

$$\begin{cases} \chi(t) = & -\exp\left(\frac{1}{t-1}\right) & \text{si } t < 1 \\ \chi(t) = & 0 & \text{si } t \geqslant 1. \end{cases}$$

On désigne par $C := \displaystyle\int_{\xi\in\mathbb{C}^n} \chi'(|\xi|^2)\, d\lambda(\xi)$ où n est la dimension de X.

Ces données permettent de définir par convolution une suite de métriques hermitiennes sur E de classe $\mathscr{C}^\infty$: pour tout $\varepsilon > 0$, $z \in X$, $V \in E_z$, on pose

$$h_\varepsilon(z)(V) := \frac{1}{C\varepsilon^{2n}} \int\limits_{\xi\in T_zX} \chi'\left(\frac{\|\xi\|_\omega^2}{\varepsilon^2}\right) h_0(\exp_z \xi)\, (\tau_{z,\xi}(V))\, d\lambda_\omega(\xi),$$

où $\tau_{z,\xi}$ désigne le transport parallèle relatif à la connexion D^H le long de la géodésique $\gamma : [0, 1] \to X$, $t \mapsto \exp_z t\xi$.

On commence par montrer que h_ε est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Soient z_0 un point de X et $(u) = (u_1, \ldots, u_n)$ un système de coordonnées holomorphes sur X au voisinage de z_0 tel que

$$\omega_{jk}(u) = \delta_{jk} - \sum_{lp} c_{jklp} u_l \overline{u}_p + O(|u|^3),$$

où (c_{jklp}) est le tenseur de courbure de (TX, ω) et δ_{jk} le symbole de Kronecker. Un tel système de coordonnées est dit $\omega-$*géodésique* en z_0. Son existence en tout point de la variété X est équivalente au caractère kählérien de la forme ω. On pose :

$$\begin{aligned} u_k &:= u_k(\exp_z \xi), \quad z_k := u_k(z), \\ v_k &:= u_k - z_k, \quad \xi_k := d_z u_k.\xi. \end{aligned}$$

Dans tous les calculs qui suivront, (u_k) et (z_k) seront considérés comme deux n-uplets indépendants de variables indépendantes. L'espace total de TX qui paramètre les petites géodésiques est de dimension $2n$. La notation v_k est une écriture condensée de $u_k - z_k$.

Puisque (u) est un système de coordonnées $\omega-$géodésique, il existe un système $(\eta) = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ orthonormé $\mathscr{C}^\infty$ de coordonnées sur les fibres de TX, au voisinage de z_0, tel que

$$\|\xi\|_\omega^2 = \sum |\eta_i|^2 = |\eta|^2$$

avec

$$\eta_k = \xi_k - \frac{1}{2} \sum_{jlp} c_{jklp} z_l \overline{z}_p \xi_j + O(|z|^3).\xi.$$

Pour transformer les variables η en variables z et u, on utilise le développement limité de l'exponentielle ([De 82] lemme 8.2) :

$$u_k = z_k + \xi_k + \frac{1}{2} \sum_{jlp} c_{jklp} \left(\overline{z}_p + \frac{\overline{\xi}_p}{3} \right) \xi_j \xi_l + O(|z|^2 + |\xi|^2)|\xi|^2.$$

Ainsi

$$\xi_k = v_k - \frac{1}{2} \sum_{jlp} c_{jklp} \left(\overline{z}_p + \frac{\overline{v}_p}{3} \right) v_j v_l + O(|u| + |z|)^4,$$

et

$$\eta_k = v_k - \frac{1}{2} \sum_{jlp} c_{jklp} \left(\overline{z}_p v_j u_l + \frac{1}{3} \overline{v}_p v_j v_l \right) + O(|u| + |z|)^4.$$

On choisit $(V) = (V_1, \ldots, V_r)$ un système de coordonnées holomorphes sur E au voisinage de z_0 tel que

$$\|V\|_H^2 = \sum_\lambda |V_\lambda|^2 - \sum_{jk\lambda\mu} d_{jk\lambda\mu} u_j \overline{u}_k V_\lambda \overline{V}_\mu + O(|u|^3 |V|^2),$$

où $(d_{jk\lambda\mu})$ est le tenseur de courbure de (E, H). Un tel système est dit H-*synchrone* en z_0 des coordonnées géodésiques (u). On appelle $(a^0_{\lambda\underline{\lambda}})$ la matrice de la métrique h_0 dans ces coordonnées.

Au voisinage de z_0, la métrique h_ε s' écrit donc

$$h_\varepsilon(z)(V) = \frac{1}{C\varepsilon^{2n}} \int_{u\in\mathbb{C}^n} \chi'\left(\frac{|\eta\,(z,u)\,|^2}{\varepsilon^2}\right) \sum_{\lambda\underline{\lambda}} a^0_{\lambda\underline{\lambda}}(u)\tau_{z,u}(V)_\lambda \overline{\tau_{z,u}(V)}_{\underline{\lambda}} d\lambda(\eta).$$

Sous cette forme, h_ε apparait comme une métrique de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Reste à montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $ic_{h_\varepsilon}(E) <_{\text{Griff}} -\nu\omega \otimes \mathrm{Id}_E$; c'est-à-dire par le lemme 4.4 que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $i\partial\overline{\partial}\, h_\varepsilon(.)(.) > \nu h_\varepsilon p^\star \omega$, où $p : E \to X$ est la projection naturelle.

Pour le calcul du hessien de $h_\varepsilon(.)(.)$, on dérivera sous le signe intégral après avoir étudié la dépendance en z et V du transport parallèle τ et des coordonnées (η). On transformera ensuite les dérivées en (z) en des dérivées en (u). Il apparaitra le hessien de h_0, minoré par hypothèse. La continuité de h_0 suffira pour montrer que les autres termes tendent vers 0 avec ε.

On commence par établir un développement du transport parallèle le long de la géodésique $\gamma : t \mapsto \exp_z t\xi \simeq (u_k) = (z_k + tv_k + O(|z| + |u|)^3)$.

Puisque les coordonnées sur E sont $H-$synchrones en z_0 des coordonnées (u), la matrice de la connexion D^H est de la forme

$$\xi \rfloor A^{D^H}(u) = -\sum_{jk\lambda\mu} d_{jk\lambda\mu}\xi_j \overline{u}_k e^\star_\mu \otimes e_\lambda + O(|u|)^2|\xi|.$$

Le transport parallèle est donné par

$$\frac{d\gamma}{dt}\rfloor D^H(\tau V) = 0$$

soit

$$\frac{d}{dt}(\tau V)_\lambda - \sum_{jk\mu} d_{jk\lambda\mu} v_j(\overline{z}_k + t\overline{v}_k)(\tau V)_\mu = O(|z| + |u|)^3.$$

Par intégration, on démontre que

$$(\tau V)_\lambda = V_\lambda + \sum_{jk\mu} d_{jk\lambda\mu} v_j(\overline{z}_k + \frac{\overline{v}_k}{2})V_\mu + O(|z| + |u|)^3.$$

D' où

$$\begin{aligned}(\tau V)_\lambda \overline{(\tau V)_{\underline{\lambda}}} = {} & V_\lambda \overline{V}_{\underline{\lambda}} + \sum_{jk\mu} d_{jk\lambda\mu} v_j(\overline{z}_k + \frac{\overline{v}_k}{2})V_\mu \overline{V}_{\underline{\lambda}} \\ & + \sum_{jk\underline{\mu}} \overline{d_{jk\underline{\lambda}\underline{\mu}}}\,\overline{v}_j(z_k + \frac{v_k}{2})V_\lambda \overline{V}_{\underline{\mu}} + O(|z| + |u|)^3|V|^2.\end{aligned}$$

Pour transformer les dérivations en (z) en des dérivations en (u) dans le calcul du hessien de h_ε, on introduit les opérateurs

$$\begin{aligned} \nabla^+_l &:= \frac{\partial}{\partial z_l} + \frac{\partial}{\partial u_l} \quad \text{en particulier} \quad \nabla^+_l v_p = 0 \quad \nabla^+_l \overline{v}_p = 0 \\ \nabla^-_m &:= \frac{\partial}{\partial \overline{z}_m} - \frac{\partial}{\partial \overline{u}_m} \qquad\qquad\qquad\quad \nabla^-_m v_p = 0 \quad \nabla^-_m \overline{v}_p = -2\delta_{p,m}. \end{aligned}$$

La contribution du transport parallèle est

$$\nabla_l^+\left((\tau V)_\lambda \overline{(\tau V)_{\underline{\lambda}}}\right) = \sum_{j\underline{\mu}} \overline{d_{jl\underline{\lambda}\underline{\mu}}} \overline{v}_j V_\lambda \overline{V}_{\underline{\mu}} + O(|z| + |u|)^2 |V|^2.$$

A partir de l'expression précédente de η_k, on calcule

$$\begin{aligned} |\eta_k|^2 &= |v_k|^2 - \frac{1}{2}\sum_{jlp} c_{jklp}\left(\overline{z}_p u_l + \frac{1}{3}\overline{v}_p v_l\right) v_j \overline{v}_k \\ &- \frac{1}{2}\sum_{jlp} \overline{c}_{kjpl}\left(z_l \overline{u}_p + \frac{1}{3} v_l \overline{v}_p\right) \overline{v}_k v_j + O(|u| + |z|)^5. \end{aligned}$$

Puisque $\overline{c}_{kjpl} = c_{jklp}$, on obtient

$$\nabla_l^+\left(\chi'(\frac{|\eta|^2}{\varepsilon^2})\right) = \frac{-\chi''}{2\varepsilon^2}\sum_{jkp} c_{jklp}(\overline{z}_p + \overline{u}_p) v_j \overline{v}_k - \frac{\chi''}{2\varepsilon^2} O(|u| + |z|)^4.$$

D'après [De 82]

$$d\lambda(\eta) = \left(\frac{i}{2}\right)^n d\eta_1 \wedge d\overline{\eta}_1 \wedge \cdots \wedge d\eta_n \wedge d\overline{\eta}_n$$

où η est différentié par rapport à u à z fixé. En utilisant $c_{lkjp} = c_{jklp}$ et $v_k = u_k - z_k$, on obtient

$$d\lambda(\eta) = d\lambda(u)\left[1 - \sum_{klp} c_{kklp}(u_l \overline{u}_p - \frac{1}{3} v_l \overline{v}_p) + O(|u| + |z|)^3\right].$$

Donc

$$\nabla_l^+(d\lambda(\eta)) = -d\lambda(u)\left[\sum_{kp} c_{kklp}\overline{u}_p + O(|u| + |z|)^2\right].$$

Les trois calculs précédents donnent

$$\begin{aligned} &\nabla_l^+\left(\chi' d\lambda(\eta)(\tau V)_\lambda \overline{(\tau V)_{\underline{\lambda}}}\right) \\ = &\left[-\frac{\chi''}{2\varepsilon^2}\sum_{jkp} c_{jklp}(\overline{z}_p + \overline{u}_p) v_j \overline{v}_k + \frac{\chi''}{\varepsilon^2} O(|u| + |z|)^4\right] d\lambda(\eta)(\tau V)_\lambda \overline{(\tau V)_{\underline{\lambda}}} \\ - &\chi' d\lambda(u)\left[\sum_{kp} c_{kklp}\overline{u}_p + O(|u| + |z|)^2\right](\tau V)_\lambda \overline{(\tau V)_{\underline{\lambda}}} \\ + &\chi' d\lambda(\eta)\left[\sum_{j\underline{\mu}} \overline{d_{jl\underline{\lambda}\underline{\mu}}} \overline{v}_j V_\lambda \overline{V}_{\underline{\mu}} + O(|z| + |u|)^2 |V|^2\right]. \end{aligned}$$

En utilisant

$$\begin{aligned}
\nabla_{\overline{m}}\overline{v}_p &= -2\delta_{mp} \\
\nabla_{\overline{m}}\left((\tau V)_\lambda\overline{(\tau V)_{\underline{\lambda}}}\right) &= O(|u|+|z|)|V|^2 \\
\nabla_{\overline{m}}\left(d\lambda(\eta)\right) &= O(|u|+|z|)d\lambda(u) \\
\nabla_{\overline{m}}|\eta|^2 &= -2v_m + O(|u|+|z|)^3,
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\overline{m}}\nabla_l^{+}\left(\chi' d\lambda(\eta)(\tau V)_\lambda\overline{(\tau V)_{\underline{\lambda}}}\right) \\
&= \left[\frac{\chi'''}{\varepsilon^4}\sum_{jkp} c_{jklp}(\overline{z}_p+\overline{u}_p)v_j\overline{v}_k v_m + \frac{\chi'''}{\varepsilon^4}O(|u|+|z|)^5\right. \\
&+ \left.\frac{\chi''}{\varepsilon^2}\sum_{jp} c_{jmlp}(\overline{z}_p+\overline{u}_p)v_j + \frac{\chi''}{\varepsilon^2}O(|u|+|z|)^3\right] d\lambda(\eta)(\tau V)_\lambda\overline{(\tau V)_{\underline{\lambda}}} \\
&+ \left[\frac{2\chi''}{\varepsilon^2}\sum_{kp} c_{kklp}\overline{u}_p v_m + \frac{\chi''}{\varepsilon^2}O(|u|+|z|)^3\right. \\
&+ \left.\chi'\sum_k c_{kklm} + \chi' O(|u|+|z|)\right] d\lambda(u)(\tau V)_\lambda\overline{(\tau V)_{\underline{\lambda}}} \\
&- 2\left[\frac{\chi''}{\varepsilon^2}\sum_{j\underline{\mu}}\overline{d_{jl\underline{\lambda}\underline{\mu}}}\overline{v}_j v_m V_\lambda\overline{V}_{\underline{\mu}} + \frac{\chi''}{\varepsilon^2}O(|u|+|z|)^3|V|^2\right. \\
&+ \left.\chi'\sum_{\underline{\mu}}\overline{d_{ml\underline{\lambda}\underline{\mu}}}V_\lambda\overline{V}_{\underline{\mu}} + \chi' O(|u|+|z|)|V|^2\right] d\lambda(\eta).
\end{aligned}$$

Au point z_0, cette expression devient

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\overline{m}}\nabla_l^{+}\left(\chi' d\lambda(\eta)(\tau V)_\lambda\overline{(\tau V)_{\underline{\lambda}}}\right) \\
&= \left[\frac{\chi'''}{\varepsilon^4}\sum_{jkp} c_{jklp}\overline{u}_p u_j\overline{u}_k u_m + \frac{\chi''}{\varepsilon^2}\sum_{jp} c_{jmlp}\overline{u}_p u_j\right. \\
&+ \left.\frac{2\chi''}{\varepsilon^2}\sum_{kp} c_{kklp}\overline{u}_p u_m + \chi'\sum_k c_{kklm} + O(\varepsilon)\right] d\lambda(u)V_\lambda\overline{V}_{\underline{\lambda}} \\
&+ \left[-2\frac{\chi''}{\varepsilon^2}\sum_{j\underline{\mu}}\overline{d_{jl\underline{\lambda}\underline{\mu}}}\overline{u}_j u_m\overline{V}_{\underline{\mu}} - 2\chi'\sum_{\underline{\mu}}\overline{d_{ml\underline{\lambda}\underline{\mu}}}\overline{V}_{\underline{\mu}} + O(\varepsilon)|V|\right] d\lambda(u)V_\lambda.
\end{aligned}$$

Afin d'intégrer par parties l'expression du hessien de h_ε et d'utiliser la majoration de la courbure de E muni de h_0, il faut reconnaitre des dérivées secondes par rapport aux coordonnées (u). Le terme nouveau par rapport au cas de la régularisation des fonctions plurisousharmoniques est

$$\begin{aligned} & -2\frac{\chi''}{\varepsilon^2}\sum_j \overline{d_{jl\underline{\lambda}\underline{\mu}}}\,\overline{u}_j u_m - 2\chi'\overline{d_{ml\underline{\lambda}\underline{\mu}}} \\ = \quad & -2\sum_j \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial \overline{u}_m}(\varepsilon^2\chi\overline{d_{jl\underline{\lambda}\underline{\mu}}}) + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

comme on peut le vérifier en utilisant

$$\frac{\partial}{\partial u_l}|\eta|^2 = \overline{u}_l + O(\varepsilon).$$

Les autres termes se réécrivent

$$\begin{aligned} & \frac{\chi'''}{\varepsilon^4}\sum_{jkp} c_{jklp}\overline{u}_p u_j \overline{u}_k u_m + \frac{\chi''}{\varepsilon^2}\sum_{jp} c_{jmlp}\overline{u}_p u_j \\ + \quad & \frac{2\chi''}{\varepsilon^2}\sum_{kp} c_{kklp}\overline{u}_p u_m + \chi'\sum_k c_{kklm} \\ = \quad & \\ & \sum_p \frac{\partial^2}{\partial u_p \partial \overline{u}_m}(\chi'\sum_{jk} c_{jklp}u_j\overline{u}_k + \varepsilon^2\chi\sum_k c_{kklp}) \\ - \quad & \sum_{jk}\frac{\partial^2}{\partial u_k \partial \overline{u}_j}(\varepsilon^2\chi c_{jklm}) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Puisque $\chi'\sum_{\lambda\underline{\lambda}} a^0_{\lambda\underline{\lambda}}(u)(\tau_{z,u}V)_\lambda\overline{(\tau_{z,u}V)_{\underline{\lambda}}}d\lambda(\eta)$ est une $(n,n)-$forme réelle sur X,

$$\begin{aligned} & \sum_{lm\lambda\underline{\lambda}} a^0_{\lambda\underline{\lambda}}(u)\left(\frac{\partial^2}{\partial z_l \partial \overline{z}_m} - \frac{\partial^2}{\partial u_l \partial \overline{u}_m}\right)\left(\chi'(\tau_{z,u}V)_\lambda\overline{(\tau_{z,u}V)_{\underline{\lambda}}}d\lambda(\eta)\right)s_l\overline{s}_m \\ = \quad & Re\sum_{lm\lambda\underline{\lambda}} a^0_{\lambda\underline{\lambda}}(u)\,\nabla^-_m\nabla^+_l\left(\chi'(\tau_{z,u}V)_\lambda\overline{(\tau_{z,u}V)_{\underline{\lambda}}}d\lambda(\eta)\right)s_l\overline{s}_m \\ = \quad & Re\Bigg[\sum_{lm\lambda\underline{\lambda}p} a^0_{\lambda\underline{\lambda}}(u)\frac{\partial^2}{\partial u_p \partial \overline{u}_m}(\chi'\sum_{jk} c_{jklp}u_j\overline{u}_k + \varepsilon^2\chi\sum_k c_{kklp})s_l\overline{s}_m V_\lambda\overline{V}_{\underline{\lambda}} \\ - \quad & \sum_{lm\lambda\underline{\lambda}jk} a^0_{\lambda\underline{\lambda}}(u)\frac{\partial^2}{\partial u_k \partial \overline{u}_j}(\varepsilon^2\chi c_{jklm})s_l\overline{s}_m V_\lambda\overline{V}_{\underline{\lambda}} \\ - \quad & 2\sum_{lm\lambda\underline{\lambda}j\underline{\mu}} a^0_{\lambda\underline{\lambda}}(u)\frac{\partial^2}{\partial u_j \partial \overline{u}_m}(\varepsilon^2\chi\overline{d_{jl\underline{\lambda}\underline{\mu}}})V_\lambda\overline{V}_{\underline{\mu}}s_l\overline{s}_m + O(\varepsilon)|s|^2|V|^2\Bigg]\,d\lambda(u). \end{aligned}$$

On peut alors intégrer par parties l'expression du hessien de h_ε obtenue par dérivation sous le signe intégral.

$$\begin{aligned}
&\sum_{lm} \frac{\partial^2 h_\varepsilon(.)(V)}{\partial z_l \partial \overline{z}_m} s_l \overline{s}_m \\
&= \frac{1}{C\varepsilon^{2n}} \int_{(u)} \sum_{lm} \chi' \frac{\partial^2 h_0(.)(V)}{\partial u_l \partial \overline{u}_m} s_l \overline{s}_m d\lambda(u) \\
&+ \frac{1}{C\varepsilon^{2n}} Re \int_{(u)} \sum_{lmp} \frac{\partial^2 h_0(.)(V)}{\partial u_p \partial \overline{u}_m} (\chi' \sum_{jk} c_{jklp} u_j \overline{u}_k + \varepsilon^2 \chi \sum_k c_{kklp}) s_l \overline{s}_m d\lambda(u) \\
&- \frac{2}{C\varepsilon^{2n}} Re \int_{(u)} \left[\sum_{jlm\lambda\underline{\lambda}\underline{\mu}} \frac{\partial^2 a^0_{\lambda\underline{\lambda}}}{\partial u_j \partial \overline{u}_m} \varepsilon^2 \chi \overline{d_{jl\underline{\lambda}\underline{\mu}}} V_\lambda \overline{V}_{\underline{\mu}} s_l \overline{s}_m + O(\varepsilon)|s|^2|V|^2 \right] d\lambda(u) \\
&- \frac{1}{C\varepsilon^{2n}} \int_{(u)} \sum_{jklm} \frac{\partial^2 h_0(.)(V)}{\partial u_k \partial \overline{u}_j} \varepsilon^2 \chi c_{jklm} s_l \overline{s}_m d\lambda(u).
\end{aligned}$$

La minoration du hessien de h_0 montre que le premier terme est supérieur à la quantité $(\nu + \alpha + O(\varepsilon))\|s\|^2_\omega \|V\|^2_{h_\varepsilon}$.

