Contrôle continu 3 (1 heure 15)

Exercice 1 (Idéaux particuliers, 1+1+1.5+1.5)

Soit k un corps. Justifier toutes vos réponses.

1 Donner l'exemple d'un idéal maximal de $k[X,Y]$.

2 Donner l'exemple d'un idéal premier non maximal de $k[X,Y]$.

3 Donner l'exemple d'un idéal primaire non premier de $k[X,Y]$.

4 Donner l'exemple d'un idéal radiciel non primaire de $k[X,Y]$.

Exercice 2 (Ensembles algébriques, 1+1.5+1.5)

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. Soit k un corps algébriquement clos et $\mathbb{A}^n(k)$ l'espace affine algébrique de dimension n sur k. Dans les deux dernières questions, on identifiera l'ensemble $M_n(k)$ des matrices carrées de taille n à coefficients dans k à l'espace affine algébrique $A^{n^2}(k)$ en associant à une matrice A le n^2-uplet (a_{ij}) de ses coefficients.

1 Rappeler sans démonstration les deux applications réciproques entre l'ensemble des fermés de Zariski de $\mathbb{A}^n(k)$ et l'ensemble des idéaux radiciels de $k[X_1,\cdots,X_n]$. Quels idéaux donnent par cette correspondance les fermés irréductibles ?

2 Le sous-ensemble D^n de $A^{n^2}(k)$ des matrices diagonales est-il un fermé de Zariski de $A^{n^2}(k)$. Est-il irréductible ?

3 Le sous-ensemble S^n de $A^{n^2}(k)$ des matrices diagonales non inversibles est-il un fermé de Zariski de $A^{n^2}(k)$. Est-il irréductible ?

Exercice 3 (Applications entre schémas, 1+1+1+2+2)

Soit k un corps algébriquement clos, $A := k[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ l'algèbre des polynômes en n indéterminées à coefficients dans k et I un idéal de A.

1 Rappeler sans démonstration la construction de l'application $F : \mathrm{Spec}(A/I) \to \mathrm{Spec}(A)$ associée à la projection d'anneaux $f : A \to A/I$.

2 Montrer que F est continue.

3 Montrer que pour tout idéal π de A, $f^{-1}(f(\pi)) = \pi + I$.

4 Montrer que l'image de F est un fermé de $\mathrm{Spec}(A)$.

5 Montrer que F est un homéomorphisme sur son image.

Exercice 4 (Composantes, 1+3+1)

1 Soit k un corps. Soit I un idéal de $k[X,Y]$. Rappeler la définition d'un idéal premier minimal de I.

2 Dans $\mathbb{C}[X,Y]$ montrer que $I =< X^2, XY >$ admet pour décomposition primaire minimale

$$I =< X > \cap < X^2, XY, Y^2 > .$$

3 En déduire les composantes irréductibles et les composantes plongées de $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/I)$.

Exercice 5 (Multiplicités d'intersection, 2)

Soit k un corps. Soit $F = Y$ et $G = Y^4 - X^4 - X^5$ deux polynômes de $k[X,Y]$. Calculer la multiplicité d'intersection des courbes d'équation $F = 0$ et $G = 0$ en l'origine O.