AMPLITUDE ET POSITIVITÉ DES FIBRÉS VECTORIELS HOLOMORPHES

CHRISTOPHE MOUROUGANE

1. Introduction

Tous les résultats énoncés dans la troisième partie ont été obtenus en collaboration avec Shigeharu Takayama de l'Université de Tokyo (Graduate School of Mathematical Sciences).

math.AG/0505324

1.1. **La question de Griffiths.** On rappelle quelques définitions classiques. Sur une variété analytique complexe X, un fibré vectoriel holomorphe E est dit *globalement engendré* si pour tout point x de X, l'application d'évaluation des sections globales $H^0(X, E) \to E_x$ est surjective. Le fibré E est dit *semi-ample* si une de ses puissances symétriques S^kE (avec $k \in \mathbb{N}^\star$) est globalement engendrée. Le fibré E est dit *très ample* si pour tout point x de X, l'application d'évaluation des sections globales $H^0(X, E) \to J^1E_x$ sur les jets d'ordre 1 en x est surjective et pour tout couple (x, y) de $X \times X - \Delta_X$, l'application d'évaluation $H^0(X, E) \to E_x \oplus E_y$ est surjective. Le fibré E est dit *ample* si une de ses puissances symétriques S^kE (avec $k \in \mathbb{N}^\star$) est très ample. Hartshorne [10] a montré que cette définition est équivalente à l'amplitude du fibré en droites quotient universel $\mathcal{O}_E(1) \to \mathbb{P}(E)$ sur la variété $\mathbb{P}(E) \xrightarrow{\pi} X$ des quotients de rang 1 de E. L'amplitude de ce fibré en droites équivaut par le théorème de plongement de Kodaira à l'existence d'une métrique à courbure strictement positive sur $\mathcal{O}_E(1)$.

On cherche une caractérisation en terme de métriques hermitiennes de l'amplitude des fibrés vectoriels. Puisque l'espace total $\mathcal{O}_E(-1)$ est l'éclaté de l'espace total $E^\star$ le long de sa section nulle, une métrique hermitienne sur $\mathcal{O}_E(1)$ fournit seulement une métrique de Finsler sur E.

On note que si h est une métrique hermitienne sur E et h_q la métrique quotient sur $\mathcal{O}_E(1)$ alors après le choix d'un repère holomorphe normal de (E, h), la courbure de la connexion de Chern associée est donnée en $(x, [a^\star])$ par

$$\begin{aligned}\Theta(\mathcal{O}_E(1), h_q) &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\|e_0^\star + z_1e_1^\star + \cdots z_{r-1}e_{r-1}^\star\|^2 \\ &= \Theta(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_x)}(1), FS(h_x)) - \frac{\langle \pi^\star\Theta(E^\star, h)a^\star, a^\star\rangle}{\langle a^\star, a^\star\rangle}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Ici, $a^\star$ est la variable qui paramètre les quotients de rang 1 de E et $FS(h_x)$ la métrique de Fubini-Study déduite du produit scalaire hermitien h_x sur E_x.

On est ainsi amené à poser les définitions suivantes. Une $(1, 1)-$forme alternée Θ sur un espace vectoriel complexifié $T_\mathbb{C} = T \otimes \mathbb{C}$ à valeurs dans l'espace des endomorphismes hermitiens d'un espace vectoriel hermitien $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ est dite *strictement positive au sens de Griffiths* si

$$\forall \xi \otimes v \in T_\mathbb{C} \otimes V - \{0\}, \quad \langle (\xi, \overline{\xi}) \rfloor \Theta v, v\rangle > 0.$$

On notera $\Theta >_{\text{Griff}} 0$. La forme Θ est dite *strictement positive au sens de Nakano* si, considérée comme forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne sur $T_\mathbb{C} \otimes V$, elle est définie positive.

Définition 1. [8] Un fibré vectoriel holomorphe E sur une variété analytique complexe lisse X est dit *strictement positif au sens de Griffiths* (resp. *strictement positif au sens de Nakano*) s'il peut être muni d'une métrique h hermitienne de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont la courbure de Chern, $(1,1)-$forme différentielle à valeurs dans le fibré des endomorphismes hermitiens de (E,h), est strictement positive au sens de Griffiths (resp. strictement positive au sens de Nakano) en tout point de X.