On montre maintenant que les autres termes tendent vers 0 avec ε. Puisque le calcul est local, on peut supposer, quitte à multiplier par un poids de classe $\mathscr{C}^\infty$, que

$$\forall (u_\lambda), (s_j), \sum_{jm\lambda\underline{\lambda}} \int_{(u)} \frac{\partial^2 a^0_{\lambda\underline{\lambda}}}{\partial u_j \partial \overline{u}_m} V_\lambda \overline{V}_{\underline{\lambda}} s_j \overline{s}_m d\lambda(u) \geqslant 0.$$

En utilisant une transformée de Fourier discrète, comme dans [D-S 80], on en déduit qu'il existe une constante C telle que

$$\forall \lambda, \underline{\lambda}, j, m, \quad \int_{(u)} \left| \frac{\partial^2 a^0_{\lambda\underline{\lambda}}}{\partial u_j \partial \overline{u}_m} \right| d\lambda(u) \leqslant C \int_{(u)} \sum_k \frac{\partial^2 \sum_\mu a^0_{\mu\mu}}{\partial u_k \partial \overline{u}_k} d\lambda(u) = C \int_{(u)} \Delta \left(\sum_\mu a^0_{\mu\mu} \right) d\lambda(u).$$

Reste à appliquer le lemme suivant pour obtenir l'estimation de courbure. ■

Lemme 7.3. — *Soit u une fonction continue plurisousharmonique au voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{C}^n$. *Soit* $\nu_{z_0} : t \mapsto \dfrac{1}{t^{2n-2}} \displaystyle\int_{|z-z_0|<t} \Delta u \, d\lambda(z)$.

Alors $\nu_{z_0}(t)$ est une fonction croissante qui tend vers 0 *quand t tend vers* 0*, uniformément en* z_0.

Ce lemme exprime le fait que le nombre de Lelong d'une fonction plurisousharmonique en un point de continuité est nul [Le 68]. De plus, pour tout t, la fonction $z_0 \mapsto \nu_{z_0}(t)$ est continue. ■

. . Démonstration du théorème de positivité au sens de Gri ths

. . . Première étape : construction de métriques sur $\varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)$.

On suppose que Y satisfait l'hypothèse (H). On suppose pour commencer que L est nef. L'auto-application va permettre de rendre arbitrairement petite la perte de positivité. A partir de l'itérée p-ième de θ, notée $\theta^{(p)}$, on construit le diagramme

$$\begin{tikzcd} L_p \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d] \\ X_p \arrow[r, "\Theta^{(p)}"] \arrow[d, "\varphi_p"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, "\theta^{(p)}"] & Y. \end{tikzcd}$$

On note toujours $E := \varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)$. A partir de la fonction F satisfaisant

$$\theta^\star\omega \geqslant a\omega + i\partial\overline{\partial}\, F \ \ (a := \alpha - \varepsilon > 1),$$

on construit par récurrence sur p une fonction F_p satisfaisant

$$\theta^{(p)\star}\omega \geqslant a^p\omega + i\partial\overline{\partial}\, F_p.$$

Puisque φ est une submersion ($\Theta^{(p)\star}K_{X/Y} = K_{X_p/Y_p}$) et que $\theta^{(p)}$ est fini donc plat, la formule de changement de base pour les fibrés adjoints donne $\theta^{(p)\star}E = (\varphi_p)_\star(K_{X_p/Y} \otimes L_p)$. $L_p = \Theta^{(p)\star}L$ est nef et φ_p-ample. On peut donc appliquer la proposition 6.2 aux données (X_p, φ_p, L_p) : il existe une métrique hermitienne de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\theta^{(p)\star}E$ telle que

$$ic(\theta^{(p)\star}E) \geqslant_{\text{Griff}} -A\omega \otimes \mathrm{Id} \geqslant_{\text{Griff}} -Aa^{-p}(\theta^{(p)\star}\omega - i\partial\overline{\partial}\, F_p) \otimes \mathrm{Id}.$$

En multipliant cette métrique par $e^{Aa^{-p}F_p}$, on obtient une métrique hermitienne de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\theta^{(p)\star}E$ telle que

$$ic(\theta^{(p)\star}E) \geqslant_{\text{Griff}} -Aa^{-p}\theta^{(p)\star}\omega \otimes \mathrm{Id}$$

et par la proposition 7.1, puisque $\theta^{(p)}$ est fini,

$$ic(E) \geqslant_{\text{Griff}} -Aa^{-p}\omega \otimes \mathrm{Id}.$$

On retrouve en particulier que $E = \varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)$ est numériquement effectif.

. . . Seconde étape : $\varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)$ est strictement positif au sens de Gri ths.

On suppose maintenant que L est ample. On montre que $E := \varphi_\star(K_{X/Y} \otimes L)$ est alors un fibré vectoriel strictement positif au sens de Griffiths sur Y.

Lemme 7.4. — *Soit G un fibré en droites ample sur Y. Il existe un entier naturel p tel que $\Theta^{(p)\star}L \otimes \varphi_p^\star G^{-1}$ soit nef sur X_p.*

Démonstration. — On munit L et G de métriques hermitiennes de classe $\mathscr{C}^\infty$ à courbure strictement positive. On peut supposer, quitte à multiplier ω, que $\omega \geqslant ic(G)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $ic(L) \geqslant \varepsilon\varphi^\star\omega + \varepsilon ic(L)$. Soit p tel que $\varepsilon a^p > 1$.

$$\begin{aligned}
ic(\Theta^{(p)\star}L) &\geqslant \varepsilon\varphi_p^\star\theta^{(p)\star}\omega + \varepsilon ic(\Theta^{(p)\star}L)\\
&\geqslant \varepsilon\varphi_p^\star a^p\omega + \varepsilon\, i\partial\overline{\partial}\, F_p\circ\varphi_p + \varepsilon ic(\Theta^{(p)\star}L)\\
&\geqslant \varepsilon a^p\varphi_p^\star ic(G) + \varepsilon\, i\partial\overline{\partial}\, F_p\circ\varphi_p + \varepsilon ic(\Theta^{(p)\star}L).\\
\big\{ic(\Theta^{(p)\star}L\otimes\varphi_p^\star G^{-1})\big\} &\geqslant \varepsilon\big\{ic(\Theta^{(p)\star}L)\big\}.
\end{aligned}$$

Puisque $\Theta^{(p)}$ est un morphisme fini, $\Theta^{(p)\star}L$ est ample et, par suite $\Theta^{(p)\star}L\otimes\varphi_p^\star G^{-1}$ peut être muni d'une métrique hermitienne de classe $\mathscr{C}^\infty$ à courbure positive : il est donc nef.

La première étape prouve alors que $\varphi_{p\star}(K_{X_p/Y_p}\otimes\Theta^{(p)\star}L\otimes\varphi_p^\star G^{-1})$ peut être muni, pour tout $\varepsilon'>0$, d'une métrique hermitienne de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont la courbure vérifie

$$ic\big(\varphi_{p\star}(K_{X_p/Y_p}\otimes\Theta^{(p)\star}L\otimes\varphi_p^\star G^{-1})\big)\geqslant_{\mathrm{Griff}} -\varepsilon'\omega\otimes\mathrm{Id}.$$

Par la formule de projection, on obtient que $\varphi_{p\star}(K_{X_p/Y_p}\otimes\Theta^{(p)\star}L)$ est strictement positif au sens de Griffiths. La formule de changement de base montre que ce dernier fibré vectoriel est isomorphe à $\theta^{(p)\star}E$. Puisque $\theta^{(p)}$ est un morphisme fini, on conclut grâce à la proposition 7.1 que $E=\varphi_\star(K_{X/Y}\otimes L)$ est strictement positif au sens de Griffiths. ■

. Applications

. . Variétés kählériennes compactes dont le fibré tangent est numériquement e ectif

Soit X une variété kählérienne compacte dont le fibré tangent est numériquement effectif. D'après [D-P-S 94], il existe un revêtement étale fini $\widetilde{X}\to X$ tel que $\widetilde{X}$ vérifie les mêmes hypothèses que X et tel que α, le morphisme d'Albanese de $\widetilde{X}$, soit une submersion (sur un tore) dont les fibres sont des variétés de Fano. Le fibré anti-canonique (relatif) est nef et $\alpha-$ample. Par application du théorème 3.2, on déduit que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\alpha_\star(K_{\widetilde{X}}^{-k})$ est numériquement effectif.

. . Positivité de $S^kE\otimes\det E$

On démontre le corollaire 3.2. Soit $E\to Y$ un fibré vectoriel ample sur une variété projective lisse Y satisfaisant l'hypothèse (H). Soient $X:=\mathbb{P}(E)$ la variété des hyperplans de E et $p:X\to Y$ la projection naturelle. Par hypothèse, le fibré en droites $\mathscr{O}_E(1)$ canoniquement associé à E est ample sur X. Il suffit de remarquer que $K_{X/Y}=\mathscr{O}_E(-r)\otimes p^\star\det E$, et donc que $p_\star(K_{X/Y}\otimes\mathscr{O}_E(r+k))=S^kE\otimes\det E$. On applique alors le théorème 3.3.

On suppose maintenant que Y admet un morphisme surjectif fini $\rho:Y'\to Y$ où Y' est une variété projective lisse satisfaisant l'hypothèse (H). D'après la proposition 4.3 de [Ha 66], $\rho^\star E$ est ample sur Y'. Le premier cas montre que $S^k\rho^\star(E)\otimes\det\rho^\star(E)=\rho^\star(S^kE\otimes\det E)$ est strictement positif au sens de Griffiths. Reste à appliquer la proposition 7.1 pour conclure.

En utilisant d'autres variétés de drapeaux de E comme dans [De 88], ou des produits fibrés de copies de $\mathbb{P}(E)$ comme dans [Ma 96] ou encore des sommes de copies de E, on obtient sur les variétés vérifiant l'hypothèse (H), la stricte positivité au sens de Griffiths de fibrés construits sur E par d'autres représentations du groupe linéaire tensorisées par une puissance strictement positive du déterminant de E. Puisque la somme de fibrés strictement positifs au sens de Griffiths est strictement positive au sens de Griffiths, on en déduit en particulier la stricte positivité au sens de Griffths de $E^{\otimes k}\otimes(\det E)^{\,\mathrm{rang}E-1}$.

. . Remarque : méthode algébrique

Les variétés de Fano d'indice supérieur ou égal à la dimension sont, d'après un théorème de Kobayashi-Ochiai [K-O 73], l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ de dimension n et la quadrique non dégénérée $\mathbb{Q}^n$ de dimension n plongée dans $\mathbb{P}^{n+1}$. Par simple application du critère de Castelnuovo-Mumford, on peut retrouver le corollaire précédent sur ces variétés.

Rappelons d'abord le théorème d'annulation de Griffiths [Gr 69], selon lequel

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i > 0, \quad H^i\big(Y, S^k E \otimes \det E \otimes L \otimes K_Y\big) = 0$$

pour tout fibré vectoriel ample $E \to Y$ et tout fibré en droites $L \to Y$ semi-positif ou nef.

Dans le cas de l'espace projectif, il existe un fibré en droites $G := \mathcal{O}(1)$ très ample sur Y tel que $G^{n+1} = K_Y^{-1}$. Ceci donne bien

$$\forall i > 0, \quad H^i\big(Y, S^k E \otimes \det E \otimes G^{-1} \otimes G^{-i}\big) = 0.$$

Le fibré $S^k E \otimes \det E \otimes G^{-1}$ est donc globalement engendré. Par conséquent $S^k E \otimes \det E$ est strictement positif au sens de Griffiths, et son dual est même strictement négatif au sens de Nakano.

Dans le cas de la quadrique $Y = \mathbb{Q}^n$, $n \geqslant 2$, l'indice n'est que n ; il faut donc justifier autrement l'annulation du $n^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie. On a dans ce cas $K_Y = G^{-n}$ avec $G = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(1)|_{\mathbb{Q}^n}$, et $S^k E$ est ample tandis que $\det E \otimes G^{-1}$ est semi-positif : si $n \geqslant 3$, ceci résulte du fait que le groupe de Picard de la quadrique est engendré par G ; pour $n = 2$, le groupe de Picard de $\mathbb{Q}^2 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est $\mathbb{Z}^2$ avec $G = \mathcal{O}(1,1)$; tout fibré en droites ample est donc minoré par G. Par dualité de Serre, on trouve alors

$$\begin{aligned} H^n\big(Y, S^k E \otimes \det E \otimes G^{-1} \otimes G^{-n}\big) &= H^0\big(Y, (S^k E \otimes \det E \otimes G^{-1})^\star\big)^\star \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $S^k E \otimes \det E \otimes G^{-1}$ est ample.

Puisque le fibré quotient universel sur les grassmanniennes peut jouer le rôle du fibré en droites très ample G dans le critère de Castelnuovo - Mumford, les résultats précédents restent vrais sur ces variétés [Ma 96].

Deuxième partie

VERSIONS KÄHLÉRIENNES DU THÉORÈME D'ANNULATION DE BOGOMOLOV

. Introduction et énoncé des résultats

Soit L un fibré en droites holomorphe sur une variété X analytique complexe compacte lisse. Si X est projective, le théorème de Bogomolov donne l'annulation des espaces $H^0(X, \Omega_X^p \otimes L^{-1})$ de p-formes holomorphes à valeurs dans L^{-1}, en degrés p strictement inférieurs à la dimension de Kodaira-Iitaka de L, notée $\kappa(L)$. Nous étendons au paragraphe 11 ce résultat à toutes les variétés kählériennes compactes en remplaçant $\kappa(L)$ par un entier $e(L)$ supérieur ou égal à $\kappa(L)$ et ne dépendant que de $c_1(L)$ la première classe de Chern de L. Lorsque L est numériquement effectif, nous montrons au paragraphe 12 que l'annulation a même lieu en degrés p strictement inférieurs à la dimension numérique de L, notée $\nu(L)$. Nous montrons au paragraphe 13 que tous ces résultats restent vrais sur les variétés de Fujiki. Les techniques utilisées sont l'inégalité de Bochner-Kodaira-Nakano et le théorème de Calabi-Yau [Ya 77].

Dans toute cette partie, L désigne un fibré en droites holomorphe sur une variété X analytique complexe compacte lisse. On définit d'abord trois entiers mesurant le rang des directions positives de courbure de L.

. . Dimension de Kodaira-Iitaka

Si V_m désigne l'espace de sections holomorphes $H^0(X, L^m)$ et Z_m l'ensemble base du système linéaire $|L^m|$, la dimension de Kodaira-Iitaka de L, notée $\kappa(L)$, est le maximum des rangs des morphismes canoniques $\Phi_m : X - Z_m \to \mathbb{P}(V_m)$, $(m \geqslant 1)$, avec par convention $\kappa(L) = -\infty$ si tous les V_m sont réduits à 0.

Si $V_m \neq \{0\}$, le morphisme Φ_m permet de munir $L^m = \Phi_m^\star \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V_m)}(1)$ et par suite L d'une métrique singulière à courbure positive, de rang sur $X - Z_m$ égal au rang de Φ_m.

. . Dimension d'e ectivité

On définit les groupes de cohomologie de Bott-Chern de X par

$$H_{BC}^{p,q}(X, \mathbb{C}) := \frac{\mathscr{C}_{p,q}^\infty(X, \mathbb{C}) \cap \ker d}{i\partial\overline{\partial}\,\mathscr{C}_{p-1,q-1}^\infty(X, \mathbb{C})}.$$

L'injection de l'espace des formes de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans l'espace des distributions induit un isomorphisme entre la cohomologie de Bott-Chern ainsi définie et la cohomologie définie de manière analogue à l'aide des courants.

Si X est kählérienne, la classe de cohomologie de Bott-Chern d'un courant de bidegré pur (p, q) avec $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$ coïncide avec sa classe de cohomologie de De Rham.

On dira que le fibré L (ou le $\mathbb{R}-$diviseur L) est pseudo-effectif si la classe de cohomologie de Bott-Chern $c_1(L)_{BC}$ a, parmi ses représentants, un courant de type $(1, 1)$ positif fermé. Par exemple si X est projective, cela revient à supposer que la classe de cohomologie de De Rham $c_1(L)$ appartient au cône convexe fermé engendré par les classes des diviseurs effectifs dans $H^2(X, \mathbb{R})$ [De 92]. La dimension d'effectivité de L, notée $e(L)$, est alors définie par

$$e(L) = \max \quad \{k \,/\, \exists T \in c_1(L)_{BC},\ T \geqslant 0, \text{rang } T_{ac} = k \text{ sur un ensemble de mesure strictement positive}\}$$

où T_{ac} désigne la partie absolument continue de T par rapport à une métrique de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Puisque tout courant positif fermé dans $c_1(L)_{BC}$ est la forme de courbure d'une métrique singulière sur L, la dimension d'effectivité de L prend en compte toutes les métriques singulières sur L et pas seulement celles qui proviennent d'un plongement canonique. Cette dimension ne dépend que de $c_1(L)_{BC}$.

. . Dimension numérique

On suppose ici que le fibré L (ou le $\mathbb{R}-$diviseur L) est numériquement effectif (nef), c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, $c_1(L)_{BC}$ peut être représentée par une forme de type $(1,1)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ minorée par $-\varepsilon\omega$. Si X est projective, cela revient à supposer que $c_1(L)$ appartient au cône convexe fermé engendré par les classes des diviseurs amples, ou encore que le degré de L sur toute courbe est positif ou nul. La dimension numérique de L notée $\nu(L)$, est alors le plus grand des entiers s tels que la classe de cohomologie de Bott-Chern $(c_1(L)_{BC})^s$ soit non nulle.

