Contrôle continu 3 (1 heure 30), corrigé

Exercice 1 (Idéaux particuliers, 1+1+1.5+1.5)

Soit k un corps. Justifier toutes vos réponses.

1 Donner l'exemple d'un idéal maximal de $k[X, Y]$.

Solution : L'anneau quotient de $k[X, Y]$ par (X, Y) est isomorphe au corps k : par conséquent, (X, Y) est un idéal maximal (correspondant à un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{A}^2(k)$ minimal).

2 Donner l'exemple d'un idéal premier non maximal de $k[X, Y]$.

Solution : L'anneau quotient de $k[X, Y]$ par (X) est isomorphe à l'anneau intègre $k[Y]$ qui n'est pas un corps : par conséquent, (X) est un idéal premier qui n'est pas maximal (correspondant à un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{A}^2(k)$ irréductible réduit mais non minimal).

3 Donner l'exemple d'un idéal primaire non premier de $k[X, Y]$.

Solution : Considérons l'idéal (X^2) correspondant à la droite double des ordonnées (irréductible, mais non réduite).Soit $PQ \in (X^2)$. Comme $k[X, Y]$ est factoriel, si P n'appartient pas à (X^2), Q appartient à (X) et donc la puissance Q^2 appartient à (X^2). Par conséquent, (X^2) est primaire. Comme X (et X) n'appartient pas à (X^2) mais $X \times X$ appartient à (X^2), l'idéal (X^2) n'est pas premier.

4 Donner l'exemple d'un idéal radiciel non primaire de $k[X, Y]$.

Solution : Considérons l'idéal (XY) correspondant à la réunion de la droite des ordonnées et de la droite des abscisses (réductible, mais réduite). Soit $P \in [X, Y]$ tel que P^k appartient à (XY). Par factorialité de $k[X, Y]$, les irréductibles X et Y non associés apparaissent dans la décomposition en produits d'irréductibles de P^k donc de P. Donc, P appartient à (XY) et (XY) est radiciel. Pour un idéal radiciel, primaire équivaut à premier : ici, (XY) n'est donc pas primaire.

Exercice 2 (Ensembles algébriques, 1+1.5+1.5)

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. Soit k un corps algébriquement clos et $\mathbb{A}^n(k)$ l'espace affine algébrique de dimension n sur k. Dans les deux dernières questions, on identifiera l'ensemble $M_n(k)$ des matrices carrées de taille n à coefficients dans k à l'espace affine algébrique $A^{n^2}(k)$ en associant à une matrice A le n^2-uplet (a_{ij}) de ses coefficients.

1 Rappeler sans démonstration les deux applications réciproques entre l'ensemble des fermés de Zariski de $\mathbb{A}^n(k)$ et l'ensemble des idéaux radiciels de $k[X_1, \cdots, X_n]$. Quels idéaux donnent par cette correspondance les fermés irréductibles ?

Solution : À tout fermé de Zariski F de $\mathbb{A}^n(k)$ on associe l'idéal de $k[X_1, \cdots, X_n]$ des polynômes nuls sur F. C'est un idéal égal à son radical (i.e. radiciel). Réciproquement, à tout idéal radiciel I de $k[X_1, \cdots, X_n]$, on associe le lieu $V(I)$ des points d'annulation de tous les polynômes de I. C'est un fermé de Zariski de $\mathbb{A}^n(k)$. Les fermés irréductibles correspondent aux idéaux radiciels premiers.

2 Le sous-ensemble D^n de $A^{n^2}(k)$ des matrices diagonales est-il un fermé de Zariski de $A^{n^2}(k)$. Est-il irréductible ?

Solution : Le sous-ensemble D^n est défini par les équations polynômiales

$$\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j, \;\; a_{ij} = 0.$$

Comme D^n est défini par l'idéal J engendré par les a_{ij} avec $i \neq j$, et comme $k[a_{ij}]/J$ est isomorphe à l'algèbre intègre des polynômes en les n indéterminées (a_{ii}), J est radiciel et premier, et D^n est un fermé de Zariski irréductible.

3 Le sous-ensemble S^n de $A^{n^2}(k)$ des matrices diagonales non inversibles est-il un fermé de Zariski de $A^{n^2}(k)$. Est-il irréductible ?

Solution : Le sous-ensemble S^n est défini par les équations polynômiales

$$\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j, \quad a_{ij} = 0 \text{ et } \det A = \prod_i a_{ii} = 0.$$

C'est donc un fermé de Zariski. Mais l'idéal $I(S)$ qui ne contient aucun a_{ii} et qui contient leur produit n'est pas premier. La variété S^n est donc réductible.

Exercice 3 (Applications entre schémas, 1+1+1+2+2)

Soit k un corps algébriquement clos, $A := k[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ l'algèbre des polynômes en n indéterminées à coefficients dans k et I un idéal de A.

1 Rappeler la construction de l'application $F : \mathrm{Spec}(A/I) \to \mathrm{Spec}(A)$ associée à la projection d'anneaux $f : A \to A/I$.

Solution : À tout idéal P premier de A/I on associe le point $F(P)$ de $\mathrm{Spec}\, A$ qui correspond à l'idéal premier $f^{-1}(P)$ de A.

2 Montrer que F est continue.

Solution : Soit J un idéal de A et $V(J)$ le fermé de $\mathrm{Spec}\, A$ des idéaux premiers de A qui contiennent J. Alors, l'image récirpoque du fermé $V(J)$

$$\begin{aligned} F^{-1}(V(J)) = \{P \in \mathrm{Spec}(A/I), F(P) \in V(J)\} &= \{P \in \mathrm{Spec}(A/I), f^{-1}(P) \supset J\} \\ &= \{P \in \mathrm{Spec}(A/I), P \supset f(J)\} = V((f(J))) \end{aligned}$$

est fermée. Par conséquent F est continue.

