Feuille de TD 1 : Anneaux et algèbres

Plusieurs exercices de cette feuille sont inspirés du livre de Daniel Perrin (Cours d'Algèbre), du livre de Brendan Hassett (Algebraic Geometry) et du poly de Bernard Le Stum.

Tous les anneaux considérés seront commutatifs et unitaires.

R-algèbres et polynômes.

Exercice 1. (*Polynômes*)

a) Donner l'exemple d'un anneau R et de deux polynômes P et Q de $R[X]$ tels que $\deg(PQ) < \deg P + \deg Q$.
b) Donner l'exemple d'un corps K et d'un polynôme $P \in K[X]$ non nul et tel que pour tout $r \in K$, $P(r) = 0$.
c) Soit K un corps et $f \in K[X, Y]$. On suppose qu'il existe deux parties infinies S_1 et S_2 de K telles que f s'annule pour tous les (x, y) de $S_1 \times S_2$. Montrer que f est nul.

Idéaux premiers, idéal maximaux.

Exercice 2. (*Élements et idéaux particuliers*)

a) Rappeler les définitions dans un anneau intègre d'irréductibilité d'un élément, d'association de deux éléments, de primalité et de maximalité d'un idéal.
b) Soit A un anneau intègre et p un élément non nul tel que (p) est premier. Montrer que p est irréductible.
c) Soit A un anneau intègre et p un élément irréductible. Montrer que (p) est maximal parmi les idéaux principaux.

Exercice 3. (*Opérations sur les idéaux*)

Soit R un anneau principal. Soit $I = aR$ et $J = bR$ deux idéaux de l'anneau R (avec a, b deux éléments de R. Expliciter un générateur de $I + J$, IJ, $I \cap J$, et $(I : J)$.

Exercice 4. (*Images réciproques d'idéaux*)

a) L'image d'un idéal par un morphisme d'anneau est-elle un idéal ? et si le morphisme est surjectif ?
b) Montrer que l'image réciproque d'un idéal premier par un morphisme d'anneaux est un idéal premier.
c) L'image réciproque d'un idéal maximal par un morphisme d'anneaux est-elle un idéal maximal ?

Exercice 5. (*Idéaux maximaux*)

a) Décrire les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$, de $k[X]$ (k est un corps) et d'un anneau principal A.
b) Montrer que les idéaux de la forme (p, f) où p est un nombre premier et f un polynôme unitaire irréductible modulo p sont maximaux dans $\mathbb{Z}[X]$.
c) Soit k un corps et $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in k^n$. Montrer à l'aide de l'application d'évaluation en $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ que l'idéal $(X_1 - a_1, X_2 - a_2, \cdots, X_n - a_n)$ de $k[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ est maximal.

Exercice 6. (*Idéaux primaires*)

Soit k un corps.

a) L'idéal $I = (x^2, y^2)$ de $k[x, y]$ est-il premier ?
b) Montrer que si le radical $r(J)$ d'un idéal J est maximal dans un anneau A, alors J est primaire. *On pourra prendre a et b dans A tels que $ab \in J$ et $b \notin r(J)$.*
c) Calculer le radical de $I = (x^2, y^2)$ et montrer que I est un idéal primaire de $k[x, y]$.

Exercice 7. (*Restriction d'idéaux*)

Soit k un corps. On note $k[y, z]$ la sous algèbre de $k[x, y, z]$ engendrée par y et z.
Soit I l'idéal de $k[x, y, z]$ engendré par (x^2y, xz^2, y^2z, yz^2). Déterminer un système de générateurs de $I \cap k[y, z]$, vu comme idéal de $k[y, z]$.

Localisation.

Exercice 8. (*Partie multiplicative et localisation*)

On rappelle qu'une partie d'un anneau est dite *multiplicative*, si elle contient 1 et si elle est stable par multiplication.