. . Comparaison de ces dimensions

On suppose désormais, sauf au paragraphe 13 sur les variétés de Fujiki, que (X,ω) est kählérienne.

Proposition 9.1. — *(i) Si L est un fibré en droites pseudo-e ectif, alors* $\kappa(L) \leqslant e(L)$.

(ii) Si L est un fibré en droites numériquement e ectif, alors $e(L) \leqslant \nu(L)$.

(iii) Les inégalités précédentes peuvent être strictes.

Démonstration. —

(i) résulte de la remarque de la fin du paragraphe 9.1.

(ii) Il suffit de montrer que pour tout courant positif fermé T dans $c_1(L)$ on a

$$0 \leqslant \int_X (T_{ac})^k \wedge \omega^{n-k} \leqslant \int_X c_1(L)^k \wedge \omega^{n-k}.$$

Un tel courant s'écrit $\alpha + i\partial\overline{\partial}\varphi$ où α est un représentant de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $c_1(L)$ et φ une fonction quasi-plurisousharmonique sur X (i.e. une fonction dont le hessien $i\partial\overline{\partial}\varphi$ est localement minoré par une forme de type $(1,1)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$). On cherche à approcher T_{ac} par des courants de classe $\mathscr{C}^\infty$ pour pouvoir estimer $(T_{ac})^k$.

On commence par régulariser φ à l'aide du théorème 9-1 de [De 82]. Il existe donc une famille croissante $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur X et une famille coissante $(\lambda_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ de fonctions continues sur X telles que

- φ_ε tend partout vers φ
- $\alpha + i\partial\overline{\partial}\varphi_\varepsilon \geqslant -\lambda_\varepsilon\,\omega$
- λ_ε tend partout vers $\tau_-(.)\ \nu(\varphi,.)$,

où τ_- est une fonction continue positive sur X et $\nu(\varphi, x)$ désigne le nombre de Lelong de φ en x. Il résulte de la démonstration que $\alpha + i\partial\overline{\partial}\,\varphi_\varepsilon$ tend presque partout vers T_{ac}. La minoration du hessien de φ_ε est mauvaise précisément là où φ_ε tend vers $-\infty$. On tronque donc φ_ε en posant

$$\psi_\varepsilon^\eta := \max(\varphi_\varepsilon, f^\eta)$$

où $(f^\eta)_{\eta\in]0,1]}$ est une famille croissante de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ tendant partout vers $-\infty$ et vérifiant les minorations

$$\alpha + i\partial\overline{\partial}\, f^\eta \geqslant -\eta\omega \quad \forall \eta \in]0,1];$$

cette famille existe car L est nef.

On montre maintenant que pour tout $\eta > 0$ fixé, il existe $\varepsilon(\eta) > 0$ tel que

$$(\star) \qquad \forall \varepsilon \leqslant \varepsilon(\eta) \quad \alpha + i\partial\overline{\partial}\,\psi_\varepsilon^\eta \geqslant -\eta \max_X(\tau_-, 1)\omega.$$

Soit $E := E_{\eta/2}(\varphi) = \{x \in X/\ \nu(\varphi, x) \geqslant \eta/2\}$. Par un théorème de Siu, E est un sous ensemble analytique strict de X.

Puisque φ vaut $-\infty$ sur E compact,

$\exists \varepsilon_1(\eta), \forall x \in E,\ \ \varphi_{\varepsilon_1(\eta)}(x) \ < \ f^\eta(x).$

$\exists V_\eta$ voisinage ouvert de E, $\forall \varepsilon \leqslant \varepsilon_1(\eta)$, $\forall y \in V_\eta, \varphi_\varepsilon(y) \ \leqslant \ \varphi_{\varepsilon_1(\eta)}(y) \ < \ f^\eta(y).$

$\forall \varepsilon \leqslant \varepsilon_1(\eta),\ \alpha + i\partial\overline{\partial}\,\psi_\varepsilon^\eta \ = \ \alpha + i\partial\overline{\partial}\, f^\eta \ \geqslant \ -\eta\,\omega \quad$ sur V_η.

Par compacité de $X - V_\eta$

$\exists \varepsilon(\eta) \leqslant \varepsilon_1(\eta),\ \forall \varepsilon \ \leqslant \ \varepsilon(\eta),\ \ \lambda_\varepsilon \ \leqslant \ \lambda_{\varepsilon(\eta)} \ \leqslant \ \eta \max_X(\tau_-) \quad$ sur $X - V_\eta$.

On a donc

$\forall \varepsilon \leqslant \varepsilon(\eta),\ \ \alpha + i\partial\overline{\partial}\,\psi_\varepsilon^\eta \ \geqslant \ -\eta \max_X(\tau_-, 1)\omega \quad$ sur X.

Reste à montrer que $\alpha + i\partial\overline{\partial}\,\psi_{\varepsilon(\eta)}^\eta$ tend presque partout vers T_{ac}. Soit un point $x \in X$ où $\varphi(x) > -\infty$ et $\alpha + i\partial\overline{\partial}\,\varphi_\varepsilon$ tend vers T_{ac}.

Puisque $f^\eta(x)$ tend vers $-\infty$, il existe $\eta_0 = \eta_0(x)$ tel que

$$\begin{array}{ll} \forall \eta \leqslant \eta_0,\ \forall \varepsilon \in]0,1], & \varphi_\varepsilon(x) \geqslant \varphi(x) > f^\eta(x) \\ \forall \eta \leqslant \eta_0,\ \forall \varepsilon \in]0,1], & \exists V_{\varepsilon,\eta} \text{ voisinage de } x, \forall y \in V_{\varepsilon,\eta}, \varphi_\varepsilon(y) > f^\eta(y) \\ \forall \eta \leqslant \eta_0,\ \forall \varepsilon \in]0,1], & i\partial\overline{\partial}\,\psi_\varepsilon^\eta = i\partial\overline{\partial}\,\varphi^\varepsilon \text{ en } x. \end{array}$$

D'où la convergence presque partout de $\alpha + i\partial\overline{\partial}\,\psi_{\varepsilon(\eta)}^\eta$ vers T_{ac}.

Le lemme de Fatou fournit maintenant

$$\begin{aligned} \int_X (T_{ac})^k \wedge \omega^{n-k} \quad &\leqslant \quad \liminf_{\eta\to 0} \int_X \left(\alpha + i\partial\overline{\partial}\,\psi_{\varepsilon(\eta)}^\eta + \eta \max_X(\tau_-, 1)\ \omega\right)^k \wedge \omega^{n-k} \\ &\leqslant \quad \int_X c_1(L)^k \wedge \omega^{n-k}. \end{aligned}$$

(iii) Soient L_1 un fibré en droites ample sur X_1 et L_2 un fibré en droites plat mais pas de torsion sur X_2 . Pour $L := p_1^\star(L_1) \otimes p_2^\star(L_2)$ sur $X := X_1 \times X_2$ où p_1 et p_2 sont les projections canoniques de X sur X_1 et X_2, on a

$$-\infty = \kappa(L) < e(L) = \nu(L) = \dim X_1.$$

Suivant l'exemple 1-7 de [D-P-S 94], on considère le fibré en droites L associé au seul fibré vectoriel de rang 2 extension non triviale de deux fibrés en droites triviaux sur une courbe elliptique. Le calcul explicite des métriques singulières sur L (qui permet de conclure que L nef n'a pas de métrique hermitienne de classe $\mathscr{C}^\infty$ à courbure semi-positive) conduit à

$$0 = \kappa(L) = e(L) < \nu(L) = 1.$$

En combinant ces deux exemples, on peut rendre les deux inégalités simultanément strictes.

∎

. . Enoncé des résultats

Soit L un fibré en droites holomorphe sur une variété X analytique complexe compacte lisse. Le théorème d'annulation de Bogomolov [Bo 78] dit que si X est projective alors

$$H^0(X, \Omega_X^p \otimes L^{-1}) = 0 \quad \text{pour } p < \kappa(L).$$

On étend ce résultat dans deux directions, en supposant X seulement kählérienne .

THÉORÈME 9.1. — *Si L est pseudo-e ectif alors*

$$H^0(X, \Omega_X^p \otimes L^{-1}) = 0 \quad \textit{pour } p < e(L).$$

THÉORÈME 9.2. — *Si L est numériquement e ectif alors*

$$H^0(X, \Omega_X^p \otimes L^{-1}) = 0 \quad \textit{pour } p < \nu(L).$$

THÉORÈME 9.3. — *Plus généralement, si L est numériquement équivalent à un $\mathbb{R}-$diviseur de la forme $D + E$ avec D nef et E pseudo-e ectif alors*

$$H^0(X, \Omega_X^p \otimes L^{-1}) = 0 \quad \textit{pour } p < \nu(D).$$

Suivant [Fu 83], on dira qu'une variété Y analytique complexe compacte lisse est de Fujiki si elle est le but d'une application $f : X \to Y$ holomorphe surjective, dont la source X est kählérienne compacte lisse. Par un résultat de J. Varouchas ([Va 85] théorème 3), une telle variété est modification d'une variété kählérienne compacte lisse.

THÉORÈME 9.4. — *Les résultats précédents restent vrais sur les variétés de Fujiki.*

Remarque. — Le théorème 9.1 peut être reformulé de la façon suivante : le faisceau Ω_X^p des p-formes holomorphes sur X n'a pas de sous-faisceaux de rang un associé à un fibré en droites pseudo-effectif de dimension d'effectivité strictement supérieure à p. Les autres théorèmes se reformulent de façon analogue. En particulier, les faisceaux $\Omega_X^p (p < \dim X)$ d'une variété de Fujiki compacte lisse n'ont pas de sous fibré en droites nef et gros (i.e. de dimension de Kodaira-Iitaka maximale).

Remarque. — Dans le cas où X est projective, le théorème 9.2 peut se démontrer en utilisant des sections hyperplanes convenables de X et en raisonnant par récurrence sur la dimension de X. On se ramène ainsi au cas où $\nu(L) = \dim X$. Le théorème de Bogomolov permet de conclure puisqu'alors $\nu(L) = \kappa(L)$. Cette méthode tombe complètement en défaut dans le cas kählérien général puisque X peut n'avoir aucun sous-ensemble analytique propre autre que les parties finies. On utilisera donc ici des méthodes d'analyse.

La démonstration de Viehweg [Vi 82] du théorème d'annulation de la cohomologie d'un fibré nef et gros sur une variété projective lisse repose après revêtement cyclique et conjugaison pour les groupes de cohomologie d'un faisceau de structure, sur le théorème d'annulation de Bogomolov. Mais sur une variété kählérienne générale, il n'est pas possible de réduire le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg, à un théorème d'annulation de type Bogomolov.

. Les outils

. . Rappels de géométrie kählérienne

Le symbole Λ désigne l'adjoint de la multiplication par ω. Soit γ une $(1,1)-$forme réelle sur T_xX. Il existe une base $(t_j^\star)_{1\leqslant j\leqslant n}$ de $T_x^\star X$, $\omega(x)-$ orthonormée, telle que $\gamma = i\sum_{j=1}^n \gamma_j t_j^\star \wedge \overline{t}_j^\star$ où les (γ_j) sont les valeurs propres de γ par rapport à $\omega(x)$. Pour toute $(p,0)-$forme sur T_xX, soit $u = \sum_{|J|=p} u_J t_J^\star (t_J^\star := t_{j_1}^\star \wedge \cdots \wedge t_{j_p}^\star)$, on a

$$[\gamma,\Lambda]u = \sum_{|J|=p} (\sum_{j\in J} \gamma_j - \sum_{j=1}^n \gamma_j) u_J t_J^\star = -\sum_{|J|=p} (\sum_{j\notin J} \gamma_j) u_J t_J^\star.$$

. . Inégalité de Bochner - Kodaira - Nakano

Soient h une métrique hermitienne de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur L, $\Theta_h(L) := \frac{i}{2\pi} c_h(L)$ la forme de courbure de la connexion de Chern du fibré en droites hermitien (L,h) et $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres par rapport à ω. Alors pour toute p-forme holomorphe u à valeurs dans L^{-1} on a

$$0 \geqslant \int_X \langle [\Theta_h(L^{-1}),\Lambda]u, u]\rangle_{(L^{-1},h)} dV_\omega \geqslant \int_X (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-p}) \|u\|^2_{(L^{-1},h)} dV_\omega.$$

. . Théorème de Calabi - Yau

La courbure de Ricci d'une métrique kählérienne sur X est dans la première classe de Chern de X. Le théorème de Calabi - Yau affirme (dans ce cas particulier) que tout représentant de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $c_1(X)$ peut être réalisé comme courbure de Ricci d'une métrique kählérienne sur X.

Plus précisement, soient $\gamma \in H^{1,1}(X)$ une classe de Kähler et $\rho \in c_1(X)$ une $(1,1)-$ forme réelle fermée de classe $\mathscr{C}^\infty$. Il existe dans γ une unique forme de Kähler v dont la forme de Ricci $Ricci(v)$ est ρ. Autrement dit, si f est un potentiel de $Ricci(\omega) - \rho$ tel que $\int\limits_X e^f \omega^n = \gamma^n$, on obtient

$$v^n = e^f \omega^n.$$

Cette dernière équation admet une unique solution v dans γ pour toute donnée f satisfaisant $\int\limits_X e^f \omega^n = \gamma^n$.

Conjecturé par E. Calabi, ce résultat a été démontré par S.T. Yau par des techniques au développement desquelles Th. Aubin a beaucoup contribué.

. Groupes de cohomologie d'un fibré pseudo-e ectif

On se propose dans ce paragraphe de démontrer le théorème 9.1 sur la cohomologie des fibrés en droites pseudo-effectifs.

Soit T un courant positif fermé dans $c_1(L)$ tel que le rang de sa partie absolument continue soit $e(L)$ sur une partie A de mesure strictement positive. Soit h une métrique hermitienne de classe $\mathscr{C}^\infty$ quelconque sur L. Le courant T s'écrit $\Theta_h(L) + i\partial\overline{\partial}\varphi$ où φ est une fonction quasi-plurisousharmonique sur X. Par le théorème de régularisation 9-1 de [De 82], il existe une famille croissante $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur X, une famille croissante $(\lambda_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ de fonctions de continues sur X et une famille $(\gamma_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ de $(1,1)-$ formes réelles continues sur X telles que :

- Pour tout $x \in X$, $\varphi_\varepsilon(x)$ tend vers $\varphi(x)$
- $i\partial\overline{\partial}\varphi_\varepsilon \geqslant \gamma_\varepsilon - \lambda_\varepsilon\omega$
- $\gamma_\varepsilon \geqslant -\Theta_h(L)$
- γ_ε tend presque partout vers $\left(i\partial\overline{\partial}\varphi\right)_{ac}$
- λ_ε tend presque partout vers 0.

L'identité de Bochner - Kodaira - Nakano donne pour toute $p-$forme holomorphe u à valeurs dans L^{-1} muni de la métrique duale de $he^{-2\pi\varphi_\varepsilon}$

$$\int_X \langle[-\Theta_h(L) - i\partial\overline{\partial}\varphi_\varepsilon, \Lambda]u, u\rangle_{(L^{-1},h)} e^{2\pi\varphi_\varepsilon} dV_\omega \leqslant 0$$
$$\int_X \langle[-\Theta_h(L) - \gamma_\varepsilon + \lambda_\varepsilon\omega, \Lambda]u, u\rangle_{(L^{-1},h)} e^{2\pi\varphi_\varepsilon} dV_\omega \leqslant 0.$$

Les théorèmes usuels d'intégration s'appliquent car φ_ε est uniformément majorée , γ_ε minorée, λ_ε et φ_ε croissantes, et conduisent à

$$\int_X \langle[-T_{ac}, \Lambda]u, u\rangle_{(L^{-1},h)} e^{2\pi\varphi} dV_\omega \leqslant 0.$$

D'où

$$\int\limits_{X-\,\mathrm{supp}(T-T_{ac})} \langle[-T_{ac},\Lambda]u,u\rangle_{(L^{-1},h)} e^{2\pi\varphi}\,dV_\omega \leqslant 0.$$

Sur $X-\ \mathrm{supp}(T-T_{ac})$, les valeurs propres de T_{ac} sont des fonctions L^1 positives dont $e(L)$ sont strictement positives sur $A-\ \mathrm{supp}(T-T_{ac})$. La forme u est donc nulle sur A, holomorphe sur X et par conséquent identiquement nulle. ■

. Groupes de cohomologie d'un fibré nef

On démontre maintenant le théorème 9.2 concernant les fibrés en droites numériquement effectifs.

Soit $l=\nu(L)$ la dimension numérique de L. Puisque L est nef, $c_1(L)^l$ peut être représentée par un courant positif fermé non nul T. D'où

$$\int\limits_X c_1(L)^l\wedge\omega^{n-l} = \int\limits_X T\wedge\omega^{n-l} > 0.$$

Puisque $c_1(L)+\varepsilon\{\omega\}$ est pour tout $\varepsilon>0$ une classe de Kähler, le théorème de Calabi - Yau fournit une métrique hermitienne h_ε sur L telle que $\Theta_{h_\varepsilon}(L)+\varepsilon\omega$ soit une métrique kählérienne sur X et

$$(\Theta_{h_\varepsilon}(L)+\varepsilon\omega)^n = \lambda_\varepsilon\omega^n$$

avec

$$\lambda_\varepsilon = \frac{\int\limits_X (c_1(L)+\varepsilon\omega)^n}{\int_X \omega^n} \sim_{\varepsilon\to 0} C\varepsilon^{n-l}\ (C>0).$$

Soit h une métrique hermitienne quelconque sur L. La métrique h_ε s'ecrit $he^{-2\pi\varphi_\varepsilon}$. On peut imposer la condition de normalisation $\int_X \varphi_\varepsilon dV_\omega = 0$. Alors

$$\begin{aligned}\Delta_\omega\varphi_\varepsilon &= i\partial\overline{\partial}\varphi_\varepsilon\wedge\frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} = \mathrm{Trace}_\omega\Theta_{h_\varepsilon}(L) - \mathrm{Trace}_\omega\Theta_h(L)\\ \varphi_\varepsilon &= G_\omega(\mathrm{Trace}_\omega\Theta_{h_\varepsilon}(L) - \mathrm{Trace}_\omega\Theta_h(L))\end{aligned}$$

où G_ω est l'opérateur de Green du Laplacien de associé à ω[G-H 78]. On observe que la famille de fonctions $(\mathrm{Trace}_\omega\Theta_{h_\varepsilon}(L))_{\varepsilon\in]0,1]}$ est bornée en masse, que $G_\omega : L^1\to L^1$ est compact, on peut donc supposer, quitte à extraire une sous-suite, que φ_ε converge presque partout vers $\varphi\in L^1$.

On remarque de plus que, par construction, pour tout $\varepsilon>0, \Theta_{h_\varepsilon}(L)+\varepsilon\omega>0$ et donc $i\partial\overline{\partial}\varphi_\varepsilon \geqslant -\Theta_h(L)-\omega$. La condition de normalisation $\int_X\varphi_\varepsilon dV_\omega=0$ assure donc que la suite $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ est uniformément majorée sur X compacte.