Par exemple, tout fibré globalement engendré est semi-positif au sens de Griffiths, son dual est même semi-négatif au sens de Nakano. Si A est un fibré en droites ample et si $E \otimes A^{-1}$ est globalement engendré alors E est strictement positif au sens de Griffiths. Un fibré très ample est strictement positif au sens de Griffiths. La positivité au sens de Nakano (utile pour les théorèmes d'annulation de cohomologie) implique la positivité au sens de Griffiths (géométrique). D'autre part, une propriété établie dans [4] montre en particulier que si E est un fibré vectoriel hermitien semi-positif au sens de Griffiths, alors $E \otimes \det E$ est semi-positif au sens de Nakano.

La formule 1 montre que la stricte positivité au sens de Griffiths implique l'amplitude. La question de P. A. Griffiths [8, problem (0.9)] est la réciproque.

$$\text{La question de Griffiths} \qquad \begin{array}{ccc} E \text{ ample} & \Longleftrightarrow & \mathcal{O}_E(1) \text{ ample} \\ \Big\Downarrow ? & & \Big\Updownarrow \\ E >_{\text{Griff}} 0 & \Rightarrow & \mathcal{O}_E(1) >_{\text{Griff}} 0 \end{array}$$

H. Umemura [17] et indépendamment F. Campana et H. Flenner [3] en se ramenant au cas des fibrés amples et stables ont montré que la stricte positivité au sens de Griffiths caractérise l'amplitude sur les courbes.

1.2. **Comparaison amplitude et positivité.** Les théorèmes connus d'annulation de groupes de cohomologie sont les mêmes sous les hypothèses d'amplitude et de positivité au sens de Griffiths.

La construction de métriques sur un fibré vectoriel permet l'utilisation de la théorie de Morse pour le calcul de groupes d'homotopie de sous variétés ou de revêtements à partir de l'homotopie d'un espace (voir par exemple [6] et [13, Chapitre 7]).

On considère Z le lieu des zéros d'une section holomorphe de E et $Z^\star$ le lieu des zéros de la section correspondante de $\mathcal{O}_E(1)$. On suppose d'abord que E est ample. Comme la variété affine $\mathbb{P}(E) - Z^\star$ est un fibré en fibre $\mathbb{C}^{r-1}$ sur $X - Z$, on obtient l'annulation des groupes d'homologie relative $H^i(X, Z)$ en degré $i \leq \dim X - \operatorname{rang} E$ (théorème de Sommese).

On suppose maintenant que (E,h) est strictement positif au sens de Griffiths, et que Z est lisse de codimension égale au rang de E. L'application $x \mapsto h(s(x))$ dont le hessien est

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\, h(s(x)) = -\langle \Theta(E,h)s(x), s(x)\rangle_h + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\langle ds(x), ds(x)\rangle_h$$

a un indice (i.e. le nombre de valeurs propres strictement négatives du hessien) au moins $\dim X - \operatorname{rang} E + 1$ en chaque point critique de $X - Z$. On obtient donc l'annulation des groupes d'homotopie relative $\pi_i(X, Z)$ en degré $i \leq \dim X - \operatorname{rang} E$.

Pour les revêtements, le lemme clé est

LEMME. — *Si* (E,h) *est strictement positif au sens de Griffiths et si* S *est une sous-variété de* $E - X \times \{0\}$ *alors en tout point critique de* $h_{|S}$ *l'indice est au moins* $\dim S - (\operatorname{rang} E - 1)$.

On note simplement que l'espace tangent à S en un point p critique de $h_{|S}$ ne contient pas tout E_p car $h_{|E_p}$ quadratique admet 0 comme seul point critique.

2. Le transport de positivité par image directe

Puisque par $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$, le faisceau image directe $\pi_\star \mathcal{O}_E(1)$ est (le faisceau des sections holomorphes locales de) E, la question de Griffiths se formule en termes de transport de positivité par image directe.

On rappelle que l'image directe d'un faisceau $\mathcal{F}$ sur X par un morphisme $f : X \to Y$ de variétés analytiques complexes est le faisceau $f_\star\mathcal{F}$ sur Y des sections relatives défini sur tout ouvert U de Y par $f_\star\mathcal{F}(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))$.

Par exemple, la décomposition d'un polynôme $P_{2m}(z)$ de degré $2m$ en une variable complexe z en $P_{2m}(z) = Q_m(z^2) + zR_{m-1}(z^2)$ donne l'égalité $f_\star(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_\mathbb{C}}(2m)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_\mathbb{C}}(m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_\mathbb{C}}(m-1)$ pour le morphisme $f : \mathbb{P}^1_\mathbb{C} \to \mathbb{P}^1_\mathbb{C}, z \mapsto z^2$. De même, $f_\star(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_\mathbb{C}}(2m+1)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_\mathbb{C}}(m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_\mathbb{C}}(m)$ et $f_\star(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_\mathbb{C}}(1))$ n'est pas ample.