3 Montrer que pour tout idéal π de A, $f^{-1}(f(\pi)) = \pi + I$.

Solution : Soit π un idéal de A. Comme $f(I) = \{0\}$, on a $f(\pi + I) \subset f(\pi)$ et donc $\pi + I \subset f^{-1}(f(\pi))$. Réciproquement, soit $a \in f^{-1}(f(\pi))$. Il existe $p \in \pi$ tel que $f(a) = f(p)$. Donc $a - p \in I$ et a appartient à $\pi + I$.

4 Montrer que l'image de F est un fermé de $\mathrm{Spec}(A)$.

Solution : Pour tout idéal premier P de A/I, comme $f^{-1}(P)$ est un idéal premier de A qui contient I : $F(P)$ est donc un point de $V(I)$. Donc $Image(F) \subset V(I)$. Réciproquement, soit Π un élément de $V(I)$: c'est un idéal premier de A qui contient I. Par la question précédente, $f^{-1}(f(\Pi)) = \Pi + I = \Pi$. De plus $P := f(\Pi)$ est un idéal car f est surjective. Si $[ab] \in P$ alors ab appartient à $f^{-1}(P) = \Pi$ premier. Par conséquent, a ou b est dans Π et $[a]$ ou $[b]$ est dans $f(\Pi) = P$. Donc P est un élément de $\mathrm{Spec}(A/I)$ et son image par F est Π.

En conclusion, $ImageF = V(I)$.

5 Montrer que F est un homéomorphisme sur son image.

Solution : Soit $\varphi : V(I) \to \mathrm{Spec}(A/I)$ qui à tout idéal premier Π de A contenant I associe $f(\Pi)$. On a vérifié que $f(\Pi)$ est un idéal premier de A/I et que $F(f(\Pi)) = \Pi$. Donc φ est bien définie et réciproque de F. Reste à montrer que φ est continue. Soit Γ un idéal de A/I associé à l'idéal $\gamma = f^{-1}(\Gamma)$ de A contenant I. Alors,

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(V(\Gamma)) = \{\Pi \in V(I), f(\Pi) \supset \Gamma\} &= \{\Pi \in V(I), \Pi + I \supset \gamma\} \\ &= \{\Pi \in V(I), \Pi \supset \gamma\} = V(\gamma) \cap V(I) \end{aligned}$$

est fermé de $V(I)$ et φ est donc continue.

Exercice 4 (Composantes, 1+3+1)

1 Soit k un corps. Soit I un idéal de $k[X,Y]$. Rappeler la définition d'un idéal premier minimal de I.

Solution : Un idéal premier minimal P de I est un idéal premier qui contient I mais qui ne contient strictement aucun idéal premier contenant I. On a montré qu'un tel idéal apparaît comme radical dans toute décomposition primaire minimale de I (i.e. qu'il est associé à I).

2 Dans $\mathbb{C}[X,Y]$ montrer que $I = (X^2, XY)$ admet pour décomposition primaire minimale

$$I = (X) \cap (X^2, XY, Y^2).$$

Solution : Comme $I \subset (X)$ et $I \subset (X^2, XY, Y^2)$, on a $I \subset (X) \cap (X^2, XY, Y^2)$. Réciproquement, soit $P \in (X) \cap (X^2, XY, Y^2)$. Il existe $A, B, C \in \mathbb{C}[X,Y]$ tels que $P = AX^2 + BXY + CY^2$. Puisque $CY^2 = P - AX^2 - BXY$ est, comme P, dans (X) et que X est premier avec Y^2, le lemme de Gauss dans l'anneau factoriel $\mathbb{C}[X,Y]$ donne que X divise C et donc XY divise CY^2. Par suite $P = AX^2 + BXY + CY^2$ est dans I.

L'idéal (X) engendré par un irréductible de $k[X,Y]$ factoriel est premier donc primaire. L'idéal $(X^2, XY, Y^2) = (X,Y)^2$ est un idéal primaire de radical (X,Y) maximal différent de (X). La décomposition est donc bien primaire minimale.

3 En déduire les composantes irréductibles et les composantes plongées de $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/I)$.

Solution : Les idéaux premiers minimaux de I qui correspondent aux composantes irréductibles réduites du schéma affine $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/I)$ sont associés à I. Les radicaux de la décomposition primaire minimale précédente vérifient $(X,Y) \supset (X) = \sqrt{I}$. La seule composante irréductible est donc $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/(X))$. L'idéal (X^2, XY, Y^2) correspond donc à une composante plongée $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/(X^2, XY, Y^2))$ de $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/I)$ de réduction

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/(X,Y)) \subset \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/(X)) \subset \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/\sqrt{I}).$$

Exercice 5 (Multiplicités d'intersection, 2)

Soit k un corps. Soit $F = Y$ et $G = Y^4 - X^4 - X^5$ deux polynômes de $k[X,Y]$. Calculer la multiplicité d'intersection des courbes d'équation $F = 0$ et $G = 0$ en l'origine O.

Solution : On remarque que $(F,G) = (Y, Y^4 - X^4 - X^5) = (Y, X^4(1+X))$ et que $(1+X)$ est inversible dans le localisé de $k[X,Y]$ selon la partie multiplicative complémentaire de l'idéal maximal en l'origine M_0. Par conséquent,

$$Mult(F,G,0) = \dim_k \frac{k[X,Y]_{M_0}}{(F,G)} = \dim_k \frac{k[X]_{M_0}}{X^4(1+X)} = 4.$$