Soient $(-\varepsilon\leqslant)\gamma_1^\varepsilon\leqslant\cdots\leqslant\gamma_n^\varepsilon$ les valeurs propres de Θ_{h_ε} par rapport à ω. Soit $\delta>0$ tel que

$\mu := \dfrac{n-l}{n-l+1} + \delta\dfrac{l-1}{n-l+1}$ soit strictement inférieur à 1. On a

$$\begin{aligned}\int_X (\gamma_n^\varepsilon + \varepsilon)dV_\omega &\leqslant \int_X [(\gamma_1^\varepsilon+\varepsilon)+\cdots+(\gamma_n^\varepsilon+\varepsilon)]dV_\omega \\ &\leqslant \int_X (c_1(L)+\varepsilon\omega)\wedge\frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\leqslant \int_X (c_1(L)+\omega)\wedge\frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} =: A.\end{aligned}$$

Alors $V_\varepsilon := \{x \in X/\gamma_n^\varepsilon + \varepsilon \geqslant A\varepsilon^{-\delta}\}$ est de volume inférieur à $\varepsilon^\delta \int_X \omega^n$. De plus λ_ε est partout égal au produit des valeurs propres de $\Theta_{h_\varepsilon}(L) + \varepsilon\omega$, soit $\gamma_1^\varepsilon + \varepsilon \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n^\varepsilon + \varepsilon$. En dehors de V_ε, on a donc

$$\begin{aligned}\gamma_{n-l+1}^\varepsilon + \varepsilon &\geqslant \left((\gamma_1^\varepsilon+\varepsilon)\dots(\gamma_{n-l+1}^\varepsilon+\varepsilon)\right)^{1/n-l+1} \\ &\geqslant \left(\frac{\lambda_\varepsilon}{(\gamma_n^\varepsilon+\varepsilon)^{l-1}}\right)^{1/n-l+1} \\ &\geqslant B\frac{\varepsilon^{\frac{n-l}{n-l+1}}}{\varepsilon^{-\delta\frac{l-1}{n-l+1}}} \geqslant B\varepsilon^\mu.\end{aligned}$$

On prend maintenant une $p-$forme holomorphe u à valeurs dans L^{-1} muni de h_ε $(p < l)$. Il vient par l'identité de Bochner - Kodaira - Nakano

$$0 \geqslant \int_X \langle[\Theta_{h_\varepsilon}(L^{-1}),\Lambda]u, u\rangle_{(L^{-1},h)} e^{2\pi\varphi_\varepsilon} dV_\omega.$$

Par suite

$$\begin{aligned}0 &\geqslant \int_X (\gamma_1^\varepsilon+\cdots+\gamma_{n-l+1}^\varepsilon+\cdots+\gamma_{n-p}^\varepsilon)\|u\|^2_{(L^{-1},h)}e^{2\pi\varphi_\varepsilon}dV_\omega \\ &\geqslant \int_{X-V_\varepsilon}\Big(B\varepsilon^\mu-(n-p)\varepsilon\Big)\|u\|^2_{(L^{-1},h)}e^{2\pi\varphi_\varepsilon}dV_\omega + \int_{V_\varepsilon}(n-p)(-\varepsilon)\|u\|^2_{(L^{-1},h)}e^{2\pi\varphi_\varepsilon}dV_\omega.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_X \|u\|^2_{(L^{-1},h)}e^{2\pi\varphi_\varepsilon}dV_\omega &\leqslant \left(1+\frac{n-p}{B\varepsilon^{\mu-1}-(n-p)}\right)\int_{V_\varepsilon}\|u\|^2_{(L^{-1},h)}e^{2\pi\varphi_\varepsilon}dV_\omega \\ &\leqslant C_1\ \mathrm{Vol}_\omega(V_\varepsilon) \leqslant C_2\varepsilon^\delta.\end{aligned}$$

car (φ_ε) est uniformément majorée. Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\int_X \|u\|^2_{(L^{-1},h)}e^{2\pi\varphi}dV_\omega \leqslant 0$$

et u est donc nulle. ■

Idée de démonstration du théorème . . — On adapte la démonstration précédente aprés avoir remarqué que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une forme de classe $\mathscr{C}^\infty$ cohomologue à E et minorée par $-\varepsilon\omega$ en dehors d'une partie W_ε de X de mesure inférieure à ε.

. Sur les variétés de Fujiki

On se propose ici de déduire le théorème 9.4 des théorèmes analogues sur les variétés kählériennes par les techniques développées dans [Fu 83].

On montre d'abord que sur les variétés de Fujiki comme sur les variétés kählériennes, les définitions relatives à la pseudo-effectivité et à l'effectivité numérique s'expriment en cohomologie de De Rham.

Lemme 13.1. — *Sur une variété de Fujiki X, tout courant T de type (p,q) avec $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ qui est d-exact, est $i\partial\overline{\partial}$-exact.*

Démonstration. — Ce résultat est classique sur les variétés kählériennes, par la théorie de Hodge. Soit $\mu : \widetilde{X} \to X$ une modification de X, avec $\widetilde{X}$ kählérienne. Puisque l'injection des formes différentielles dans les courants induit un isomorphisme en cohomologie de Bott-Chern, il existe une forme différentielle u de classe $\mathscr{C}^\infty$, et un courant T' tels que $T = u + i\partial\overline{\partial}\, T'$. La forme $\mu^\star u$ est, comme T, d-fermée. Il résulte des formules $\mu_\star\mu^\star u = u$, où $\mu_\star$ est calculé au sens des courants, et $\mu_\star\, i\partial\overline{\partial} = i\partial\overline{\partial}\, \mu_\star$ que T est $i\partial\overline{\partial}$-exact. ∎

Proposition 13.2. — *Soient $f : X \to Y$ une application holomorphe entre variétés analytiques complexes compactes lisses et $L \to Y$ un fibré en droites sur Y.*

(i) Même si L est pseudo-e ectif, $f^\star L$ ne l'est pas en général.

(ii) Si L est nef, $f^\star L$ l'est aussi et $\nu(f^\star L) \leqslant \nu(L)$.

Démonstration. — (ii) résulte des définitions. Pour (i), il suffit de considérer l'injection du diviseur exceptionnel $E \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ dans l'éclaté d'une variété de dimension n en un point et le fibré en droites effectif $\mathscr{O}(E)$ dont la restriction à E est isomorphe à $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$. ∎

Dans le contexte des variétés de Fujiki, on obtient pour une application surjective la

Proposition 13.3. — *Soient $f : X \to Y$ une application holomorphe surjective entre variétés de Fujiki compactes lisses et $L \to Y$ un fibré en droites sur Y.*

(i) Si L est pseudo-e ectif, $f^\star L$ l'est aussi et $e(f^\star L) \geqslant e(L)$.

(ii) Si L est nef, $\nu(f^\star L) = \nu(L)$.

Démonstration. — Pour (i), soit T un courant de type $(1,1)$, positif, d-fermé, dans la dans la classe de cohomologie de Bott-Chern $c_1(L)_{BC}$, tel que le rang de sa partie absolument continue soit $e(L)$ sur un ensemble de mesure non nulle. Le courant T s'écrit $T = u + i\partial\overline{\partial}\,\varphi$, où u est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et φ localement intégrable. Puisque f est surjective et propre, $\varphi \circ f$ est une fonction localement intégrable. Le courant $f^\star T := f^\star u + i\partial\overline{\partial}\,\varphi \circ f$ permet de conclure puisque la différentielle de f est surjective en dehors d'un sous-ensemble analytique strict de X.

Pour (ii), il suffit d'après la proposition précédente de traiter le cas où X est kählérienne . On munit donc X d'une métrique kählérienne ω. On note $m = \dim Y$, $n = \dim X$ et $l = \nu(L)$. Soit u un représentant de classe $\mathscr{C}^\infty$ et de type $(1,1)$ de la classe $c_1(L)$. Par la formule de projection,

$$f_\star\left(f^\star u^l \wedge \omega^{n-m}\right) = u^l \wedge f_\star(\omega^{n-m}).$$

Le courant $f_\star(\omega^{n-m})$ est positif fermé de degré zéro : il correspond à la fonction constante strictement positive égale au volume d'une fibre générique de f. Puisque u^l n'est pas nulle en cohomologie de De Rham, il en est donc de même pour $f^\star u^l$. Ainsi $\nu(f^\star L) = \nu(L)$. ■

Reste à rappeler le théorème d'injectivité (voir [Fu 83] théorème (4.10)) pour conclure la démonstration du théorème 9.4.

Théorème 13.1. — *Soient $f : X \to Y$ une application holomorphe surjective entre variétés de Fujiki compactes lisses et $E \to Y$ un fibré vectoriel sur Y. Alors l'application naturelle $H^{p,q}(Y, E) \to H^{p,q}(X, f^\star E)$ est injective pour tout couple d'entiers (p, q).*

Remarque. — Les méthodes utilisées ici permettent de montrer le théorème suivant de type Kawamata-Viehweg ([Fu 83] théorème (4.9))

Théorème 13.2. — *Soient X une variété de Fujiki compacte lisse et $L \to X$ un fibré en droites dont la première classe de Chern $c_1(L)$ possède un représentant de classe $\mathscr{C}^\infty$ semi-positif dont le rang sur un ensemble de mesure non nulle est k. Alors*

$$H^q(X, L^{-1}) = 0 \quad \text{pour } q < k.$$

En particulier, si L a une puissance globalement engendrée (on dit que L est semi-ample) alors l'annulation a lieu en degrés q strictement inférieurs à la dimension numérique de L.

Démontrer par ces méthodes le théorème de Kawamata-Viehweg général sur les variétés kählériennes compactes nécessiterait d'estimer différents représentants harmoniques, pour différentes métriques, d'une classe de cohomologie de Dolbeault à valeurs dans L.

Troisième partie

ANNULATION GÉNÉRIQUE DES GROUPES DE COHOMOLOGIE D'UN FIBRÉ SEMI-NÉGATIF

. Introduction

Dans toute la suite, (X, ω) désignera une variété kählérienne compacte connexe lisse de dimension n, $F \to X$ un fibré vectoriel holomorphe sur X de rang r. La lettre Φ désignera une $(0,1)$-forme harmonique sur X.

Nous noterons $\mathrm{Pic}^0(X)$ le tore complexe qui paramètre les classes d'isomorphie de fibrés en droites topologiquement triviaux sur X (i.e. de première classe de Chern nulle). Pour $y \in \mathrm{Pic}^0(X)$, la notation λ_y désignera un représentant de y. Pour $(p, q, m) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^\star$, nous étudions les lieux exceptionnels de cohomologie :

$$S_m^{p,q}(X, F) := \{y \in \mathrm{Pic}^0(X) / h^{p,q}(X, F \otimes \lambda_y) \geqslant m\}.$$

S'il n'y a pas de risque de confusion, nous omettrons X dans la notation $S_m^{p,q}(X, F)$. Si p est nul, nous l'omettrons. De même, si m vaut 1, nous l'omettrons. Plus généralement, pour tout morphisme $a : X \to A$ de X dans un tore complexe, nous étudions

$$S_m^{p,q}(X, F, a) := \{y \in \mathrm{Pic}^0(A) / h^{p,q}(X, F \otimes a^\star\lambda_y) \geqslant m\}.$$

Par utilisation des techniques de déformation de groupes de cohomologie, Green et Lazarsfeld ont obtenu des théorèmes d'annulation générique et de structure des lieux exceptionnels de cohomologie pour les fibrés topologiquement triviaux [G-L 87] [G-L 87'] [G-L 91]. Cette restriction est due à l'utilisation de la théorie de Hodge comme argument ultime. Au paragraphe 15, nous étudions des notions de semi-négativité pour obtenir des outils analytiques analogues à ceux fournis par la théorie de Hodge. Nous étudions en particulier les morphismes de Lefschetz et les morphismes de produit tensoriel par une section agissant sur la cohomologie des fibrés semi-négatifs. Nous étendons au paragraphe 16 les théorèmes d'annulation générique aux fibrés semi-négatifs.

Nous définissons au paragraphe 17 une condition de dégénérescence relative à (X, F, Φ) et nous montrons que cette condition réduit à l'obstruction du premier ordre les obstructions supérieures qui apparaissent dans la déformation des classes de cohomologie de F dans la direction Φ. Nous proposons ensuite des hypothèses de semi-négativité analytiques et algébriques sur F qui assurent la condition de dégénérescence et, par suite, la structure linéaire du lieu exceptionnel de la cohomologie des déformations de F par produit tensoriel par les fibrés en droites topologiquement triviaux. En découlent des propriétés de périodicité de la fonction $k \mapsto h^q(X, F \otimes \mu^k)$ où F est un fibré vectoriel semi-positif et μ un fibré en droites numériquement plat.

Nous définissons ensuite une condition forte du premier ordre qui réduit les obstructions supérieures à l'obstruction du premier ordre et implique aussi l'annulation de cette dernière obstruction. Sous cette condition, les déformations de F ont toutes la même cohomologie. Nous donnons des hypothèses analytiques et algébriques qui assurent la condition forte du premier ordre.

Au paragraphe 18, nous étendons les résultats précédents au cas de la cohomologie des déformations d'un fibré en droites numériquement effectif et abondant sur une variété projective. Nous montrons au paragraphe 20 comment obtenir des résultats pour les fibrés vectoriels.

Nous noterons $\alpha = \alpha_X : X \to \mathrm{Alb}(X)$ le morphisme d'Albanese de X. Le prototype des théorèmes que nous obtenons est

Théorème. — *Considérons (X,ω) une variété kählérienne compacte lisse de dimension d'Albanese* $\dim\alpha(X)$ *et $F \to X$ un fibré en droites dont le dual est globalement engendré. Alors, pour tout $q < \dim\alpha(X)$, le lieu exceptionnel $S^q(F)$ de la cohomologie des déformations de F par produit tensoriel par les fibrés en droites topologiquement triviaux est un ensemble analytique réunion de translatés de sous-tores de* $\mathrm{Pic}^0(X)$ *de codimension supérieure à* $\dim\alpha(X) - q$. *De plus, $S^q(F) \subset S^q(F^2) \subset S^q(F^3) \subset \cdots$.*

Au paragraphe 21, nous retrouvons le théorème de Lichnerowicz sur la surjectivité et la lissité du morphisme d'Albanese d'une variété kählérienne compacte à courbure de Ricci semi-positive.

Les théorèmes d'annulation générique et de structure des lieux exceptionnels sur les variétés kählériennes complètes à géométrie bornée s'obtiendront sans doute par une démarche similaire.

H. Dunio a obtenu sur les variétés projectives, des théorèmes d'annulation générique pour les fibrés en droites de dual semi-ample ou abondant en les déduisant par construction de revêtements cycliques, de théorèmes sur les fibrés en droites topologiquement triviaux (voir [E-V 92]).

. Notions de semi-négativité

. . Définitions et propriétés

Soient la variété (X,ω) et le fibré vectoriel $F \to X$ comme dans l'introduction. On munit F d'une métrique hermitienne h de classe $\mathscr{C}^\infty$. Les métriques ω et h permettent de définir sur l'espace des formes à valeurs dans F un produit scalaire global noté $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$. On note $D := D' + D''$ la connexion de Chern sur le fibré holomorphe hermitien (F,h) et $\delta := \delta' + \delta''$ l'adjoint de D pour le produit scalaire $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$. La notation Λ désigne l'adjoint de la multiplication extérieure par ω notée L agissant sur les formes différentielles à valeurs dans F. On note Δ (resp. Δ', Δ'') le Laplacien associé à l'opérateur D (resp. D', D'').

Dans ce contexte, on dispose des identités de Hodge :

$$\begin{array}{lll} [\delta'', L] = iD' & [\delta', L] = -iD'' & \textit{i.e. } [\delta, L] = i(D' - D'') \\ [D'', \Lambda] = i\delta' & [D', \Lambda] = -i\delta'', & \end{array}$$

de la relation entre Laplaciens (conséquence de $[D', \delta''] = 0$ et de $[D'', \delta'] = 0$)

$$\Delta = \Delta' + \Delta'',$$

de la relation de commutation (conséquence par l'identité de Jacobi de l'identité $[D, [\delta, L]] = 0$)

$$[\Delta, L] = 0$$

et de l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano :

$$\Delta'' = \Delta' + [ic_h(F), \Lambda].$$

L'opérateur $[ic_h(F), \Lambda]$ agit ponctuellement de la manière suivante : en notant

(dz_l) une base ω-orthonormée de $T_x^\star X$,

(e_λ) une base h-orthonormée de E_x,

$\omega_x = i\sum_l dz_l \wedge d\overline{z}_l$,

$ic_h(F)_x = i\sum_{jk\lambda\mu} c_{jk\lambda\mu} dz_j \wedge d\overline{z}_k e_\lambda^\star \otimes e_\mu$,

$u = \sum_{|I|=p,|J|=q,\lambda} u_{IJ}^\lambda dz_I \wedge d\overline{z}_J \otimes e_\lambda \in \Lambda^{p,q} T_x^\star X \otimes F_x$,

et en convenant que les tenseurs $u_{I,J}^\lambda$ sont alternés en les indices I et J

$$\begin{aligned} < [ic_h(F), \Lambda]u, u > \quad = \quad & \sum_{|I'|=p-1,|J|=q} \sum_{jk\lambda\mu} c_{jk\lambda\mu} u_{kI',J}^\lambda \overline{u_{jI',J}^\mu} \\ & + \sum_{|I|=p,|J'|=q-1} \sum_{jk\lambda\mu} c_{jk\lambda\mu} u_{I,jJ'}^\lambda \overline{u_{I,kJ'}^\mu} \\ & - \sum_{|I|=p,|J|=q} \sum_{j\lambda\mu} c_{jj\lambda\mu} u_{I,J}^\lambda \overline{u_{I,J}^\mu}. \end{aligned}$$

Définition 15.1. — *On dira que le fibré vectoriel F est (p,q)-semi-positif s'il peut être muni d'une métrique hermitienne h de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que l'opérateur $[ic_h(F), \Lambda]$ soit semi-positif sur $\Lambda^{p,q} T^\star X \otimes F$. On dira alors que (F, h) est (p,q)-semi-positif.*

Puisqu'il s'agit d'une propriété de courbure, cette notion est conservée par produit tensoriel par un fibré en droites plat. On utilisera essentiellement la $(0,q)$-semi-positivité et on y fera référence comme à une notion de semi-négativité.

Par exemple, un fibré vectoriel hermitien de dual semi-positif au sens de Nakano est $(0,q)$-semi-positif pour tous q. Un fibré vectoriel hermitien semi-négatif au sens de Nakano est $(p,0)$-semi-positif pour tous p. Par conséquent, un fibré vectoriel de dual globalement engendré est $(p,0)$-semi-positif pour tous p.

Un fibré en droites hermitien à courbure semi-négative (par exemple un fibré en droites de dual semi-ample) est $(0,q)$- et $(p,0)$-semi-positif pour tous p et q.