On souligne que le calcul des classes de Chern d'une image directe se fait par le théorème de Riemann-Roch-Grothendieck. Le transport de positivité par image directe est donc en général difficile à vérifier.

On présente ici dans des cas très simples, quelques unes des techniques qui ont été utilisées pour obtenir ce type de résultats. On note que ces résultats servent par exemple pour étudier la projectivité de certains espaces de modules, la conjecture d'Iitaka de sous-additivité des dimensions de Kodaira dans les fibrations et l'existence de fibres singulières dans les familles non isotriviales de surfaces minimales de type général paramétrées par une courbe rationnelle ou elliptique [14].

Le théorème d'annulation de Kodaira permet par utilisation du critère de Castelnuovo-Mumford sur l'engendrement par les sections globales de montrer que si L est un fibré en droites ample sur une variété X projective lisse et si $F : X \to Y$ est une submersion sur une variété projective lisse alors $f_\star(K_{X/Y} \otimes L)$ est localement libre et ample. On utilise les produits fibrés de plusieurs copies de $X \to Y$. On peut aussi simplement en déduire que si E est un fibré vectoriel ample sur $\mathbb{P}^n$, alors $S^kE \otimes \det E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ est globalement engendré et $S^kE \otimes \det E$ est donc strictement positif au sens de Griffiths.

Le théorème d'annulation de J. Kollár [12] (qui affirme que les faisceaux $\mathcal{R}^q f_\star(\Omega^p_X)$ sont sans torsion et peuvent jouer le rôle de K_Y dans les théorèmes d'annulation) permet de montrer que sous les mêmes hypothèses $f_\star K_{X/Y}$ est numériquement effectif. C'est à dire que pour toute application ι d'une courbe C dans Y, tout quotient de rang 1 de $\iota^\star f_\star(K_{X/Y})$ est de degré positif ou nul. Les deux types de résultats précédents ont donnés lieu à beaucoup de généralisations notamment par Y. Kawamata et E. Viehweg.

On peut citer les résultats de B. Berndtsson [1]. Dans un contexte local, il montre en particulier que si T et Ω sont deux ouverts de $\mathbb{C}^N$ et $\mathbb{C}^n$ et si Φ est une fonction strictement pluri-sous-harmonique $\mathcal{C}^\infty$ bornée sur $T \times \Omega$ alors le fibré trivial $T \times B$ de fibre l'espace des fonctions holomorphes L^2 sur Ω avec la métrique sur B_t donnée par $\|f\|^2_t := \int_\Omega |f|^2 e^{-\Phi(t,.)}$ est à courbure strictement positive au sens de Nakano. L'idée est de considérer $T \times B$ comme sous-fibré du fibré trivial $T \times L^2$ de fibre l'espace des fonctions L^2 sur Ω avec la même métrique. Pour le calcul de la courbure de $T \times B$ il faut estimer la seconde forme fondamentale de l'inclusion $T \times B \subset T \times L^2$, ce qui revient à montrer qu'une équation $\overline{\partial}$ peut se résoudre avec estimations.

On peut aussi citer dans un contexte plus large la propriété montrée par M. Brunella [2] de variation sous-harmonique de la métrique de Poincaré sur les feuilles hyperboliques d'un feuilletage en courbes sur une surface complexe.

T. Fujita [7] a montré que si f est un morphisme surjectif à fibres connexes entre une variété X kählérienne compacte et une courbe C, l'image directe du faisceau canonique relatif est numériquement effectif. Il construit pour cela des métriques de Hodge à l'aide de la théorie de Griffiths de variations de structures de Hodge sur la partie où le morphisme f est lisse et montre que les singularités ne peuvent contribuer que positivement sur le degré des quotients de rang 1 de $f_\star(K_{X/C})$. C'est la démarche qu'avec Shigeharu Takayama nous avons adoptée pour montrer nos résultats.

3. Les résultats

Dans le sens de la conjecture de Griffiths nous avons montré le

Théorème 2. *Soit E un fibré vectoriel ample sur une variété projective. Alors, pour tout entier k, le fibré vectoriel $S^kE \otimes \det E$ est strictement positif au sens de Griffiths.*

Ce théorème n'apporte d'informations que sur les petites puissances symétriques de E puisque qu'un fibré très ample est strictement positif au sens de Griffiths. Bo Berndtsson a obtenu indépendemment des résultats analogues [1].

