Feuille de TD 5 : Courbes algébriques planes

Exercice 1. (*Composantes*)

a) Soit k un corps. Soit I un idéal de $k[X,Y]$. Rappeler la définition d'un idéal premier minimal de I.

b) Dans $\mathbb{C}[X,Y]$ montrer que $I =< X^2, XY >$ admet pour décompositions primaires minimales

$$I =< X > \cap < Y, X^2 >=< X > \cap < X^2, XY, Y^2 > .$$

c) En déduire les composantes irréductibles et les composantes plongées de $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/I)$.

Exercice 2. (*Multiplicités d'intersection*)

Soit k un corps. Soit $F = Y$ et $G = Y^4 - X^4 - X^5$ deux polynômes de $k[X,Y]$. Calculer la multiplicité d'intersection des courbes d'équation $F = 0$ et $G = 0$ en l'origine O.

Exercice 3. (*Intersection de courbes algébriques*)

a) Soit $(x,y) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que $x^3 - y^2 = 0$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{C}$ tel que $x = t^2$ et $y = t^3$.

b) En déduire les points d'intersection des courbes algébriques C_1 d'équation $X^3 - Y^2 = 0$ et C_2 d'équation $2X^2 + XY^2 + 1 = 0$.

c) Déterminer les points d'intersection des courbes algébriques C_1 d'équation $X^3 - Y^2 = 0$ et C_3 d'équation $X^5 + Y^5 = 0$.

d) Existe-il un couple $(U,V) \in \mathbb{C}[X,Y]$ tel que

$$U(X,Y)(X^3 - Y^2) + V(X,Y)(2X^2 + XY^2 + 1) = 1$$

e) Existe-il un triplet $(U,V,W) \in \mathbb{C}[X,Y]$ tel que

$$U(X,Y)(X^3 - Y^2) + V(X,Y)(X^5 + Y^5) + W(X,Y)(2X^2 + XY^2 + 1) = 1$$

Exercice 4. (*Condition d'intersection régulière*)

Soit P et Q deux polynômes de l'anneau factoriel $\mathbb{C}[X,Y]$ sans facteurs communs.

a) Montrer qu'il existe un polynôme non nul D de $\mathbb{C}[X]$ et des polynômes U, V de $\mathbb{C}[X,Y]$ tels que $D(X) = U(X,Y)P(X,Y) + V(X,Y)Q(X,Y)$. *On pourra travailler dans l'anneau* $\mathbb{C}(X)[Y]$.

b) En déduire que l'ensemble $V_m(P,Q) := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2, P(x,y) = Q(x,y) = 0\}$ est un ensemble fini.