L'intérêt de cette notion repose dans le lemme suivant, conséquence simple de la semi-positivité des Laplaciens, de la relation entre Laplaciens et de l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano :

Lemme 15.2. — *Une (p,q)-forme à valeurs dans un fibré vectoriel (p,q)-semi-positif est Δ''-harmonique si et seulement si elle est Δ-harmonique.*

Pour une (p,q)-forme ξ, Δ''-harmonique à valeurs dans un fibré vectoriel hermitien (p,q)-semi-positif on a

$$D'\xi = \delta'\xi = D''\xi = \delta''\xi = 0 \ \text{ et } [ic_h(F), \Lambda]\xi = 0.$$

. . Dualité de Serre

On dispose du

LEMME 15.3. — *Sur une variété de dimension n, un fibré est (p,q)-semi-positif si et seulement si son dual est $(n-p, n-q)$-semi-positif.*

Démonstration. — Si $\sharp : \Lambda^{p,q}T^\star X \otimes F \to \Lambda^{n-p,n-q}T^\star X \otimes F^\star$ désigne l'opérateur de Hodge tel que

$$u \wedge \sharp v = \langle u, v\rangle dV_\omega$$

pour u et v dans $\Lambda^{p,q}T^\star X \otimes F$, et si $F^\star$ est muni de la métrique duale $h^\star$ d'une métrique h sur F, on a

$$\langle [ic_{h^\star}(F^\star), \Lambda]\sharp u, \sharp u\rangle = \langle [ic_h(F), \Lambda]u, u\rangle.$$

∎

. . Morphisme de Lefschetz

Pour tout couple d'entiers (p,q) tel que $p+q \leqslant n$, on considère le morphisme de Lefschetz

$$H^{p,q}(X,F) \xrightarrow{L^{n-p-q}} H^{n-q,n-p}(X,F).$$

Si F est le fibré en droites trivial sur X, la théorie de Hodge montre que ces morphismes sont des isomorphismes. Dans le cas où Fest semi-positif, reste le

THÉORÈME 15.1. — *(i) Si a est une (p,q)-forme Δ''-harmonique à valeurs dans un fibré vectoriel hermitien (p,q)-semi-positif, alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $L^r a$ est Δ''-harmonique.*

(ii) Si $p+q \leqslant n$ et si F est (p,q)-semi-positif, alors le morphisme de Lefschetz L^{n-p-q} est injectif.

(iii) Les composantes de la décomposition primitive d'une (p,q)-forme Δ''- harmonique à valeurs dans un fibré vectoriel hermitien (p,q)-semi-positif sont Δ''-harmoniques.

(iv) Si $p+q \leqslant n$ et si F est $(n-q, n-p)$-semi-positif, alors le morphisme de Lefschetz L^{n-p-q} est surjectif.

Démonstration. —

(i) Puisque ω est kählérienne, $D''(L^r a) = 0$.

Par les identités de Hodge,

$$\begin{aligned}\delta''(L^r a) &= L^r\delta'' a + \sum_{k=0}^{r-1} L^k[\delta'', L]L^{r-k-1}a \\ &= i\sum_{k=0}^{r-1} L^k D' L^{r-k-1} a \\ &= irL^{r-1}D'a = 0\end{aligned}$$

par le lemme 15.2.

(ii) Soit a une (p,q)-forme Δ''-harmonique à valeurs dans F telle que $L^{n-p-q}a$ soit Δ''--exacte. D'après (i), $L^{n-p-q}a$ est Δ''-harmonique et donc nulle. La décomposition primitive de a est de la forme $\sum_{r\geqslant 0} L^r a_r$. Par suite, $\sum_{r\geqslant 0} L^{r+n-p-q}a_r$ est une décomposition primitive de la forme nulle de bidegré $(n-q, n-p)$. Par unicité, on conclut à la nullité de a.

(iii) Soit b une (p, q)-forme Δ''-harmonique à valeurs dans F. Soit $\sum_{r\geqslant \max(0,p+q-n)} L^r b_r$ sa décomposition primitive. Par le lemme 15.2, b est Δ-harmonique. Puisque L et Λ commutent avec Δ, les formes b_r sont Δ-harmoniques par unicité de la décomposition primitive. La relation entre Laplaciens et leur semi-positivité montrent alors que les formes b_r sont Δ''-harmoniques.

(iv) Soient b une $(n-q, n-p)$-forme Δ''-harmonique à valeurs dans F et $\sum_{r\geqslant n-p-q} L^r b_r$ sa décomposition primitive. D'après (iii), les formes b_r sont D''-fermées. $\sum_{r\geqslant n-p-q} L^{r-n+p+q} b_r$ est donc un antécédent de b par L^{n-p-q}. ∎

Ce dernier résultat figure en bidegré $(p, 0)$ dans [En 93].

. . Produit tensoriel par une section

Pour décrire des relations d'inclusion entre lieux exceptionnels de cohomologie, on généralise le théorème d'injectivité de Kollár ([Ko 86] Théorème 2.2).

Théorème 15.2. — *Soit $F \to X$ un fibré en droites (n, q)-semi-positif sur une variété kählérienne compacte lisse de dimension n. Soit s une section globale non nulle d'une puissance F^k $(k \in \mathbb{N}^\star)$ de F. Alors les morphismes induits en cohomologie par le produit tensoriel par s*

$$\cdot \otimes s : H^q(K_X \otimes F^l \otimes \lambda) \to H^q(K_X \otimes F^{l+k} \otimes \lambda)$$

sont injectifs pour tout $l \in \mathbb{N}^\star$, et λ fibré en droites plat sur X.

Il en découlera le

Corollaire 15.4. — *Soient $F \to X$ et s comme dans le théorème précédent. Alors pour tout $l \in \mathbb{N}^\star$, les lieux exceptionnels de cohomologie vérifient*

$$S_m^{n,q}(F^l) \subset S_m^{n,q}(F^{l+k}).$$

Démonstration. — Elle peut se faire en suivant [En 93]. On utilise ici une démarche légèrement différente. Soient h une métrique hermitienne de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur F à courbure (n, q)-semi-positive et h_λ une métrique à courbure nulle sur λ. Soit ξ une (n, q)-forme Δ''-harmonique à valeurs dans le fibré en droites $F^l \otimes \lambda$ muni de la métrique $h^l \otimes h_\lambda$.

On montre d'abord que $\xi \otimes s$ est une (n, q)-forme Δ''-harmonique à valeurs dans $F^{l+k} \otimes \lambda$ muni de la métrique $h^{l+k} \otimes h_\lambda$. Il est clair que $D''(\xi \otimes s) = 0$. Par les identités de Hodge, on trouve

$$\begin{aligned}
\delta''(\xi \otimes s) &= i[D', \Lambda](\xi \otimes s) = iD'\left(\Lambda(\xi \otimes s)\right) = iD'\left((\Lambda\xi) \otimes s\right) \\
&= i([D', \Lambda]\xi) \otimes s + (-1)^{\deg \xi} i\Lambda\xi \wedge D's \\
&= \delta''\xi \otimes s + (-1)^{\deg \xi} i\Lambda\xi \wedge D's = (-1)^{\deg \xi} i\Lambda\xi \wedge D's.
\end{aligned}$$

Maintenant, $D''(\Lambda\xi) = [D'', \Lambda]\xi = i\delta'\xi = 0$ par le lemme 15.2 et $D''D's = D^2 s = c(F^k) \wedge s$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\Delta''(\xi \otimes s) &= d''\delta''(\xi \otimes s) = i\Lambda\xi \wedge D''D's \\
&= i\Lambda\xi \wedge c(F^k) \wedge s = [ic(F^k), \Lambda]\xi \otimes s
\end{aligned}$$

car ξ est de bidegré (n, q). Par l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano, ξ est en tout point de X dans le noyau de $[ic(F^l \otimes \lambda), \Lambda]$ et donc dans celui de $[ic(F^k), \Lambda]$. Ainsi $\xi \otimes s$ est Δ''-harmonique.

Si de plus $\xi \otimes s$ est D''-exacte, elle est nulle et par conséquent ξ est nulle. ■

. Annulation pour les fibrés semi-négatifs

. . Théorème d'annulation

Dans ce paragraphe, on se propose de démontrer le

Théorème 16.1. — *Soient la variété X et le fibré vectoriel F comme dans l'introduction. Soit $0 \leqslant q < \dim \alpha(X)$. On suppose que $F \to X$ est $(0, q)$-semi-positif. Alors, $S^q(F)$ est un sous-ensemble analytique de* $\mathrm{Pic}^0(X)$ *de codimension supérieure à* $\dim \alpha(X) - q$.

Il en résultera le

Corollaire 16.1. — *Si de plus X est de type d'Albanese général, i.e. si* $\dim \alpha(X) = \dim X$, *alors*

$$(-1)^n \chi(F) = \chi(K_X \otimes F^\star) \geqslant 0$$

où χ désigne la caractéristique d'Euler.

Exemple. — On considère un tore complexe T de dimension $g \geqslant 2$ et le fibré en droites L défini par $L := p_1^\star \mathscr{O}(-3) \to \mathbb{P}^1 \times T =: X$ où p_1 est la première projection. Le fibré L est $(0, 1)$-semi-positif. La dimension d'Albanese de X est g. Le groupe $H^1(X, L) = H^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}(-3))$ est isomorphe à $\mathbb{C}^2$. Mais d'après le théorème précédent, pour y générique dans $\mathrm{Pic}^0(X) \simeq \mathrm{Pic}^0(T)$, le groupe $H^1(X, L \otimes \lambda_y)$ est nul. C'est aussi une conséquence de la formule de Künneth.

L'outil essentiel est apporté par la

Proposition 16.2. — *Soit (F, h) un fibré vectoriel hermitien $(0, q)$-semi-positif. Si Φ est une $(0, 1)$-forme harmonique et a une $(0, q)$-forme Δ''-harmonique à valeurs dans (F, h), alors $\Phi \wedge a$ est Δ''-harmonique.*

Démonstration. — On a déjà

$$D''(\Phi \wedge a) = (\overline{\partial}\Phi) \wedge a - \Phi \wedge D'' a = 0.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} i\delta''(\Phi \wedge a) &= [\Lambda, D'](\Phi \wedge a) \\ &= \Lambda D'(\Phi \wedge a) && \text{car } \Phi \wedge a \text{ est de type } (0, q+1) \\ &= \Lambda(\Phi \wedge D' a) && \text{car } \Phi \text{ est harmonique} \\ &= 0 && \text{d'après le lemme 15.2.} \end{aligned}$$

■

Remarque. — Par le même calcul, on prouve que le produit extérieur d'une $(0, q)$-forme Δ''-harmonique à valeurs dans un fibré $(0, q)$-semi-positif par une $(0, q')$-forme Δ''-harmonique à valeurs dans un fibré $(0, q')$-semi-positif est Δ''-harmonique pour la métrique produit.

Démonstration du théorème . . — L'analyticité de $S^q_m(F)$ provient de l'existence locale sur $\mathrm{Pic}^0(X)$ d'un complexe de faisceaux localement libres qui calcule la cohomologie des déformations de F ([G-L 87] paragraphe 1). La proposition 16.2 rend possible l'utilisation de la démarche qui conduit au théorème 2.10 de [G-L 87] : soit y_0 un point lisse de $S^q_m(F)$ où $h^q(X, F \otimes \lambda_{y_0}) = m \neq 0$. On prend a une $(0, q)$-forme Δ''-harmonique à valeurs dans $F \otimes \lambda_{y_0}$. On définit

$$\mathscr{W} := \{\Phi\ (0,1) - \text{ forme harmonique }/[\Phi \wedge a] = 0 \text{ dans } H^{q+1}(X, F \otimes \lambda_{y_0})\}.$$

Comme F, le fibré $F \otimes \lambda_{y_0}$ est $(0, q)$-semi-positif. En fait, puisqu'une forme Δ''-harmonique et D''-exacte est nulle, la proposition 16.2 montre que

$$\forall \Phi \in \mathscr{W}, \ \ \Phi \wedge a = 0.$$

Par un lemme simple d'algèbre linéaire, pour tout $x \in X$ où $a(x) \neq 0$,

$$\dim\{\Phi(x) \in \overline{T^\star_x X}, \Phi \in \mathscr{W}\} \leqslant \dim\{v \in \overline{T^\star_x X}/v \wedge a(x) = 0\} \leqslant \deg a = q.$$

On note e l'application d'évaluation des $(0, 1)$-formes harmoniques sur X. La transposée de la différentielle du morphisme d'Albanese α est l'application d'évaluation des 1-formes holomorphes sur X. Par conjugaison, on obtient donc

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{rang} \alpha(x) & = & h^{0,1}(X) - \dim \ker e(x) \\ \dim\{\Phi(x) \in \overline{T^\star_x X}, \Phi \in \mathscr{W}\} & \geqslant & \dim \mathscr{W} - \dim \ker e(x). \end{array}$$

Par conséquent, puisque $\dim \alpha(X) = \operatorname{rang} \alpha(x)$ en un point x générique de X,

$$\operatorname{codim}(\mathscr{W}, H^1(X, \mathscr{O})) = h^{0,1}(X) - \dim \mathscr{W} \geqslant \dim \alpha(X) - q.$$

Le théorème du complexe dérivé ([G-L 87] Théorème 1.6) affirme que, dans l'espace tangent à $\mathrm{Pic}^0(X)$ en y_0, le cône tangent en y_0 au lieu exceptionnel $S^q_m(F)$ (ici l'espace tangent au point lisse y_0 de $S^q_m(F)$) est inclus dans le lieu exceptionnel $S^q_m(D^\bullet(F, y_0))$ du complexe dérivé de F en y_0. Ce complexe est le complexe de faisceaux localement libres et triviaux

$$D^\bullet(F, y_0) : \ T_{y_0}\mathrm{Pic}^0(X) \times H^\bullet(X, F \otimes \lambda_{y_0}) \to T_{y_0}\mathrm{Pic}^0(X) \times H^{\bullet+1}(X, F \otimes \lambda_{y_0})$$

la différentielle étant donnée en un point $z \in T_{y_0}\mathrm{Pic}^0(X) \simeq H^1(X, \mathscr{O})$ par le produit extérieur par la $(0, 1)$-forme harmonique Φ qui représente la classe de cohomologie z. En particulier, puisque $h^q(F \otimes \lambda_{y_0})$ est égal à m, le lieu $S^q_m(D^\bullet(F, y_0))$ est inclus dans $\mathscr{W}$. On obtient

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{codim}_{y_0}(S^q_m(F), \mathrm{Pic}^0(X)) & = & \operatorname{codim}(T_{y_0} S^q_m(F), T_{y_0}\mathrm{Pic}^0(X)) \\ & \geqslant & \operatorname{codim}(S^q_m(D^\bullet(F, y_0)), T_{y_0}\mathrm{Pic}^0(X)) \\ & \geqslant & \operatorname{codim}(\mathscr{W}, H^1(X, \mathscr{O})) \geqslant \dim \alpha(X) - q. \quad \blacksquare \end{array}$$

Remarque. — Si un groupe fini G agit sur X et de manière compatible sur $F \to X$, la construction du complexe dérivé, le théorème 1.6 de [G-L 87] et par suite le théorème précédent restent valides si on s'intéresse à la cohomologie G-équivariante.

Remarque. — La propriété universelle du morphisme d'Albanese permet d'interpréter la transposée de la différentielle d'un morphisme $a : X \to A$ de X dans un tore complexe A comme l'évaluation des 1-formes holomorphes sur X provenant par a des 1-formes holomorphes sur A. Une démonstration analogue à celle du théorème 16.1 conduit alors au

Théorème 16.2. — *Soient la variété X et le fibré vectoriel F comme dans l'introduction. Soit $a : X \to A$ un morphisme de X dans un tore complexe A. Soit $0 \leqslant q < \dim a(X)$. On suppose que $F \to X$ est $(0, q)$-semi-positif. Alors, $S^q(X, F, a)$ est un sous-ensemble analytique de* $\mathrm{Pic}^0(A)$ *de codimension supérieure à* $\dim a(X) - q$.

. . Caractéristique d'Euler d'une sous-variété

En guise d'application, on obtient

Corollaire 16.3. — *Soit X une variété type d'Albanese général. Soit Y une sous-variété de codimension r de X définie par une section s d'un fibré vectoriel F de rang r. Si F est de dual $(0, q)$-semi-positif pour tout $q < \dim X$, alors $(-1)^{\dim Y}\chi(\mathscr{O}_Y) \geqslant 0$.*

Démonstration. — L'hypothèse sur la codimension de Y assure que s est localement donnée par des familles régulières de fonctions holomorphes. Le complexe de Koszul associé à s :

$$0 \longrightarrow \bigwedge^r F^\star \xrightarrow{s\rfloor} \cdots \bigwedge^2 F^\star \xrightarrow{s\rfloor} F^\star \xrightarrow{s\rfloor} \mathscr{O}_X \longrightarrow 0$$

donne donc une résolution de $\mathscr{I}_Y$. On déduit du théorème 16.1 que pour λ générique dans $\mathrm{Pic}^0(X)$ et $q \leqslant \dim \alpha(X) - \mathrm{rang}(F)$, on a

$$H^q(X, \mathscr{I}_Y \otimes \lambda) = 0.$$

En conséquence, pour λ générique dans $\mathrm{Pic}^0(Y)$ et $q < \dim \alpha(X) - \mathrm{rang}(F)$, on obtient, en utilisant la suite exacte courte qui définit $\mathscr{O}_Y$, l'annulation

$$H^q(Y, \lambda) = 0.$$

En particulier, si la variété X est de type d'Albanese général, puisque la caractéristique d'Euler est un invariant numérique, on obtient que $(-1)^{\dim Y}\chi(\mathscr{O}_Y) \geqslant 0$. ■

Ce corollaire s'applique en particulier pour les fibrés vectoriels semi-positifs au sens de Nakano.

. Lieux exceptionnels de cohomologie

L'étude repose sur le calcul d'une suite spectrale de déformation des groupes de cohomologie de F. On définit d'abord une condition de dégénérescence qui permet ce calcul et on présente ensuite des hypothèses de semi-négativité qui impliquent la condition de dégénérescence.

. . Condition de dégénérescence

Définition 17.1. — *Soit (X, F, Φ) comme dans l'introduction. On dira que le triplet (X, F, Φ) vérifie la condition de dégénérescence en bidegré (p, q) si pour tout couple (a, b) de (p, q)-formes de classe $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs dans F tel que*

- $D''a = \Phi \wedge b$

- *b est Δ''-harmonique,*

on a

$$D''a = 0.$$

Remarque. — Si un groupe fini G agit sur X et de manière compatible sur $F \to X$, la condition de dégénérescence se généralise pour les formes Φ, G-équivariantes : il suffit de ne considérer dans la définition que les couples (a, b) de formes G-équivariantes.

. . Déformation des groupes de cohomologie

Soit y_0 un point lisse de $S_m^{p,q}(F)$ où $h^{p,q}(F \otimes \lambda_{y_0})$ est exactement égal à m. Soit une forme harmonique $\Phi \in T_{y_0}\mathrm{Pic}^0(X) \simeq H^1(X, \mathscr{O})$ tangente en y_0 à $S_m^{p,q}(F)$. Par le théorème du complexe dérivé ([G-L 87] théorème 1.6), Φ est dans le lieu exceptionnel $S_m^q\left(D^\bullet(\Omega_X^p \otimes F, y_0)\right)$ du complexe dérivé de $\Omega_X^p \otimes F$ en y_0 ; par conséquent, les applications

$$H^{p,q-1}(X, F \otimes \lambda_{y_0}) \xrightarrow{\wedge\Phi} H^{p,q}(X, F \otimes \lambda_{y_0}) \xrightarrow{\wedge\Phi} H^{p,q+1}(X, F \otimes \lambda_{y_0})$$

sont nulles.