Il est nécessaire de généraliser la notion de positivité au sens de Griffiths pour englober le cas des métriques qui ne sont pas de classe $\mathcal{C}^\infty$. Dans le cas de métrique hermitienne de classe $\mathcal{C}^\infty$ on a remarqué (voir 1) que la positivité de Griffiths de (E,h) est équivalente à la positivité de $\mathcal{O}_E(1)$. Il est ainsi naturel de poser la

Définition 3. Une métrique hermitienne continue h sur un fibré vectoriel holomorphe $b : E \to X$ est dite à courbure *strictement positive au sens de Griffiths* s'il existe une $(1,1)$-forme ω_X définie positive sur X telle qu'au sens des courants

$$-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log h(\xi) \geq b^\star\omega_X,$$

où h est vue comme une fonction quadratique continue sur l'espace total $E - X \times \{0\}$.

Aux points où la métrique h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ les deux notions de positivité au sens de Griffiths coïncident. Avec cette nouvelle définition, nous montrons le

Théorème 4. *Soit E un fibré vectoriel semi-ample sur une variété analytique complexe compacte. Alors, pour tout entier k, le fibré vectoriel $S^kE \otimes \det E$ a une métrique continue à courbure semi-positive au sens de Griffiths.*

4. Les outils

4.1. **Les revêtements cycliques.** C'est la construction qui permet de formaliser l'idée due à Ramanujam de réduire des théorèmes d'annulation pour la cohomologie de certains faisceaux cohérents à des propriétés purement topologiques [16] (voir aussi [12]). Une référence pour ce paragraphe est [5, § 3].

Soit E un fibré vectoriel holomorphe globalement engendré. On fixe un entier k tel que $\mathcal{O}_E(k) \to \mathbb{P}(E)$ soit globalement engendré. Par le lemme de Bertini, toute section générique s de $\mathcal{O}_E(k) \to \mathbb{P}(E)$ est transverse à la section nulle et définit un diviseur lisse $D_s := (s = 0)$.

On considère alors le revêtement $Y_s \to \mathbb{P}(E)$ de $\mathbb{P}(E)$ totalement ramifié le long de D_s obtenu en prenant la racine k-ième de s c'est à dire

$$\begin{array}{ccc} \{l \in \mathcal{O}_E(1)/l^k = s(p(l))\} =: Y_s & \subset & \mathcal{O}_E(1) \\ p \Big\downarrow & & \\ \mathbb{P}(E) & & \end{array}$$

ou encore le spectre $Spec\, \mathcal{A}_s$ de l'algèbre

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} = \oplus_{i=0}^{+\infty} \mathcal{O}_E(-i) \to \mathcal{A}_s := \frac{\oplus_{i=0}^{+\infty} \mathcal{O}_E(-i)}{(l^\star - \check{s}(l^\star)\ ,\ \ l^\star \in \mathcal{O}_E(-k))}$$

où $\check{s}$ est l'inclusion de faisceaux $\mathcal{O}_E(-k) \stackrel{\times s}{\to} \mathcal{O}_E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}$. L'image directe du faisceau de structure $\mathcal{O}_{Y_s}$ est $p_\star \mathcal{O}_{Y_s} = \mathcal{A}_s \simeq \oplus_{i=0}^{k-1} \mathcal{O}_E(-i)$. Le morphisme $\pi \circ p$ est donc à fibres connexes et de plus lisse au dessus des points $x \in X$ où la restriction $s_{|\mathbb{P}(E_x)} \in \Gamma(\mathbb{P}(E_x), \mathcal{O}_E(k))$ est transverse à la section nulle. On notera Σ_s le lieu discriminant de $\pi \circ p$. L'intérêt de la construction est pour nous l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{r-1}(\pi \circ p)_\star \mathcal{O}_{Y_s} &= \mathcal{R}^{r-1}\pi_\star \left(\mathcal{R}^0 p_\star \mathcal{O}_{Y_s}\right) \\ &= \mathcal{R}^{r-1}\pi_\star \left(\oplus_{i=0}^{k-1} \mathcal{O}_E(-i)\right) \\ &= \oplus_{i=0}^{k-1} \pi_\star \left(\omega_{\mathbb{P}(E)/X} \otimes \mathcal{O}_E(i)\right)^\star \\ &= \oplus_{i=0}^{k-1} \pi_\star \left(\mathcal{O}_E(i-r) \otimes \pi^\star \det E\right)^\star \\ &= \oplus_{i=r}^{k-1} \left(S^{i-r}E \otimes \det E\right)^\star . \end{aligned} \tag{2}$$

On a utilisé la dualité de Serre relativement au morphisme lisse $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$ dont le faisceau dualisant est $\omega_{\mathbb{P}(E)/X} = \mathcal{O}_E(-r) \otimes \pi^\star \det E$. Cet isomorphisme permet la construction de métriques de Hodge.