a) Montrer que l'image et l'image réciproque d'une partie multiplicative par un morphisme d'anneaux est une partie multiplicative.
b) Montrer que si I est un idéal de l'anneau A, $1 + I$ est une partie multiplicative de A.
c) À quelle condition sur A le sous-ensemble des éléments non-nuls est-il une partie multiplicative ? Quelle est alors la localisation d'un tel anneau par rapport à la partie multiplicative des éléments non nuls ?
d) Montrer que le localisé $S^{-1}A$ de l'anneau A par rapport à la partie multiplicative S est $\{[(0_A, 1_A)]\}$ si et seulement si 0_A appartient à S.
e) Montrer que les éléments de $S^{-1}A$ s'écrivent sous la forme $\frac{a}{s} := \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$ avec $(a, s) \in A \times S$ et l'application $\varphi : A \to S^{-1}A$, $a \mapsto [(a, 1)]$.
f) Montrer que si A est intègre et S une partie multiplicative de A qui ne contient pas 0, alors $S^{-1}A$ s'injecte dans le corps des fractions de A et l'application $\varphi : A \to S^{-1}A$, $a \mapsto [(a, 1)]$ de A dans le localisé $S^{-1}A$ est injective.
g) Montrer que les idéaux premiers de $S^{-1}A$ sont exactement les $S^{-1}P$, pour P idéal premier de A ne rencontrant pas S.

Exercice 9. (*Anneaux locaux*)

a) On rappelle que si A est un anneau et I un idéal propre, puisque l'ensemble des idéaux propres de A contenant I est inductif (i.e. toute famille totalement ordonnée admet un élément maximal), il existe par le lemme de Zorn un idéal maximal contenant I. Montrer qu'un élément de A est inversible si et seulement si il n'appartient à aucun idéal maximal.
b) Montrer que A admet un unique idéal maximal si et seulement si $A - A^\times$ est un idéal de A. (On dit alors que A est *local*. L'unique idéal maximal est alors $M = A - A^\times$.)
c) Pour quels entiers naturels n, l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il local ?

Exercice 10. (*Localisation par rapport à un idéal premier*)

Soit A un anneau intègre.

a) Montrer que si P est un idéal premier de l'anneau A, alors $S := A - P$ est une partie multiplicative de A.
b) Montrer que les éléments de S sont inversibles dans le localisé $S^{-1}A$ et que l'image de P dans le localisé $S^{-1}A$ engendre l'unique idéal maximal M.
c) Montrer le corps résiduel $S^{-1}A/M$ est le corps des fractions de A/P.
d) Soit $u : A \to B$ un morphisme d'anneaux et Q un idéal premier de B. Montrer que $P = u^{-1}(Q)$ est un idéal premier de A et que u se prolonge de manière unique en un morphisme d'anneaux locaux $u_P : A_P \to B_Q$.

Exercice 11. (*Localisation par rapport à une famille de puissances*)

a) Montrer que si s est un élément non nilpotent d'un anneau A, alors l'ensemble S des puissances de s est une partie multiplicative de A qui ne contient pas 0. On notera $A_s := S^{-1}A$. Montrer alors que le morphisme de A-algèbres $A[X] \to A_s$, $P \mapsto P(1/s)$ induit un isomorphisme de $A[X]/(sX-1)$ sur A_s.
b) Décrire la localisation $\mathbb{Z}_{10}$ de $\mathbb{Z}$ par rapport à la partie multiplicative des puissances de 10 ?
c) Avec les notations de la première question, l'anneau localisé A_s est-il local ?

Exercice 12. (*Hérédité par localisation]*)

a) Montrer que le localisé $S^{-1}A$ d'un anneau principal A par rapport à une partie multiplicative S reste principal.
b) En déduire que $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$ est principal.
c) Montrer que le localisé $S^{-1}A$ d'un anneau factoriel par rapport à une partie multiplicative S reste factoriel. On montrera que les éléments premiers de $S^{-1}A$ sont les éléments premiers p de A tels que $(p) \cap S = \varnothing$.

Exercice 13. (*Localisation explicite*)

Soit n et s deux entiers naturels non nuls. On note S la partie multiplicative des puissances de la classe $[s]_n$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Déterminer le morphisme de localisation $\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to S^{-1}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ dans les trois situations suivantes :

a) n et s sont premiers entre eux.
b) tous les diviseurs premiers de n divisent s.
c) n et s sont deux entiers naturels non nuls quelconques. On écrit $n = ab$ où les nombres premiers qui apparaissent dans les décompositions de n et de s sont exactement ceux qui apparaissent dans celle de a avec la même multiplicité que dans celle de n.

Anneaux principaux, factoriels.

Exercice 14. (*Irréductibles dans un anneau factoriel*)

Soit A un anneau factoriel. Montrer qu'un élément p de A est irréductible si et seulement si l'idéal (p) est premier non nul.