Soit Z la "droite" de $\mathrm{Pic}^0(X)$ passant par y_0 et de direction Φ. On désigne par z une coordonnée sur Z centrée en y_0. Soit $A^{p,q}(F \otimes \lambda_{y_0})$ l'espace vectoriel (de dimension infinie) des (p, q)-formes de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur X à valeurs dans $F \otimes \lambda_{y_0}$. Un complexe de faisceaux sur Z qui calcule la cohomologie de $(F \otimes \lambda_y)_{y \in Z}$ est ([G-L 87'] proposition 2.4)

$$(A^{p,\bullet}, d^\bullet) : \ A^{p,\bullet}(F \otimes \lambda_{y_0}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_Z \xrightarrow{d^\bullet} A^{p,\bullet+1}(F \otimes \lambda_{y_0}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_Z$$

où

$$d = D''_{F \otimes \lambda_{y_0}} + z\Phi \wedge .$$

On notera désormais $D'' = D''_{F \otimes \lambda_{y_0}}$.

Proposition 17.2. — *Avec les notations précédentes, si de plus $(X, F \otimes \lambda_{y_0}, \Phi)$ vérifie la condition de dégénérescence en bidegrés $(p, q-1)$ et (p, q) alors les fibres de faisceaux en y_0*

$$\left(\mathscr{H}^q(A^{p,\bullet}, d^\bullet)\right)_{y_0} \quad \text{et } H^{p,q}(X, F \otimes \lambda_{y_0}) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathscr{O}_Z)_{y_0}$$

sont isomorphes et par suite Z est totalement incluse dans $S_m^{p,q}(F)$.

Démonstration. — L'idéal maximal $\mathscr{M}_{y_0}$ de $(\mathscr{O}_Z)_{y_0}$ induit une filtration de $B^\bullet := A^{p,\bullet}(F \otimes \lambda_{y_0}) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathscr{O}_Z)_{y_0}$ par

$$F^s B^\bullet = A^{p,\bullet}(F \otimes \lambda_{y_0}) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathscr{M}_{y_0})^s$$

puis une suite spectrale ([G-L 87'] paragraphe 6). On convient comme dans [G-H 78] que $\dfrac{E}{F}$ est une notation pour $\dfrac{E}{E \cap F}$.

• En rang 0,

$$\begin{array}{rcl} E_0^{s,t} = \dfrac{F^s B^{s+t}}{F^{s+1}B^{s+t}} & \xrightarrow{d_0} & E_0^{s,t+1} \\ [a] = \left[\displaystyle\sum_{s'\geqslant s} a_{s'} z^{s'}\right] & \longmapsto & \left[z^s D'' a_s\right] \bmod F^{s+1}B^{s+t+1}. \end{array}$$

Donc,

$$E_1^{s,t} = H^{p,s+t}(X, F \otimes \lambda_{y_0}) \otimes_{\mathbb{C}} \frac{\mathscr{M}_{y_0}^s}{\mathscr{M}_{y_0}^{s+1}}.$$

• En rang 1,

$$\begin{array}{rcl} E_1^{s,t} = \dfrac{\{a \in F^s B^{s+t} / da \in F^{s+1}B^{s+t+1}\}}{F^{s+1}B^{s+t} + d(F^s B^{s+t-1})} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{s+1,t} \\ [a] = \left[\displaystyle\sum_{s'\geqslant s} a_{s'} z^{s'}\right] & \longmapsto & \left[z^{s+1}(D'' a_{s+1} + \Phi \wedge a_s)\right] \\ \text{avec } D'' a_s = 0. & & \bmod F^{s+2}B^{s+t+1} \\ & & +dF^{s+1}B^{s+t}. \end{array}$$

$$\begin{aligned} d_1[a] &\equiv \left[z^{s+1}D'' a_{s+1} + z^{s+2}\Phi \wedge a_{s+1} + z^{s+1}\Phi \wedge a_s\right] \\ &\equiv \left[d(z^{s+1}a_{s+1}) + z^{s+1}\Phi \wedge a_s\right] \\ &\equiv \left[z^{s+1}\Phi \wedge a_s\right]. \end{aligned}$$

On simplifiera désormais comme ci-dessus les formes D''-exactes. Or, si $s + t = q - 1$ ou q, puisque les différentielles du complexe dérivé de $\Omega_X^p \otimes F$ en y_0 sont nulles, $\Phi \wedge a_s$ est D''-exacte : $d_1[a] = 0$.

• En rang 2,

$$\begin{array}{rcl} E_2^{s,t} = \dfrac{\{a \in F^s B^{s+t} / da \in F^{s+2}B^{s+t+1}\}}{F^{s+1}B^{s+t} + d(F^{s-1} B^{s+t-1})} & \xrightarrow{d_2} & E_2^{s+2,t-1} \\ [a] = \left[\displaystyle\sum_{s'\geqslant s} a_{s'} z^{s'}\right] & \longmapsto & \left[z^{s+2}\Phi \wedge a_{s+1}\right] \\ \text{avec } D'' a_s = 0 & & \bmod F^{s+3}B^{s+t+1} \\ \text{et } D'' a_{s+1} + \Phi \wedge a_s = 0. & & +dF^{s+1}B^{s+t}. \end{array}$$

Modulo $F^{s+1}B^{s+t} + d(F^{s-1}B^{s+t-1})$, on peut supposer que a_s est Δ''-harmonique. La condition de dégénérescence en bidegrés $(p, q-1)$ et (p, q) montre que $D'' a_{s+1} = 0$ si $s + t = q - 1$ ou q. Puisque les différentielles du complexe dérivé de $\Omega_X^p \otimes F$ en y_0 sont nulles pour ces bidegrés, $\Phi \wedge a_{s+1}$ est D''-exacte : d_2^{q-1} et d_2^q sont nulles.

• En rang r quelconque supérieur à 2,

$$E_r^{s,t} = \frac{\{a \in F^s B^{s+t} / da \in F^{s+r} B^{s+t+1}\}}{F^{s+1}B^{s+t} + d(F^{s-r+1}B^{s+t-1})} \xrightarrow{d_r} E_r^{s+r,t-r+1}$$

$$\begin{array}{rcl} [a] = \left[\sum_{s' \geqslant s} a_{s'} z^{s'}\right] & \longmapsto & \left[z^{s+r}\Phi \wedge a_{s+r-1}\right] \\ \text{avec } D'' a_s = 0 & & \text{mod } F^{s+r+1}B^{s+t+1} \\ D'' a_{s+1} + \Phi \wedge a_s = 0 & & +dF^{s+1}B^{s+t}. \\ \vdots & & \\ D'' a_{s+r-1} + \Phi \wedge a_{s+r-2} = 0. & & \end{array}$$

Modulo $F^{s+1}B^{s+t} + d(F^{s-r+1}B^{s+t-1})$, et par applications successives de la condition de dégénérescence, on peut supposer que pour tout $i \in [0, r-2] \cap \mathbb{N}$, a_{s+i} est Δ''- harmonique. La condition de dégénérescence permet d'affirmer que $D'' a_{s+r-1} = 0$. L'argument du complexe dérivé montre alors que $\Phi \wedge a_{s+r-1}$ est D''-exacte et que $d_r[a] = 0$ en bidegrés $(p, q-1)$ et (p, q).

• En conclusion, en degré q la suite spectrale précédente dégénère en E_1.

$$\bigoplus_{s+t=q} E_1^{s,t} = H^{p,q}(X, F \otimes \lambda_{y_0}) \otimes_{\mathbb{C}} \left(\bigoplus_s \frac{\mathscr{M}_{y_0}^s}{\mathscr{M}_{y_0}^{s+1}} \right)$$

est le gradué associé à une filtration de la fibre en y_0 du faisceau de cohomologie $\mathscr{H}^q(A^{p,\bullet}, d^\bullet)$. En dehors d'un sous-ensemble analytique propre de Z, tous les faisceaux $(\mathscr{H}^q(A^{p,\bullet}, d^\bullet))_{q \in \mathbb{N}}$ sont localement libres et

$$\mathscr{H}^q(A^{p,\bullet}, d^\bullet) \otimes \frac{\mathscr{O}_y}{\mathscr{M}_y} = H^{p,q}(X, F \otimes \lambda_y).$$

Sur un voisinage épointé du point y_0 dans Z, ce dernier groupe est par conséquent de dimension $h^{p,q}(X, F \otimes \lambda_{y_0})$ soit m. Le voisinage et par suite toute la droite Z sont dans l'ensemble analytique $S_m^{p,q}(F)$. ■

. . Structure des lieux exceptionnels de cohomologie

Proposition 17.3. — *On suppose que le fibré vectoriel F est $(0, q)$-semi-positif. Alors, pour toute $(0, 1)$-forme Φ harmonique sur X, le triplet (X, F, Φ) vérifie la condition de dégénérescence en bidegré $(0, q)$.*

Démonstration. — Soient a et b deux $(0, q)$-formes de classe $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs dans F telles que $D'' a = \Phi \wedge b$ et b soit Δ''-harmonique. Alors, $\Phi \wedge b$ est Δ''-harmonique d'après la proposition 16.2 et D''-exacte par hypothèse : elle est donc nulle. ■

Théorème 17.1. — *Soit $a : X \to A$ un morphisme de X dans un tore complexe A.*

(i) Si F est un fibré vectoriel $(0, q-1)$- et $(0, q)$-semi-positif, alors le lieu exceptionnel $S_m^q(X, F, a)$ est une réunion de translatés de sous-tores de $\mathrm{Pic}^0(A)$.

(ii) Si F est un fibré en droites qui admet une métrique hermitienne de classe $\mathscr{C}^\infty$ à courbure semi-négative, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, le lieu exceptionnel $S^q_m(X, F, a)$ est une réunion de translatés de sous -tores de $\mathrm{Pic}^0(A)$.

(iii) Si F est un fibré en droites de dual semi-ample, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, le lieu exceptionnel $S^q_m(X, F, a)$ est une réunion de translatés de sous -tores de $\mathrm{Pic}^0(A)$.

Démonstration. — On traite le cas où a est le morphisme d'Albanese de X. Le cas général s'en déduit par la propriété universelle.

Puisque $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$, on se place sous les hypothèses (i). Par la proposition précédente, pour toute $(0, 1)$-forme harmonique Φ et pour tout $y \in \mathrm{Pic}^0(X)$, $(X, F \otimes \lambda_y, \Phi)$ vérifie la condition de dégénérescence en bidegrés $(0, q-1)$ et $(0, q)$. La proposition 17.2 montre qu'aux points lisses y de $S^q_m(F)$ où $h^q(X, F \otimes \lambda_y) = m$ toutes les droites tangentes à $S^q_m(F)$ sont en fait incluses dans $S^q_m(F)$. Ceci suffit pour affirmer que les composantes irréductibles du lieu exceptionnel $S^q_m(F)$ sont des translatés de sous-tores de $\mathrm{Pic}^0(X)$. ■

On peut préciser la structure des composantes irréductibles des lieux exceptionnels.

Corollaire 17.4. — *Si F est un fibré vectoriel* $(0, q-1)$ *- et* $(0, q)$ *-semi-positif, et si Z est une composante irréductible de $S^q_m(F)$, alors il existe un espace complexe normal N, une application analytique surjective à fibres connexes $f : X \to N$ tels que*

(i) il existe $\lambda_0 \in \mathrm{Pic}^0(X)$, *tel que* $Z \subset \lambda_0 + f^\star(\mathrm{Pic}^0(N))$,

(ii) $\dim N \leqslant q$,

(iii) N est de type d'Albanese général.

Démonstration. — Elle suit celle de [G-L 91](Théorème 0.1). On considère

$$u : X \xrightarrow{\alpha_X} \mathrm{Alb}(X) \longrightarrow \hat{Z}$$

obtenue en intégrant les 1-formes holomorphes sur X dont les conjuguées sont tangentes à $Z \subset S^q_m(F)$. Ici $\hat{Z}$ est le tore dual du tore Z. L'espace N est alors l'espace complexe intermédiaire qui apparait dans la factorisation de Stein de u. (i) et (iii) sont des conséquences de la construction de N. Pour (ii), on raisonne comme dans la démonstration du théorème 16.1 en remplaçant le mophisme d'Albanese α_X de X par sa restriction u et donc $h^{0,1}(X)$ par $\dim N$. ■

. . Périodicité

Dans ce paragraphe, on retrouve une partie du résultat de périodicité dû à S.D. Cutkosky et V. Srinivas ([C-S 93] theorem 8), comme conséquence du théorème de structure des lieux exceptionnels.

Corollaire 17.5. — *Soit (X, F) comme dans l'introduction. On suppose que F est un fibré vectoriel* $(0, q-1)$ *- et* $(0, q)$ *-semi-positif. Alors, pour tout fibré en droites μ numériquement plat (i.e. de première classe de Chern de torsion) la fonction*

$$k \mapsto h^q(F \otimes \mu^k)$$

est périodique pour $k \geqslant k_0$ assez grand.

Démonstration. — Si μ est de torsion, le résultat est acquis. On suppose maintenant que μ est topologiquement plat, mais pas de torsion. On remarque d'abord que la fonction $\lambda \mapsto h^q(X, F \otimes \lambda)$ semi-continue supérieurement sur $\mathrm{Pic}^0(X)$ compacte est majorée. On considère

$$m_\mu(F) := \max\{m/ \text{ il existe une infinité de } k \in \mathbb{N}/h^q(F \otimes \mu^k) = m\}.$$

L'ensemble analytique $S^q_{m_\mu(F)}(F)$ est une réunion finie de translatés de sous-tores de $\mathrm{Pic}^0(X)$. L'une de ses composantes irréductibles contient deux points de $\{\mu^k, k \in \mathbb{N}\}$ et par conséquent tout l'ensemble de points alignés $\{\mu^k, k \in \mathbb{N}\}$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $h^q(F \otimes \mu^k) \geqslant m_\mu(F)$. Les valeurs strictement plus grandes que $m_\mu(F)$ sont en nombre fini et ne peuvent être atteintes qu'un nombre fini de fois. A partir d'un certain rang k_0, les dimensions sont donc

$$h^q(F \otimes \mu^k) = m_\mu(F).$$

Si μ est numériquement plat, avec $rc_1(\mu) = 0$, le fibré μ s'écrit $\tau \otimes \lambda$ avec τ de torsion et λ topologiquement plat (il suffit de prendre une racine $r^{\text{ième}}$ du fibré plat μ^r). On obtient alors, pour k assez grand

$$h^q(F \otimes \mu^k) = m_\lambda(F \otimes \tau^k)$$

qui ne dépend que de k modulo r. ■

. . Condition forte du premier ordre

Définition 17.6. — *Soit (X, F, Φ) comme dans l'introduction. On dira que le triplet (X, F, Φ) vérifie la condition forte du premier ordre en bidegré (p, q) si pour tout couple (a, b) de (p, q)-- formes de classe $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs dans F tel que*

- $D''a = \Phi \wedge b$

il existe une (p, q)-forme c de classe $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs dans F telle que

$$\Phi \wedge a = D''c.$$

Remarque. — La condition forte du premier ordre en bidegré (p, q) implique l'annulation de la différentielle en degré q du complexe dérivé de $\Omega^p_X \otimes F$ en $[\mathscr{O}_X]$, le point 0 de $\mathrm{Pic}^0(X)$.

Proposition 17.7. — *Si $y_0 \in S^{p,q}_m(F)$ et si $(X, F \otimes \lambda_{y_0}, \Phi)$ vérifie la condition forte du premier ordre en bidegrés $(p, q-1)$ et (p, q), alors la "droite" passant par y_0 et de direction Φ est incluse dans le lieu exceptionnel $S^{p,q}_m(F)$.*

Idée de démonstration. — La condition forte du premier ordre montre, sans supposer m égal à $h^{p,q}(F \otimes \lambda_{y_0})$ ni Φ tangente à $S^{p,q}_m(F)$, que les différentielles d^{q-1}_r et d^q_r de la suite spectrale considérée dans la démonstration de la proposition 17.2 sont nulles en rang $r \geqslant 1$.

Proposition 17.8. — *Soit Φ une $(0, 1)$-forme harmonique sur X. On suppose qu'il existe une métrique hermitienne h de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur F et un nombre réel ε strictement positif tels que*

$$[ic_h(F), \Lambda] \geqslant \varepsilon[i\overline{\Phi} \wedge \Phi \otimes Id_F, \Lambda] \ \ sur\ \Lambda^{n,q+1}T^\star X \otimes F.$$

Alors (X, F, Φ) vérifie la condition forte du premier ordre en bidegré (n, q).

Démonstration. — Soient a et b deux (n,q)-formes de classe $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs dans F telles que $D''a = \Phi \wedge b$. On cherche à appliquer à $\Phi \wedge a$ le principe des estimations L^2 pour l'opérateur D''.

On remarque d'abord que :

$$\begin{aligned} D''(\Phi \wedge a) &= \Phi \wedge D''a && \text{car } \Phi \text{ est harmonique} \\ &= \Phi \wedge \Phi \wedge b && \text{par hypothèse} \\ &= 0 && \text{car } \Phi \text{ est de bidegré } (0,1). \end{aligned}$$

Soit v une $(n, q+1)$-forme de classe $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs dans F muni de la métrique h. v s'écrit $v_1 + v_2$ avec $v_1 \in \ker D''$ et $v_2 \in (\ker D'')^\perp \subset \operatorname{Ker}\delta''$. On note $\iota(\Phi)$ l'adjoint de la multiplication extérieure par Φ.

$$\begin{aligned} |\langle\langle \Phi \wedge a, v\rangle\rangle|^2 &= |\langle\langle \Phi \wedge a, v_1\rangle\rangle|^2 \\ &= |\langle\langle a, \iota(\Phi)v_1\rangle\rangle|^2 \leqslant \|a\|^2 \|\iota(\Phi)v_1\|^2. \end{aligned}$$

Or, puisque v_1 est de bidegré $(n, q+1)$ et $\overline{\Phi}$ de bidegré $(1,0)$,

$$\iota(\Phi)v_1 = -i[\overline{\Phi}, \Lambda]v_1 = -i\overline{\Phi} \wedge \Lambda v_1.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|\iota(\Phi)v_1\|^2 &= \langle\langle -i\overline{\Phi} \wedge \Lambda v_1, \iota(\Phi)v_1\rangle\rangle \\ &= \langle\langle i\overline{\Phi} \wedge \Phi \wedge \Lambda v_1, v_1\rangle\rangle \\ &= \langle\langle [i\overline{\Phi} \wedge \Phi, \Lambda]v_1, v_1\rangle\rangle. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de courbure sur F, puisque v_1 est de bidegré $(n, q+1)$,

$$\langle\langle [i\overline{\Phi} \wedge \Phi, \Lambda]v_1, v_1\rangle\rangle \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\langle\langle [ic_h(F), \Lambda]v_1, v_1\rangle\rangle.$$

L'inégalité de Bochner-Kodaira-Nakano fournit

$$\langle\langle [ic_h(F), \Lambda]v_1, v_1\rangle\rangle \leqslant \|D''v_1\|^2 + \|\delta''v_1\|^2 = \|\delta''v_1\|^2 = \|\delta''v\|^2.$$

Ainsi,

$$|\langle\langle \Phi \wedge a, v\rangle\rangle|^2 \leqslant \frac{\|a\|^2}{\varepsilon}\|\delta''v\|^2.$$

Par le théorème d'Hahn-Banach et les propriétés d'ellipticité de Δ'' (on peut imposer la condition supplémentaire $\delta''c = 0$), il existe une forme $c \in \mathscr{C}^\infty(X, \Lambda^{n,q}T^\star X \otimes F)$ telle que

$$\Phi \wedge a = D''c.$$

∎

Remarque. — L'idée directrice de cette démonstration et donc de ce paragraphe est inspirée par [Sk 78].