4.2. **Les variations de structures de Hodge.** Une référence pour ce paragraphe est [18]. L'existence d'une structure holomorphe sur les termes de la filtration de Hodge de la cohomologie (localement constante) d'une famille lisse de variétés projectives lisses et la construction d'une pseudo-métrique (i.e. non dégénérée mais de signe changeant) plate sur la partie primitive de la cohomologie fait apparaître géométriquement des fibrés vectoriels holomorphes hermitiens à courbure de signe défini.

Plus précisément, on considère une famille lisse $f : Y \to B$ de variétés projectives. On fixe un degré d. Le système local $\mathcal{R}^d f_\star \mathbb{C}$ peut-être réalisé comme le faisceau des germes de sections horizontales du fibré vectoriel holomorphe $\mathbf{H}^d_{\mathbb{C}}$ (associé au faisceau localement libre) $(\mathcal{R}^d f_\star \mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_B$ muni de la connexion plate $\nabla : \mathbf{H}^d_{\mathbb{C}} \to \Omega^1_B \otimes \mathbf{H}^d_{\mathbb{C}}$, la connexion de Gauss-Manin. Par la théorie de Hodge et la semi-continuité supérieure des dimensions, les espaces $H^{p,d-p}(Y_b, \mathbb{C})$ ($b \in B$) sont de dimension constante et, par la théorie des opérateurs elliptiques, ils forment donc un sous-fibré différentiable $\mathbf{H}^{p,d-p}$ de $\mathbf{H}^d_{\mathbb{C}}$. P. A. Griffiths a montré qu'il faut considérer le sous fibré différentiable $\oplus_{i \geq p} \mathbf{H}^{i,d-i}$, des classes représentables par des formes avec au moins p variables holomorphes, pour obtenir un objet qui peut être muni d'une structure de sous-fibré holomorphe $\mathbf{F}^p$ de $\mathbf{H}^d_{\mathbb{C}}$. Par un théorème de Dolbeault relatif on peut identifier $\mathbf{E}^p := \mathbf{F}^p / \mathbf{F}^{p+1}$ avec le fibré $\mathcal{R}^{d-p} f_\star \Omega^p_{Y/B}$.

On rappelle maintenant la construction de métrique de Hodge sur la partie primitive de $\mathbf{E}^p$. On fixe une famille η_b ($b \in B$) de polarisations donnée par une section de $\mathcal{R}^2 f_\star \mathbb{Z}$, par exemple la famille des classes de Chern $c_1(L_{|Y_b})$ des restrictions d'un fibré ample L sur Y. Par le théorème de Lefschetz difficile, la forme bilinéaire sur $\mathbf{H}^d_{\mathbb{C}}$ définie par

$$S(c_1, c_2) := (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} \int_{Y_b} \eta_b^{n-d} \wedge c_1 \wedge c_2$$

est non-dégénérée. On note $\mathbf{P}^d := Ker(\eta^{n-d+1} \cup : \mathbf{H}^d \to \mathbf{H}^{2n-d+2})$ la partie primitive de la cohomologie qui, puisque la polarisation a été choisie parallèle, est aussi un sous-fibré différentiable de $\mathbf{H}^d$. Par les relations bilinéaires de Hodge-Riemann, $\mathbf{H}^{p,d-p}$ et $\mathbf{H}^{p',d-p'}$ sont orthogonaux sauf si $p + p' = d$ et sur la partie primitive $\mathbf{H}^{p,d-p}_{prim}$, la formule

$$h(c) := (\sqrt{-1})^{2p-d} S(c, \overline{c})$$

définit une métrique. Il faut noter l'alternance de signe. On note que $\mathbf{F}^p_{prim} := \mathbf{F}^p \cap \mathbf{P}^d$ admet une structure de sous-fibré holomorphe de $\mathbf{F}^p$. On pose $\mathbf{E}^p_{prim} := \mathbf{F}^p_{prim}/\mathbf{F}^{p+1}_{prim}$. On obtient donc une métrique appelée *métrique de Hodge* sur $(\mathbf{E}^p_{prim})$ et par isomorphisme de Dolbeault sur $\mathcal{R}^{d-p}_{prim} f_\star \Omega^p_{Y/B}$.

