Exercices sur les feuilletages

Exercice 1. (*Intersection de courbes*)

a) Soit p et q deux nombres entiers naturels différents. Calculer le nombre d'intersection en $(0,0)$ des courbes d'équation $x = y$ et $x^p = y^q$.
b) Que se passe-t-il quand $p = q$?

Exercice 2. (*Germe de courbe*)

a) Dans le plan complexe $\mathbb{C}^2$, calculer le nombre d'intersection en $(0,0)$ de la courbe d'équation $(y^2 = x^3 + x^2)$ et, cas par cas, de la curbe d'équation
   i) $(x = 0)$
   ii) $(y = 0)$
   iii) $(x = y)$
   iv) $(x = -y)$
b) En déduire l'allure de la courbe d'équation $(y^2 = x^3 + x^2)$ au voisinage du point $(0,0)$.

Exercice 3. (*Fibration*)

On note $[X_1 : Y : 1][X_2 : Y_2]$ les coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. On considère dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ le feuilletage $\mathcal{F}$ holomorphe en courbes complexes donné par les fibres de la projection p_1 sur le premier facteur $\mathbb{P}^1$.

a) Déterminer le fibré normal et le fibré tangent à $\mathcal{F}$.
b) Vérifier la formule d'auto-intersection du fibré normal.
c) Calculer le nombre de tangence de $\mathcal{F}$ avec la courbe d'équation $X_2 = 0$ en déterminant explicitement les points de tangence et leur ordre.
d) Calculer le nombre de tangence de $\mathcal{F}$ avec la courbe C_2 d'équation $X_2^2 Y_1 = X_1 Y_2^2$ en déterminant explicitement les points de tangence et leur ordre.
e) Pour les courbes C_1 et C_2, vérifier la formule du degré de $T\mathcal{F}$.
f) Vérifier la formule du degré de $T\mathcal{F}$ sur la courbe d'équation $X_1 = 0$.

Exercice 4. (*Classes de Chern*)

On notera ζ la première classe de Chern du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$ tautologique quotient sur l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^3$. On rappelle la suite d'Euler sur l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^3$.

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)^{\oplus 4} \to T\mathbb{P}^3 \to 0$$

a) Déterminer le fibré canonique $K_{\mathbb{P}^3} = (\det T\mathbb{P}^3)^\vee$ de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^3$.
b) Déterminer les classes de Chern $c_1(\mathbb{P}^3)$ et $c_2(\mathbb{P}^3)$ du fibré tangent de $\mathbb{P}^4$.
c) Soit X une hypersurface de $\mathbb{P}^3$ de degré 4. Expliquer l'origine de la suite exacte

$$0 \to TX \to T\mathbb{P}^4_{|X} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)_{|X} \to 0$$

d) En déduire le fibré canonique de X et les classes de Chern de son fibré tangent.
e) Quelle est la nature de l'espace X (lissité, dimension, signe du fibré canonique, classification) ? On admettra que X est, comme $\mathbb{P}^3$, simplement connexe (Théorème de Lefschetz).

f) Calculer la signature

$$\sigma(X) = \frac{1}{3}\left(c_1^2(X) - 2c_2(X)\right).$$

Exercice 5. (*Classes de Chern*)

On notera ζ la première classe de Chern du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)$ tautologique quotient sur l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^4$. On rappelle la suite d'Euler sur l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^4$.

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)^{\oplus 5} \to T\mathbb{P}^4 \to 0$$

a) Déterminer le fibré canonique $K_{\mathbb{P}^4}$ de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^4$.
b) Déterminer les classes de Chern $c_1(\mathbb{P}^4)$ et $c_2(\mathbb{P}^4)$ du fibré tangent de $\mathbb{P}^4$.
c) Soit X une intersection partout transverse d'une hypersurface H_2 de $\mathbb{P}^4$ de degré 2 et d'une autre H_3 de degré 3. Expliquer l'origine de la suite exacte

$$0 \to TX \to T\mathbb{P}^4_{|X} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(3)_{|X} \to 0$$

d) Quelle est la nature de l'espace X ? On admettra que X est, comme $\mathbb{P}^4$ et H_2, simplement connexe (Théorème de Lefschetz).
e) Calculer la signature $\sigma(X) = \frac{1}{3}\left(c_1^2(X) - 2c_2(X)\right)$.