Théorème 17.2. — *(i) Soit Ω une métrique kählérienne sur $Alb(X)$. Supposons qu'il existe une métrique hermitienne h de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur F telle que $[ic_h(F), \Lambda] \geqslant [\alpha^\star\Omega \otimes Id_F, \Lambda]$ sur $\Lambda^{n,q}T^\star X \otimes F$ et sur $\Lambda^{n,q+1}T^\star X \otimes F$. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, $S^{n,q}_m(F) = S^{n-q}_m(F^{-1})$ est soit vide, soit égal à* $\mathrm{Pic}^0(X)$.

(ii) En particulier, si F est un fibré en droites dont une puissance F^k est globalement engendrée et vérifie $H^1(X, F^k) = 0$, alors pour tout $(q, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$, $S^q_m(F^{-1})$ est soit vide, soit égal à $\mathrm{Pic}^0(X)$.

Démonstration. — (i) Par hypothèse, pour tout $\Phi \in H^1(X, \mathscr{O})$ harmonique et pour tout $y \in \mathrm{Pic}^0(X)$, il existe une métrique hermitienne de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $F \otimes \lambda_y$ et un $\varepsilon > 0$ tel que

$$[ic_h(F \otimes \lambda_y), \Lambda] \geqslant \varepsilon[i\overline{\Phi} \wedge \Phi \otimes Id_{F\otimes\lambda_y}, \Lambda] \text{ sur } \Lambda^{n,q}T^\star X \otimes F \text{ et sur } \Lambda^{n,q+1}T^\star X \otimes F.$$

D'après la proposition 17.8, $(X, F\otimes\lambda_y, \Phi)$ vérifie la condition forte du premier ordre en bidegrés $(n, q-1)$ et (n, q). Par la proposition 17.7, toutes les droites passant par un point de $S^{n,q}_m(F)$ sont incluses dans $S^{n,q}_m(F)$.

(ii) Soient $\Phi \in H^1(X, \mathscr{O})$ et E_Φ l'extension de F^k par lui-même définie par Φ.

$$0 \to F^k \to E_\Phi \to F^k \to 0.$$

Puisque $H^1(X, F^k) = 0$ et que F^k est globalement engendré, la suite exacte longue associée montre que E_Φ est aussi globalement engendré et par suite semi-positif au sens de Griffiths. Pour une métrique quotient sur F^k, par un calcul de ([Gr 69] 2.d),

$$ic(F) \geqslant \frac{i}{k}\overline{\Phi} \wedge \Phi.$$

On conclut alors comme dans (i). ∎

. Fibrés en droites de dual nef et abondant

Dans cette partie, on se propose d'étendre au cas des fibrés en droites de dual nef et abondant sur les variétés projectives, les théorèmes d'annulation et de structure des lieux exceptionnels de cohomologie précédement démontrés pour les fibrés en droites de dual semi-ample.

. . Définitions et propriétés

Soit $F \to X$ un fibré en droites nef sur une variété X kählérienne compacte lisse de dimension n. Sa dimension numérique $\nu(F)$ est le plus grand des entiers k tels que la classe de cohomologie $c_1(F)^k \in H^{2k}(X, \mathbb{R})$ soit non nulle. Sa dimension de Kodaira-Iitaka $\kappa(F)$ a été introduite dans la définition 2.9. Les premières propriétés des ces invariants birationnels sont résumées dans la

Proposition 18.1. — *(i) $\kappa(F) \leqslant \nu(F)$.*

(ii) Si F est semi-ample, alors $\kappa(F) = \nu(F)$.

(iii) Si $\kappa(F) = n-1$ ou n, ou si $\nu(F) = n$ alors $\kappa(F) = \nu(F)$.

Démonstration. — (i) a été démontré dans la proposition 9.1.

Pour (ii), un morphisme canonique associé à une puissance tensorielle de F globalement engendrée permet de montrer l'inégalité $\nu(F) \leqslant \kappa(F)$.

Pour (iii), on remarque d'abord que $\kappa(F)$ est l'exposant de croissance de la suite des dimensions $\left(h^0(X, F^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Les inégalités de Morse holomorphes [De 94] exprimées sous forme algébrique donnent, puisque F est nef sur X kählérienne,

$$h^0(X, F^k) \geqslant \frac{k^n}{n!} c_1(F)^n - o(k^n).$$

Ainsi, si $\nu(F) = n$ alors $\kappa(F) = n$. ∎

DÉFINITION 18.2. — *Un fibré en droites nef est dit* abondant *(*good *en anglais) si sa dimension de Kodaira-Iitaka coïncide avec sa dimension numérique.*

Pour un fibré en droites quelconque F, on définit sa dimension de Kodaira-Iitaka topologique $\kappa'(F)$ *par*

$$\kappa'(F) := \max_{\lambda\in \mathrm{Pic}^0(X)} \kappa(F\otimes\lambda).$$

Un fibré en droites nef est dit topologiquement abondant *si sa dimension de Kodaira-Iitaka topologique coïncide avec sa dimension numérique. Cela revient à dire que le fibré devient abondant après tensorisation par un fibré topologiquement trivial.*

Exemple. — Un fibré topologiquement trivial mais pas de torsion est nef ; aucune de ses puissances n'a de sections : il n'est donc pas abondant. Il est par contre topologiquement abondant.

. . Théorème d'annulation, lieux exceptionnels

Dans ce paragraphe, on démontre le

THÉORÈME 18.1. — *Soient X une variété projective lisse et $F \to X$ un fibré en droites nef et topologiquement abondant. Alors pour tout m, $S^q_m(F^{-1})$ est un ensemble analytique réunion de translatés de sous-tores de* $\mathrm{Pic}^0(X)$ *de codimension supérieure à* $\dim \alpha(X) - q$.

Remarque. — Le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg montre que pour un fibré en droites nef sur une variété projective, $S^q(F^{-1})$ est vide en degrés q strictement inférieurs à la dimension numérique $\nu(F)$.

Remarque. — Le résultat de périodicité du corollaire 17.5 peut aussi être obtenu pour les fibrés en droites nef et topologiquement abondants sur les variétés projectives.

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas où F est abondant. On cherche à se ramener au cas où F est globalement engendré en dehors d'un diviseur, puis à réduire les multiplicités de ce diviseur.

On applique d'abord le

Lemme 18.3. — *([Ka] proposition . , voir aussi [E-V] lemme .) Soit $F \to X$ un fibré en droites nef et abondant sur une variété X projective lisse. Alors, il existe une variété Y projective lisse, une modification $\tau : Y \to X$, un diviseur e ectif D sur Y et un entier m_0 tels que pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$, le fibré en droites $\tau^\star F^{mm_0} \otimes \mathcal{O}(-D)$ soit semi-ample.*

Puisque l'image inverse d'un fibré semi-ample par une application quelconque est semi-ample, on peut supposer quitte à prendre une nouvelle modification, que D est à croisements normaux (i.e. à composantes lisses et transverses aux points d'intersection.)

Comme dans [Bi 95], on utilise ensuite le

Lemme 18.4. — *([Ka] lemme .) Soit D un diviseur e ectif à croisements normaux sur une variété Y projective lisse de dimension n. Alors, il existe une variété Z projective lisse, un revêtement galoisien $\pi : Z \to Y$ de groupe G fini et un diviseur D' sur Z tels que*

$$\pi^\star D = m_0 D'$$

et tels que le fibré $\mathcal{O}_Z(D')$ soit muni d'une action ρ du groupe G telle que la partie invariante du faisceau image directe du faisceau $\mathcal{O}_Z(D')$ soit

$$\big(\pi_\star \mathcal{O}_Z(D')\big)^\rho = \mathcal{O}_Y(\left[\frac{D}{m_0}\right])$$

où $[\ ]$ désigne la partie entière des diviseurs.

On peut, par choix de m_0, supposer que les multiplicités de D sont strictement inférieures à m_0 pour obtenir

$$\big(\pi_\star \mathcal{O}_Z(D')\big)^\rho = \mathcal{O}_Y.$$

Démonstration. — On rappelle brièvement comment ce revêtement est obtenu (voir aussi [E-V 92] lemme 3.19). On suppose d'abord que D est irréductible et réduit.

Soit A un diviseur très ample sur Y tel que $\mathcal{O}(m_0 A - D)$ soit engendré par ses sections globales. Soient $H_1, \cdots, H_n$, n diviseurs génériques dans le système linéaire complet $|m_0 A - D|$ tels que le diviseur $D + H_1 + \cdots + H_n$ soit à croisements normaux. On peut supposer que l'intersection $D \cap H_1 \cap \cdots \cap H_n$ est vide.

On note $L_\triangle$ le fibré en droites canoniquement associé à un diviseur $\triangle$. Soit Z la normalisée du sous-ensemble analytique $Z' \subset L_{m_0 A}^{\oplus n}$ défini localement par les équations

$$(y, \xi_1, \cdots, \xi_n) \in Z' \iff \forall j,\ \xi_j^{m_0} = \sigma_j(y)\sigma_D(y)$$

où σ_j (resp. σ_D) est une section de $L_{m_0 A - D}$ (resp L_D) de diviseur H_j (resp. D). On note π l'application naturelle de Z dans Y.

On montre que Z est lisse. En un point $\xi = (y, \xi_1, \cdots, \xi_n) \in Z$ tel que $y \in \bigcap_{k \in J} H_k$ et $y \notin D \cup \bigcup_{l \notin J} H_l$, si $(\sigma_k \sigma_D, z_l)$ est un système de coordonnées holomorphes au voisinage de y, (ξ_k, z_l) est un système de coordonnées holomorphes au voisinage de ξ. Normaliser assure la possibilité de prendre une racine m_0-ième d'une fonction holomorphe au voisinage d'un point où elle ne s'annule pas.

En un point $\xi = (y, \xi_1, \cdots, \xi_n) \in Z$ tel que $y \in D \cap \bigcap_{k \in J} H_k$ et $y \notin \bigcup_{l \notin J} H_l$, il existe l_0 tel que $\sigma_{l_0}(y) \neq 0$. Si $(\frac{\sigma_k}{\sigma_{l_0}}, \sigma_D\sigma_{l_0}, z_{l'})(l' \neq l_0)$ est un système de coordonnées holomorphes au voisinage de y, $(\frac{\xi_k}{\xi_{l_0}}, \sigma_D\sigma_{l_0}, z_{l'})$ est un système de coordonnées holomorphes au voisinage de ξ.

Le diviseur $\pi^\star D$ est donné par l'équation $\sigma_D(y) = 0$. On note $H'_k := Z \cap \{\xi_k = 0\}$ et $D' := H'_1 + \cdots + H'_n$. Puisque $D \cap \bigcap_i H_i = \emptyset$, il vient $\pi^\star D = m_0 D'$.

Le faisceau $\mathscr{O}_Z(-D') \subset \mathscr{O}_Z$ est muni de l'action naturelle ρ du groupe de Galois $G := (\mathbb{Z}/m_0)^n$. Pour tout nombre entier naturel d, et pour tout ouvert U de Y, $(\pi_\star\mathscr{O}_Z(dD'))^\rho(U)$ est l'espace des fonctions méromorphes sur $\pi^{-1}(U)$, avec des pôles d'ordre inférieur à d le long de $H'_1 \cup \cdots \cup H'_n$, invariantes par ρ, donc provenant de U. Ainsi,

$$\left(\pi_\star\mathscr{O}_Z(dD')\right)^\rho = \mathscr{O}_Y(\left[\frac{dD}{m_0}\right]).$$

Si D n'est pas irréductible, $D := d_1D_1 + \cdots + d_lD_l$, on construit une composée de revêtements galoisiens π_i de groupe G_i correspondant à chaque composante irréductible D_i. Cette composée est dominée par un revêtement galoisien dont le groupe est une extension des groupes G_i. En notant que pour tout couple (i, j), $(\pi_{i\star}\mathscr{O})^{G_j} = \pi_{i\star}\mathscr{O}$ si $i \neq j$ et $(\pi_{i\star}\mathscr{O})^{G_i} = \mathscr{O}$, on retrouve la formule du cas irréductible. ∎

Maintenant, les fibrés $((\pi^\star\tau^\star F) \otimes \mathscr{O}(-D'))^{m_0} = \pi^\star(\tau^\star F^{m_0} \otimes \mathscr{O}(-D))$ et par suite, $\tilde{F} := (\pi^\star\tau^\star F) \otimes \mathscr{O}(-D')$ sont semi-amples. Ce dernier est de plus muni d'une G-action $1 \otimes \rho$, où 1 désigne la G-action triviale sur le fibré $\pi^\star\tau^\star F$ qui provient de Y. Cette action permettra de conclure malgré l'augmentation d'irrégularité entre Y et Z : les images réciproques sur Z des fibrés en droites topologiquement triviaux sur Y peuvent être retrouvés parmi les fibrés en droites topologiquement triviaux sur Z, grâce à l'opération du groupe de Galois G sur une partie du groupe de Picard de Z. Il y a un nombre fini de composantes irréductibles dans l'ensemble des G-fibrés en droites topologiquement triviaux sur Z. Le lemme suivant affirme que la composante irréductible de $(\pi^\star\mathscr{O}_Y, 1)$ est composée de fibrés qui proviennent de fibrés en droites sur Y.

LEMME 18.5. — *Soit $\pi : Z \to Y$ un revêtement galoisien de groupe G fini. Soit $L' \to Z$ un fibré en droites sur Z muni d'une action ρ de G telle que (L', ρ) soit dans la composante irréductible de $(\pi^\star\mathscr{O}_Y, 1)$ des G-fibrés en droites sur Z. Alors, il existe un fibré en droites $L \to Y$ sur Y tel que (L', ρ) soit isomorphe à $(\pi^\star L, 1)$.*

Démonstration. — Par hypothèse, puisque le groupe des caractères de G est fini, pour tout $g \in G$, $z \in Z$, $l'_z \in L'_z$, si $g.z = z$, alors $\rho(g).l'_z = l'_z$. Ainsi $L := L'/\rho$ est un fibré en droites holomorphe sur Y. On montre alors que le morphisme

$$\begin{array}{rccc} r: & L' & \to & \pi^\star L \\ & (z, l') & \mapsto & (z, [l']^\rho) \end{array}$$

est un isomorphisme entre (L', ρ) et $(\pi^\star L, 1)$. ∎

Soit (λ_2, ρ_2) un G-fibré en droites topologiquement trivial sur Z dans la composante irréductible de $(\pi^\star\mathscr{O}_Y, 1)$ des G-fibrés en droites sur Z. Par le lemme précédent, on peut donc écrire (λ_2, ρ_2) sous la forme $(\pi^\star\lambda_1, 1)$. A l'aide, par exemple, de la cohomologie des courants et de l'image directe des courants on constate que $\pi^\star : H^2(Y, \mathbb{R}) \to H^2(Z, \mathbb{R})^G$ est injective.

La première classe de Chern du fibré λ_1 est donc de torsion. Quand (λ_2, ρ_2) varie dans la composante irréductible de $(\pi^\star \mathscr{O}_Y, 1)$ des G-fibrés en droites sur Z, puisque la partie de torsion de $H^2(Y, \mathbb{Z})$ est discrète, le fibré λ_1 change par un fibré topologiquement trivial. Par conséquent, le fibré λ_1 est, comme $\mathscr{O}_Y$, topologiquement trivial.

Puisque τ est une modification, il existe un fibré en droites $\lambda \in \mathrm{Pic}^0(X)$ tel que $\lambda_1 = \tau^\star\lambda$. Réciproquement, tout fibré en droites λ topologiquement trivial sur X permet de construire $(\pi^\star\tau^\star\lambda, 1)$, G-fibré en droites topologiquement trivial sur X_2, dans la composante irréductible de $(\pi^\star\mathscr{O}_{X_1}, 1)$ des G-fibrés en droites sur X_2.

Il s'agit maintenant relier la cohomologie G-équivariante des déformations du fibré en droites semi-ample $\tilde{F}$ sur X_2 à celle des déformations de F sur X.

$$\begin{aligned}
\left[H^q(Z, \tilde{F}^{-1} \otimes \lambda_2)\right]^G &= H^q\left(Y, \pi_\star(\tilde{F}^{-1} \otimes \lambda_2)^G\right) \\
&= H^q\left(Y, \pi_\star(\pi^\star\tau^\star F^{-1} \otimes \mathscr{O}_Z(D') \otimes \lambda_2)^{1\otimes\rho\otimes\rho_2}\right) \\
&= H^q\left(Y, \tau^\star F^{-1} \otimes \lambda_1 \otimes \pi_\star(\mathscr{O}(D'))^\rho\right) \\
&= H^q\left(Y, \tau^\star(F^{-1} \otimes \lambda)\right) \\
&= H^q\left(X, F^{-1} \otimes \lambda\right).
\end{aligned}$$

La première égalité a lieu car on peut prendre la moyenne des images par G d'un représentant d'une classe de cohomologie, la dernière égalité car τ est une modification entre variétés projectives lisses : les images directes supérieures $\mathscr{R}^j\tau_\star(\mathscr{O}_{X_1})$ sont nulles pour tout $j > 0$.

Le théorème 18.1 est alors une conséquence de la version G-équivariante du théorème analogue pour les fibrés semi-amples (théorème 18.2) . ■

Soient $r : Y \to X$ un revêtement galoisien de groupe G entre deux variétés projectives lisses et $F \to Y$ un fibré vectoriel. On note $\mathrm{Pic}^0(Y, G)^\circ$ la composante irréductible de $(r^\star\mathscr{O}_X, 1)$ des G-fibrés en droites topologiquement triviaux sur Y. On définit

$$S^q_m(F, G) := \{\lambda \in \mathrm{Pic}^0(Y, G)^\circ / \dim\left[H^q(Y, F \otimes \lambda)\right]^G \geqslant m\}.$$

On désigne par $\alpha^G : Y \to \mathrm{Alb}(Y)^G$ le morphisme obtenu en intégrant les 1-formes holomorphes sur Y, invariantes par G. En fait, en identifiant $\mathrm{Alb}(Y)^G$ et $\mathrm{Alb}(X)$, on obtient $\alpha^G = \alpha_X \circ r$.

Théorème 18.2. — *Si le fibré F est $(0, q-1)$- et $(0, q)$-semi-positif. Alors pour tout m, $S^q_m(F, G)$ est un ensemble analytique réunion de translatés de sous-tores de* $\mathrm{Pic}^0(Y, G)^\circ$ *de codimension supérieure à* $\dim \alpha^G(Y) - q$.

. Remarque sur les diviseurs e ectifs

Le but de ce paragraphe est de montrer comment étendre la plupart des résultats d'annulation pour la cohomologie des déformations d'un fibré vectoriel F en des résultats d'annulation pour la cohomologie des déformations de $F \otimes \mathscr{O}(-D)$ où D est un diviseur effectif simple.