Il faut poser quelques définitions afin de décrire la courbure de la connexion de Chern associée. P.A. Griffiths a montré la propriété de transversalité $\nabla \mathbf{F}^p \subset \Omega^1_B \otimes \mathbf{F}^{p-1}$ qui formalise la formule de Cartan-Lie de dérivée d'une famille de classes (voir [18, proposition 9.14]). On note $\overline{\nabla}^p : \mathbf{E}^p \to \Omega^1_B \otimes \mathbf{E}^{p-1}$ l'application $\mathcal{O}_B$-linéaire obtenue en choisissant d'abord un relèvement à $\mathbf{F}^p$, en appliquant ensuite la connexion de Gauss-Manin et en projetant enfin sur $\mathbf{E}^{p-1}$. On peut aussi noter que la seconde forme fondamentale dans $\mathcal{C}^\infty_{1,0}(B, Hom(\mathbf{F}^p, \mathbf{H}^d_{\mathbb{C}}/\mathbf{F}^p))$ de la suite

$$0 \to \mathbf{F}^p \to \mathbf{H}^d_{\mathbb{C}} \to \mathbf{H}^d_{\mathbb{C}}/\mathbf{F}^p \to 0$$

pour la métrique plate induit $\overline{\nabla}^p : \mathbf{E}^p \to \Omega^1_B \otimes \mathbf{E}^{p-1}$. Les formules de courbure du quotient d'un fibré vectoriel hermitien mènent au

THÉORÈME[9, theorem 5.2]. — *La courbure $\Theta(\mathbf{E}^p_{prim})$ du fibré vectoriel holomorphe $\mathbf{E}^p_{prim}$ muni de sa métrique de Hodge est*

$$\langle \Theta(\mathbf{E}^p_{prim})(V, \overline{V})\sigma, \sigma\rangle_{Hodge} = \langle \overline{\nabla}^p_V \sigma, \overline{\nabla}^p_V \sigma\rangle_{Hodge} - \langle (\overline{\nabla}^{p+1}_V)^\star \sigma, (\overline{\nabla}^{p+1}_V)^\star \sigma\rangle_{Hodge}. \quad (3)$$

Ici V est un champs de vecteurs local sur B et σ une section locale de $\mathbf{E}^p$.

On peut appliquer le résultat précédent à la famille $\pi \circ p : Y_s \to X$ de revêtements cycliques obtenue en prenant la racine k-ième d'une section générique s de $\mathcal{O}_E(k)$. Mais, il faut se restreindre aux ouverts de Zariski $Y^0_s := (p \circ \pi)^{-1}(X - \Sigma_s)$ et $X^0 := X - \Sigma_s$ où $\pi \circ p : Y^0_s \to X^0$ est une famille lisse. Puisque $\overline{\nabla}^0$ est nulle, on obtient en remarquant que $\mathbf{E}^0_{prim} = \mathbf{E}^0 = \mathcal{R}^{r-1}(\pi \circ p)_\star \mathcal{O}_{Y^0_s/X^0} = \oplus_{i=r}^{k-1} (S^{i-r}E \otimes \det E)^\star_{|X^0}$ le

Corollaire 5. *Le fibré vectoriel $(S^{i-r}E \otimes \det E)_{|X^0}$ muni de la métrique de Hodge donnée par le choix d'une section globale générique de $\mathcal{O}_E(k)$ est semi-positif au sens de Nakano.*

Le calcul de courbure avec la pseudo-métrique plate $S(c, \overline{c})$ se réduit en fait ici à celui du quotient

$$0 \to F^1 \to (\mathcal{R}^{r-1}(\pi \circ p)_\star \mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{X^0} \to \mathcal{R}^{r-1}(\pi \circ p)_\star \mathcal{O}_{Y^0_s/X^0} \to 0.$$

4.3. **Les singularités des métriques de Hodge.** Il faut maintenant étudier les singularités des métriques de Hodge au voisinage du discriminant.

Si X est une courbe, la situation locale se décrit avec un entier m positif par

$$\begin{array}{rcl} \pi \circ p \;:\; Y_s = \{(x,z,l) \in \mathbb{C}^3 / l^k = x + z^m\} & \to & X = \{x \in \mathbb{C}\} \\ (x,z,l) & \mapsto & x \end{array}$$