Exercice 15. (*Exemple d'anneaux*)

Soit K un corps. On rappelle que si A est un anneau commutatif noethérien, alors $A[X]$ est aussi noethérien (Théorème de la base de Hilbert).

a) Soit I un idéal de $K[X,Y]$. Montrer que l'anneau $K[X,Y]/I$ est noethérien.
b) L'anneau $K[X,Y]/(XY)$ est-il factoriel ?
c) L'anneau $K[X,Y]/(Y^3-X^2)$ est-il factoriel ? *On pourra montrer que $[Y]$ est irréductible et non premier.*
d) L'anneau $K[X,Y]/(Y-X^2)$ est-il factoriel ? *On pourra considérer le morphisme d'algèbres $K[X,Y] \to K[T], X \mapsto T, Y \mapsto T^2$.*
e) L'anneau $K[X,Y]/(XY-1)$ est-il factoriel ?

Exercice 16. (*Condition de régularité*)

Soit P et Q deux polynômes de l'anneau factoriel $\mathbb{C}[X,Y]$ sans facteurs communs.

a) Montrer qu'il existe un polynôme non nul D de $\mathbb{C}[X]$ et des polynômes U, V de $\mathbb{C}[X,Y]$ tels que $D = UP + VQ$. *On pourra travailler dans l'anneau $\mathbb{C}(X)[Y]$.*

b) En déduire que l'ensemble $V(P,Q) := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2, P(x,y) = Q(x,y) = 0\}$ est un ensemble fini.

Exercice 17. (*Caractérisation des anneaux principaux*)

a) Montrer qu'un anneau principal est noethérien.
b) Montrer qu'un anneau noethérien vérifie l'existence de la décomposition en produit d'irréductibles. *On pourra raisonner par l'absurde et considérer l'ensemble des idéaux* (x) *engendrés par les éléments qui n'admettent pas d'écriture en produits d'irréductibles.*
c) Soit A un anneau intègre avec l'existence de la décomposition en produit d'irréductibles. Supposons de plus que pour tout élément irréductible p, l'idéal (p) est premier. Montrer qu'il y a alors unicité dans la décomposition en produit d'irréductibles à association et ordre près. *On pourra raisonner par récurrence sur la longueur des décompositions et considérer un anneau quotient.*
d) Montrer qu'un anneau principal est factoriel et que tout idéal premier non nul et strict y est maximal.

Exercice 18. (*Caractérisation des anneaux principaux*)

On admet qu'un anneau intègre dont tous les idéaux premiers sont principaux est principal. Montrer qu'un anneau factoriel, dont chaque idéal premier non nul est maximal, est un anneau principal. *On pourra prendre un idéal premier* I*, un élément non nul* x *de* I *et montrer l'existence d'un facteur irréductible* p *de* x *qui engendre* I*.*

Anneaux intégralement clos.

Exercice 19. (*Anneaux intégralement clos*)

Soit A un sous-anneau d'un anneau B. On dit qu'un élément b de B est *entier* sur A s'il est solution d'une équation polynômiale unitaire à coefficients dans A. On dit qu'un anneau intègre A est *intégralement clos* si tout élément x de son corps des fractions K entier sur A est en fait dans A.

a) Montrer que tout élément non nul du corps des fractions d'un anneau factoriel A s'écrit comme quotient x/y d'éléments de A sans facteurs communs. Montrer que cette écriture est unique à association près.
b) Montrer qu'un anneau factoriel est intégralement clos.
c) Construire un morphisme d'algèbre injectif de $A := \mathbb{C}[X,Y]/(Y^3 - X^2)$ dans $\mathbb{C}[T]$. En déduire que le corps des fractions de A est isomorphe à $\mathbb{C}(T)$. En utilisant l'image de T dans le corps des fractions de A, montrer que A n'est pas intégralement clos.

Radicaux.

Exercice 20. (*Radicaux*)

Soit A un anneau et I un idéal de A.

a) Rappeler la définition du radical $\sqrt{I}$ de I.
b) Montrer que le radical $\sqrt{I}$ d'un idéal I de A est un idéal de A contenant I.
c) Donner l'exemple d'un anneau A et d'un idéal I tel que $\sqrt{I} \neq I$.
d) Montrer que si A est noethérien alors une puissance du radical de I est incluse dans I.

Exercice 21. (*radical*)

Soit A un anneau (commutatif, unitaire).

a) Soit $a \in A$ hors de $\sqrt{(0)}$. Montrer en utilisant le lemme de Zorn qu'il existe un idéal premier qui ne contient pas la partie multiplicative S des puissances de a.
b) Montrer que $\sqrt{(0)}$ est l'intersection de tous les idéaux premiers de A : on l'appelle le nilradical de A.