Définition 19.1. — *On dira qu'un espace complexe réduit $(D, \mathscr{O}_D)$ est* normal à singularités rationnelles *s'il existe un espace complexe irréductible réduit lisse $\tilde{D}$ et une modification $\nu : \tilde{D} \to D$ composée d'éclatements de centre réduit et lisse, tels que $\nu_\star\mathscr{O}_{\tilde{D}} = \mathscr{O}_D$ et pour tout $i \in \mathbb{N} - \{0\}$, $\mathscr{R}^i\nu_\star\mathscr{O}_{\tilde{D}} = 0$. En particulier, si D est sous-espace d'une variété kählérienne, $\tilde{D}$ est une variété kählérienne.*

Proposition 19.2. — *Soient X une variété analytique complexe compacte lisse et D un diviseur e ectif réduit normal à singularités rationnelles. On note $i : D \to X$ l'inclusion. Soient $\nu : \tilde{D} \to D$ une résolution de D donnée par la définition . et $\iota := i \circ \nu$.*

Alors

$$S^q(X, F \otimes \mathscr{O}(-D)) \subset S^q(X, F) \cup S^{q-1}(\tilde{D}, \iota^\star F, \iota).$$

Démonstration. — La suite exacte courte de définition de $\mathscr{O}_D$ conduit pour tout fibré en droites $\lambda \in \mathrm{Pic}^0(X)$, à la suite exacte

$$H^{q-1}(D, i^\star(F \otimes \lambda)) \to H^q(X, F \otimes \mathscr{O}(-D) \otimes \lambda) \to H^q(X, F \otimes \lambda).$$

Reste à remarquer en utilisant la suite spectrale de Leray pour $\nu : \tilde{D} \to D$, que

$$H^{q-1}(D, i^\star(F \otimes \lambda)) = H^{q-1}(\tilde{D}, \iota^\star F \otimes \iota^\star \lambda).$$

■

On obtient ainsi, par exemple, en utilisant la propriété de transport de la semi-négativité par image réciproque et le théorème 16.2 d'annulation relatif le

Corollaire 19.3. — *Soient la variété X et le fibré vectoriel F comme dans l'introduction. On suppose que $F \to X$ peut être muni d'une métrique hermitienne de classe $\mathscr{C}^\infty$ à courbure semi-négative. Soit D un diviseur e ectif réduit normal à singularités rationnelles. Alors, $S^q(X, F \otimes \mathscr{O}(-D))$ est un sous-ensemble analytique de* $\mathrm{Pic}^0(X)$ *de codimension supérieure à* $\min(\dim \alpha_X(X), \dim \alpha_X(D) + 1) - q$.

Remarque. — La $(0, q)$-semi-positivité dépend de la métrique kählérienne choisie. Elle ne vérifie donc pas de propriétés de transport simples.

. Fibrés vectoriels

La $(0, q)$-semi-positivité est une hypothèse difficile à obtenir pour un fibré vectoriel. Le but de cette partie est de montrer comment obtenir des théorèmes d'annulation générique pour la cohomologie des fibrés vectoriels sous des hypothèses algébriques simples.

. . Par les variétés de drapeaux

Soit $E \to X$ un fibré vectoriel nef et abondant de rang r sur X projective. Par définition, le fibré en droites $\mathscr{O}_E(1) \to \mathbb{P}(E)$ est nef et abondant sur $\mathbb{P}(E)$ projective : on peut donc lui appliquer les résultats précédents. On note $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$ la submersion naturelle. Le morphisme d'Albanese de $\mathbb{P}(E)$ est la composée

$$\alpha_{\mathbb{P}(E)} : \mathbb{P}(E) \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{\alpha_X} \mathrm{Alb}(X).$$

et les fibrés en droites topologiquement triviaux sur $\mathbb{P}(E)$ sont donnés par l'isomorphisme

$$\pi^\star : \mathrm{Pic}^0(X) \simeq \mathrm{Pic}^0(\mathbb{P}(E))$$

qui respecte les structures affines. Puisque

pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\pi_\star \mathscr{O}_E(k) = S^k E$,
pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$, $\mathscr{R}^j \pi_\star(\mathscr{O}_E(k)) = 0$
et que $K_{\mathbb{P}(E)} := \pi^\star(K_X \otimes \det E) \otimes \mathscr{O}_E(-r)$,

la suite spectrale de Leray associée à π donne pour tous $k \in \mathbb{N}^\star$ et $m \in \mathbb{N}^\star$, l'isomorphisme affine

$$\pi^\star : S_m^{q-r+1}(S^k E^\star \otimes \det E^\star) \simeq S_m^q(\mathscr{O}_E(-r-k)).$$

On obtient donc des théorèmes d'annulation générique et de structure des lieux exceptionnels pour les fibrés $S^k E^\star \otimes \det E^\star$ en degrés q plus petits ou égaux à la dimension d'Albanese de X moins le rang de E. La même démarche sur d'autres variétés de drapeaux, ou sur des produits de copies de $\mathbb{P}(E)$ donne des théorèmes pour d'autres représentations du groupe linéaire.

. . Par l'isomorphisme de Le Potier

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Pic}^0(X)$, sur $\pi : \mathbb{P}(E) \simeq \mathbb{P}(E \otimes \lambda) \to X$, les fibrés en droites $\mathscr{O}_{E\otimes\lambda}(1)$ et $\mathscr{O}_E(1) \otimes \pi^\star(\lambda)$ sont isomorphes. L'isomorphisme de Le Potier [L P 73] donne donc pour tous $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et $m \in \mathbb{N}^\star$

$$S_m^{p,q}(E) \simeq S_m^{p,q}(\mathscr{O}_E(1)).$$

. . Par les notions de semi-positivité

La semi-positivité d'un fibré vectoriel hermitien au sens de Nakano (utile pour les théorèmes d'annulation de cohomologie) implique la semi-positivité au sens de Griffiths (géométrique). La "réciproque" établie dans [D-S 80] montre en particulier que si E est un fibré vectoriel hermitien semi-positif au sens de Griffiths (par exemple un fibré vectoriel globalement engendré), alors $E \otimes \det E$ est semi-positif au sens de Nakano donc (n,q)-semi-positif pour tout q et par dualité $E^\star \otimes \det E^\star$ est $(0,q)$-semi-positif pour tout q. Le théorème 16.1 d'annulation pour les fibrés semi-négatifs s'applique donc et donne le

Corollaire 20.1. — *Soit E un fibré vectoriel semi-positif au sens de Gri ths. Alors pour λ générique dans* $\mathrm{Pic}^0(X)$,

$$H^q(X, E^\star \otimes \det E^\star \otimes \lambda) = 0 \ \textit{ pour tout } q < \dim \alpha(X).$$

. Variétés à courbure de Ricci semi-positive

On retrouve dans ce paragraphe un théorème de Lichnerowicz [Li 71] sur le morphisme d'Albanese d'une variété à courbure de Ricci semi-positive. Plus généralement,

Théorème 21.1. — *Soit X une variété kählérienne compacte lisse de dimension n dont le fibré canonique est $(0, n-1)$-semi-positif. Alors, le morphisme d'Albanese $\alpha : X \to \mathrm{Alb}(X)$ est une submersion.*

Démonstration. — Puisque $\mathscr{O}$ est isolé dans $S^n(K_X)$, pour toute $(0,1)$-forme harmonique Φ non nulle, le complexe dérivé de K_X en $\{\mathscr{O}\}$ dans la direction Φ

$$H^{n-1}(X, K_X) \xrightarrow{\wedge\Phi} H^n(X, K_X) \xrightarrow{\wedge\Phi} 0$$

a une homologie nulle en degré n (i.e. $H^{n-1}(X, K_X) \xrightarrow{\wedge\Phi} H^n(X, K_X)$ est surjective). C'est aussi une conséquence de la dualité de Serre $H^{n-1}(X, K_X) \times H^1(X, \mathscr{O}) \to H^n(X, K_X)$.

On choisit une métrique h sur K_X à courbure $(0, n-1)$-semi-positive. Par le théorème de Calabi-Yau (paragraphe 10.3), il existe une métrique kählérienne ω sur X dont la courbure de Ricci est $\frac{-i}{2\pi} c_h(K_X) \in c_1(X)$. Ainsi, l'application naturelle

$$\iota : (\mathbb{C}, |\ |) \to (\Lambda^{n,0} T^\star X \otimes K_X^{-1}, \Lambda^{n,0}\omega^\star \otimes h^\star)$$

est une isométrie (à un facteur constant près). La forme $\sharp(\iota 1)$ est une $(0, n)$-forme harmonique à valeurs dans K_X. Elle ne s'annule en aucun point.

Le lemme 16.2 et la théorie de Hodge montrent que l'application entre espaces de formes harmoniques

$$\mathscr{H}^{n-1}(X, K_X) \xrightarrow{\wedge\Phi} \mathscr{H}^n(X, K_X)$$

est aussi surjective.

Par conséquent aucune $(0, 1)$-forme harmonique non nulle ne s'annule : la différentielle du morphisme d'Albanese de X est partout surjective. ■

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographiques de l'introduction

[Be 88] A. Beauville, *Annulation du H^1 et systèmes paracanoniques sur les surfaces,* J. reine angew. Math. 388 (1988) 149-157 et 418 (1991) 219-220.

[Bo 78] F. Bogomolov, *Unstable vector bundles on curves and surfaces,* Proc. Internat. Congress of Math. Helsinki (1978) 517-524.

[C-F 90] F. Campana et H. Flenner, *A characterization of ample vector bundles on a curve,* Math. Ann. 287 (1990) 4. 571-575.

[Ca 91] F. Catanese, *Recent results on irregular surfaces and irregular Kähler manifolds*, Lecture Notes in Pure and Applied Math. 132 (1991) 59-88.

[C-S 93] S.D. Cutkosky et V. Srinivas, *On a problem of Zariski on dimensions of linear systems,* Annals of Math. 137 (1993) 531-559.

[De 92] J.P. Demailly, *Regularization of closed positive currents and intersection theory,* J. of Algebraic Geometry 1 (1992) 361-409.

[E-L 96] L. Ein et R. Lazarsfeld, *Singularities of Theta divisors, and the birational geometry of irregular varieties*, preprint alg-geom 9603017.

[En 93] I. Enoki, *Kawamata-Viehweg vanishing for compact Kähler manifolds,* Einstein metric and Yang-Mills connections (ed. T. Mabuchi, S.Mukai) Marcel Dekker, (1993) 59-68.

[Fu 78] T. Fujita, *On Kähler fiber spaces over curves*, J. Math. Soc. Japan 30 (1978) 779-794.

[G-L 87] M. Green et R. Lazarsfeld, *Deformation theory, generic vanishing theorems, and some conjectures of Enriques, Catanese, and Beauville*, Invent. Math. 90 (1987) 389-407.

[G-L 91] M. Green et R. Lazarsfeld, *Higher obstructions to deforming cohomology groups of line bundles*, J. of American Math. Soc. 4 (1991) 87-103.

[Gr 69] P. A. Griffiths, *Hermitian di erential geometry, Chern classes and positive vector bundles.* In : Global analysis, Princeton : Princeton University Press (1969).

[Ka 81] Y. Kawamata, *Characterization of abelian varieties,* Compositio Math. 43 (1981) 253-276.

[Ko 86] J. Kollár, *Higher direct images of dualizing sheaves I*, Annals of Math. 123 (1986) 11-42.

[Ko 95] J. Kollár, *Shafarevich Maps and Automorphic Forms*, Princeton Univ. Press, 1995.

[Sk 78] H. Skoda, *Morphismes surjectifs de fibrés vectoriels semi-positifs*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 11 (1978) 577-611.

[Um 73] H. Umemura, *Some results in the theory of vector bundles,* Nagoya Math. J. 52 (1973) 97-128.

[Vi 95] E. Viehweg, *Quasi-projective Moduli for polarized manifolds*, Springer-Verlag (1995).

Références bibliographiques des préliminaires

[De 82] J.P. Demailly, *Estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au dessus d'une variété kählérienne complète*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 15 (1982) 457-511.

[De 92'] J.P. Demailly, *Regularization of closed positive currents and intersection theory*, J. of Algebraic Geometry 1 (1992) 361-409.

[D-P-S 94] J.P. Demailly, Th. Peternell, M. Schneider, *Compact complex manifolds with numerically e ective tangent bundles*, J. of Algebraic Geometry 3 (1994) 295-345.

[Gr 69] P. A. Griffiths, *Hermitian di erential geometry, Chern classes and positive vector bundles.* In : Global analysis, Princeton : Princeton University Press (1969).

[G-H 78] P. A. Griffiths et J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, New York, (1978).

[Ha 70] R. Hartshorne, *Ample subvarieties of algebraic varieties*, Lecture notes in Math. 156 (1970).

[Wu 83] H. Wu, *Complex di erential geometry*, DMV Seminar Band 3, Birkhaüser 1983.

Références bibliographiques de la première partie

[Da 78] V.I. Danilov, *The geometry of toric varieties*, Russian Math. Surveys 33 (1978) 97-154.

[De 82] J.P. Demailly, *Estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au dessus d'une variété kählérienne complète*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 15 (1982) 457-511.

[De 88] J. P. Demailly, *Vanishing theorems for tensor power of an ample vector bundle*, Inventiones Math. 91 (1988) 203-220.

[De 92'] J.P. Demailly, *Regularization of closed positive currents and intersection theory*, J. of Algebraic Geometry 1 (1992) 361-409.

[D-P-S 94] J.P. Demailly, Th. Peternell, M. Schneider, *Compact complex manifolds with numerically e ective tangent bundles*, J. of Algebraic Geometry 3 (1994) 295-345.

[D-S 80] J. P. Demailly et H. Skoda, *Relations entre les notions de positivité de P. A. Gri ths et de S. Nakano*, Séminaire P. Lelong et H. Skoda, année 1978-79, Lecture notes in Math. 822 (1980) 304-309.

[E-V 92] H.Esnault et E.Viehweg, *Lectures on vanishing theorems*, DMV Seminar, Band 20, Birkhaüser Verlag (1992).

[Fr 79] R. Frankel, *Some remarks on positive vector bundles*, J. of Differential Geometry 14 (1979) 143-148.

[Fu 78] T. Fujita, *On Kähler fiber spaces over curves*, J. Math. Soc. Japan 30 (1978) 779-794.

[Gr 69] P. A. Griffiths, *Hermitian di erential geometry, Chern classes and positive vector bundles.* In : Global analysis, Princeton : Princeton University Press (1969).

[Ha 66] R. Hartshorne, *Ample vector bundles*, Publ. Math. I.H.E.S 29 (1966) 319-394.

[Ha 77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer Verlag, Berlin (1977).

[Ig 54] J. Igusa, *On the structure of a certain class of Kähler manifolds*, Amer. J. Math. 76 (1954) 669-678.

[Ka 81] Y. Kawamata, *Characterization of abelian varieties*, Compositio Math. 43 (1981) 253-276.

[Ka 82] Y. Kawamata, *A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem*, Math. Ann. 261 (1982) 43-46.

[K-O 73] S. Kobayashi et T. Ochiai, *Characterisations of complex projective spaces and hyperquadrics*, J. Math. Kyoto Univ. 13 (1973) 31-47.

[Ko 86] J. Kollár, *Higher direct images of dualizing sheaves I*, Ann. Math. 123 (1986) 11-42.

[Le 68] P. Lelong, *Fonctions plurisousharmoniques et formes di érentielles positives*, Dunod, Paris, Gordon & Breach, New York (1968).

[Ma 92] L. Manivel, *Théorèmes d'annulation pour les fibrés associés à un fibré ample*, Ann. Scu. Norm. Pisa 4 (1992) 515-565.

[Ma 96] L. Manivel, *Vanishing theorems for ample vector bundles*, Prépublication de l'Inst. Fourier 334 (1996).

[Mu 66] D. Mumford, *Lectures on curves on an algebraic surface*, Annals of Math. Studies 59, Princeton U. Press, Princeton (1966).

[Vi 82] E. Viehweg, *Vanishing theorems*, J. Reine Angew. Math. 335 (1982) 1-8.

[Vi 83] E. Viehweg, *Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension for certain fiber spaces*, Adv. Studies Pure Math. 1 (1983) 329-353.

[Vi 95] E. Viehweg, *Quasi-projective Moduli for polarized manifolds*, Springer-Verlag (1995).

Références bibliographiques de la deuxième partie

[Bo 78] F. Bogomolov, *Unstable vector bundles on curves and surfaces*, Proc. Internat. Congress of Math. Helsinki (1978) 517-524.

[De 82] J.P. Demailly, *Estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au dessus d'une variété kählérienne complète*, Ann. Sci. Ecole Normale Sup. 15 (1982) 457-511.

[De 92] J.P. Demailly, *Singular hermitian metrics on positive line bundles*, Proc. Conf. "Complex Algebraic Varieties" Bayreuth 1990, Lecture notes in Math. Vol 1507 (1992) 87-104.

[De 94] J.P. Demailly, *L^2 vanishing theorems for positive line bundles and adjonction theory* C.I.M.E. Lectures , Transcendental methods in algebraic geometry, (1994).

[D-P-S 94] J.P. Demailly, Th. Peternell, M. Schneider, *Compact complex manifolds with numerically e ective tangent bundles*, J. of Alg. Geometry. 3 (1994) 295-345.

[Fu 83] T. Fujita, *Semipositive lines bundles*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 30 (1983) 353-378.

[G-H 78] P. A. Griffiths et J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, New York, (1978).

[Va 85] J. Varouchas, *Sur l'image d'une variété kählérienne compacte*, Lecture Notes in Math. 1158 (1985) 245-259.

[Vi 82] E. Viehweg, *Vanishing theorems*, J. Reine Angew. Math. 335 (1982) 1-8.

[Ya 77] S.T. Yau, *On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 74 (1977) 1798-1799.

Références bibliographiques de la troisième partie

[Bi 95] I. Biswas, *On the cohomology of parabolic line bundles*, Math. Res. Letters 2 (1995) 783-790.

[C-S 93] S.D. Cutkosky et V. Srinivas, *On a problem of Zariski on dimensions of linear systems*, Annals of Math. 137 (1993) 531-559.

[D-S 80] J. P. Demailly et H. Skoda, *Relations entre les notions de positivité de P. A. Gri ths et de S. Nakano*, Séminaire P. Lelong et H. Skoda, année 1978-79, Lecture notes in Math. 822 (1980) 304-309.

[En 93] I. Enoki, *Kawamata-Viehweg vanishing for compact Kähler manifolds*, Enstein metric and Yang-mills connections (ed. T. Mabuchi, S.Mukai) Marcel Dekker, (1993) 59-68.

[E-V 92] H. Esnault et E. Viehweg, *Lectures on vanishing theorems*, DMV Seminar (1992) Band 20.

[G-L 87] M. Green et R. Lazarsfeld, *Deformation theory, generic vanishing theorems, and some conjectures of Enriques, Catanese, and Beauville*, Invent. Math. 90 (1987) 389-407.

[G-L 87'] M. Green et R. Lazarsfeld, *Deformation theory for cohomology of analytic vector bundles on Kähler manifolds, with applications*, Mathematical Aspects of String Theory, World Scientific, (1987) 416-440.

[G-L 91] M. Green et R. Lazarsfeld, *Higher obstructions to deforming cohomology groups of line bundles*, J. of American Math. Soc. 4 (1991) 87-103.

[Gr 69] P. A. Griffiths, *Hermitian di erential geometry, Chern classes and positive vector bundles* , in : Global analysis, Princeton : Princeton University press, (1969).

[G-H 78] P. A. Griffiths et J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, New York, (1978).

[Ka 85] Y. Kawamata, *Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties*, Invent. Math. 79 (1985) 567-588.

[Ko 86] J. Kollár, *Higher direct images of dualizing sheaves I*, Annals of Math. 123 (1986) 11-42.

[Li 71] A. Lichnerowicz, *Variétés kählériennes à première classe de Chern non négative et variétés riemanniennes à courbure de Ricci généralisée non négative*, J. Diff. Geom. 6 (1971) 47-94.

[L P 73] J. Le Potier, *Théorème d'annulation en cohomologie*, C. R. Acad. Sc. Paris 276 (1973) 535-537.

[Sk 78] H. Skoda, *Morphismes surjectifs de fibrés vectoriels semi-positifs*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 11 (1978) 577-611.