Le fibré cotangent $\Omega^1_{Y_s}$ est engendré par dx, dz, dl soumis à la relation $kl^{k-1}dl - dx - mz^{m-1}dz = 0$. Une section locale $\omega \in \Gamma(U, f_\star K_{Y_s/X})$ vue dans $\Gamma(U, f_\star Hom(f^\star K_X, K_{Y_s}))$ et appliquée à $f^\star dx$ donne une section locale $\omega \cdot dx$ de K_{Y_s} sur $f^{-1}(U)$. Elle s'écrit $\eta(z,l) dz \wedge dl$. Puisque $\omega \cdot dx = \eta(z,l) dz \wedge dl = k^{-1} l^{1-k} \eta(z,l) dz \wedge f^\star dx$ et que $\varphi_0 := k^{-1} l^{1-k} \eta(z,l) dz$ est une forme relative de $\Gamma(Y_0, K_{Y_0})$, la norme de Hodge de ω

$$\|\omega\|^2_{Hodge} = (\sqrt{-1})^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \int_{Y_0} \varphi_0 \wedge \overline{\varphi_0}$$

a éventuellement un pôle d'ordre $k-1$ en 0 et pas d'autres singularités. Ce cas indique par dualité que la métrique de Hodge sur $(S^{i-r}E \otimes \det E)^\star_{|X^0}$ doit se prolonger à X tout entier en une métrique continue avec des zéros comme seules singularités. C'est ce que montre le lemme suivant. Par choix d'un repère naturel $(a^\star)^{-k}$ de $\mathcal{O}_E(k)$, la section $s \in H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_E(k))$ est donnée par une fonction holomorphe locale $\sigma = \sigma(x, z_2, \ldots, z_r)$.

Lemme 6. *La métrique de Hodge sur $(S^{i-r}E \otimes \det E)^\star$ construite par le choix de la section s est donnée par la formule*

$$\|e_I^\star \otimes e_1^\star \wedge e_2^\star \wedge \cdots \wedge e_r^\star\|^2_{h_s} = \int_{[a^\star] \in \mathbb{P}^{r-1}(E_x)} \frac{|\langle e_I, a^{\star i-r}\rangle|^2 |a_1|^{2r} |\sigma|^{\frac{2i}{k}}}{\|a^\star\|^{4i}_{g^\star}} \Omega^{r-1}.$$

Ce lemme est démontré par l'écriture explicite de chaque étape de l'isomorphisme (2).

Nous avons généralisé l'étude des singularités des métriques de Hodge.

Lemme 7. *Soit $f \;:\; Z \to X$ un morphisme surjectif propre et de Kähler entre deux variétés projective lisses.*

(1) *Alors, la métrique de Hodge sur $(f^0)_\star(K_{Z^0/X^0})$ s'étend en une métrique avec pôles sur $f_\star(K_{Z/X})$.*

(2) *La métrique de Hodge sur $(f^0)_\star(K_{Z^0/X^0})$ s'étend en une métrique lisse sur $f_\star(Jac_f \otimes K_{Z/X})$.*

5. La construction de métriques

P. A. Griffiths [9, proposition 2.16] a montré que l'opérateur $\overline{\nabla}^p \;:\; \mathbf{E}^p \to \Omega^1_B \otimes \mathbf{E}^{p-1}$ qui intervient dans la formule de courbure (3) s'exprime à l'aide du produit d'intersection avec la classe de Kodaira-Spencer de la famille $f \;:\; Y \to B$ dans $\Omega^1_{B,b} \otimes H^1(Y_b, TY_b)$ avec un accouplement naturel. L'idée première pour la démonstration du théorème 2 est que l'amplitude du fibré E se traduit par la mobilité des diviseurs D_s des sections de $\mathcal{O}_E(k)$. Comme leur déplacement infinitésimal est relié à la précédente classe de Kodaira-Spencer [11, chapter 5.2 (c)], on peut s'attendre à ce que la courbure ait un signe défini.

La mise en œuvre de cette idée nécessite la construction de plusieurs revêtements cycliques et de plusieurs métriques associées sur $(S^{i-r}E \otimes \det E)^\star$. Pour toute $(1,0)$-forme u, on note $|u|^2$

la quantité $\sqrt{-1}u \wedge \overline{u}$. La formule de Legendre pour la métrique $h = \sum_{\alpha=1}^{\ell} h_\alpha$ sur $(S^{i-r}E \otimes \det E)^\star$ obtenue par addition de plusieurs métriques déduites des revêtements Y_{s_α} s'écrit :

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log(\sum_\alpha \|\xi\|^2_{h_\alpha}) &= \frac{\sum_\alpha \|\xi\|^2_{h_\alpha}\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log\|\xi\|^2_{h_\alpha}}{\sum_\alpha \|\xi\|^2_{h_\alpha}} \\ &\quad + \frac{\sum_{\alpha<\beta}\left|\partial\log\|\xi\|^2_{h_\alpha} - \partial\log\|\xi\|^2_{h_\beta}\right|^2 \|\xi\|^2_{h_\alpha}\|\xi\|^2_{h_\beta}}{(\sum_\alpha \|\xi\|^2_{h_\alpha})^2}.\end{aligned}$$

C'est cette formule qui motive la préférence de étude de fibrés semi-négatifs. En choisissant l'entier k suffisamment grand pour que les applications

$$H^0\big(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_E(k)\big) \quad\to\quad H^0\big(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_E(k)\otimes\pi^\star(\mathcal{O}_X/\mathcal{M}_x^2)\big)$$

soient surjectives en tout point x de X, on peut assurer par la formule

$$\partial\|e_I^\star\otimes e_1^\star\wedge e_2^\star\wedge\cdots\wedge e_r^\star\|^2_{h_s} \quad=\quad \pi_\star\left(\frac{|\langle e_I, a^{\star i-r}\rangle|^2|a_1|^{2r}|\sigma|^{\frac{2i}{k}-1}}{\|a^\star\|^{4i}_{g^\star}}\partial\sigma\wedge\Omega^{r-1}\right).$$

la positivité de la courbure de la métrique somme sur toutes les directions. Comme la métrique ainsi obtenue n'est que continue, on utilise un procédé de régularisation de métriques sur les fibrés vectoriels hermitiens continus, par convolution et transport parallèle comme dans [15], pour obtenir des métriques lisses sans perdre la stricte positivité de la courbure.

RÉFÉRENCES

[1] Berndtsson, Bo. *Curvature of vector bundles and subharmonicity of Bergman kernels*, Preprint 2005.

[2] Brunella, Marco, *Subharmonic variation of the leafwise Poincaré metric.* Invent. Math. 152 (2003), no. 1, 119–148.

[3] Campana, Frédéric and Flenner, Hubert, *A characterization of ample vector bundles on a curve* Math. Ann. 287 (1990), no. 4, 571–575.

[4] Demailly, Jean-Pierre et Skoda, Henri, *Relations entre les notions de positivité de P. A. Griffiths et de S. Nakano*, Séminaire P. Lelong et H. Skoda, année 1978-79, Lecture notes in Math. 822 (1980) 304-309.

[5] Esnault, Hélène and Viehweg, Eckart, *Lectures on vanishing theorems*, DMV Seminar 20,Birkhäuser Verlag,Basel, (1992).

[6] Fulton, William, *On the topology of algebraic varieties*, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math., 46, 15–46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1987).

[7] Fujita, Takao, *On Kähler fiber spaces over curves*, J. Math. Soc. Japan, 30, (1978), 4, 779–794.

[8] Griffiths, Phillip A., *Hermitian differential geometry, Chern classes, and positive vector bundles*. Global Analysis, Papers in Honor of K. Kodaira (Ed. D. C. Spencer and S. Iyanaga), 185–251. Princeton Univ. Press, 1969.

[9] Griffiths, Phillip A., *Periods of integrals on algebraic manifolds. III. Some global differential-geometric properties of the period mapping*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 38, (1970), 125–180.

[10] Hartshorne, Robin, *Ample vector bundles*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 29, (1966), 63–94.

[11] Kodaira, Kunihiko, *Complex manifolds and deformation of complex structures*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, [Fundamental Principles of Mathematical Sciences] 283, Springer-Verlag, New York, (1986).

[12] Kollár, János *Higher direct images of dualizing sheaves. I.* Ann. of Math. (2) 123 (1986), no. 1, 11–42. *Higher direct images of dualizing sheaves. II*, Ann. of Math. (2), 124, (1986), 1, 171–202.

[13] Lazarsfeld, Robert, *Positivity in algebraic geometry. II*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics , 49, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[14] Migliorini, Luca, *A smooth family of minimal surfaces of general type over a curve of genus at most one is trivial*, J. Algebraic Geom., Journal of Algebraic Geometry, 4, (1995), 2, 353–361.

[15] Mourougane, Christophe, *Images directes de fibrés en droites adjoints*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto University., 33, (1997), 6, 893–916.

[16] Ramanujam, C. P., *Remarks on the Kodaira vanishing theorem*, J. Indian Math. Soc. (N.S.), 36, 1972, 41–51.

[17] Umemura, Hiroshi : *Some results in the theory of vector bundles*. Nagoya Math. Jour. **52** (1973), 97–128.

[18] Voisin, Claire, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*. Cours Spécialisés 10. Société Mathématique de France, Paris, 2002.

Christophe Mourougane / Institut de Mathématiques de Jussieu / Plateau 7D /
175, rue du Chevaleret / 75013 Paris / France.
email : mourouga@math.jussieu.fr