Algèbre commutative et géométrie algébrique

Contrôle continu 2 (1 heure)

Exercice 1 (Radicaux, 1+2+3)

Soit A un anneau et I un idéal de A.

1 Rappeler la définition du radical $\mathrm{Rad}(I)$ de I.

2 Donner l'exemple d'un anneau A et d'un idéal I tel que $\mathrm{Rad}(I) \neq I$.

3 Montrer que si A est noethérien alors une puissance du radical de I est incluse dans I.

Exercice 2 (Adhérence de Zariski, 2+2+2)

1 Soit k un corps algébriquement clos. On a défini l'adhérence de Zariski d'un sous-ensemble E de l'espace affine $\mathbb{A}^n(k)$ comme $\overline{E}^{\text{zar}} := V_m(I(E)) \subset \mathbb{A}^n(k)$, la variété maximale de l'idéal $I(E)$ des polynômes de $k[X_1, \cdots, X_n]$ nuls sur E.

Montrer que $\overline{E}^{\text{zar}}$ est l'intersection de tous les fermés de Zariski de l'espace affine $\mathbb{A}^n(k)$ contenant E.

2 Soit A un anneau et I un idéal de A. Rappeler la définition de l'ensemble $\mathrm{Spec}(A)$, de la variété $V(I)$ et de la topologie de Zariski sur $\mathrm{Spec}(A)$.

3 Soit A un anneau. On munit $\mathrm{Spec}(A)$ de la topologie de Zariski. Soit $\mathcal{E}$ un sous-ensemble de $\mathrm{Spec}\,A$. On définit l'idéal $I(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}$ par $I(\mathcal{E}) := \bigcap_{P\in\mathcal{E}} P \subset A$. Montrer que la variété $V(I(\mathcal{E}))$ de l'idéal $I(\mathcal{E})$ est l'intersection de tous les fermés contenant $\mathcal{E}$.

Exercice 3 (Intersection de courbes algébriques, relations de Bezout 2+2+2+2+2)

On considère les courbes algébriques C_1, C_2, C_3 de $\mathbb{C}^2$ d'équation respective

- $X^3 - Y^2 = 0$ pour C_1,
- $2X^2 + XY^2 + 1 = 0$ pour C_2
- et $X^5 + Y^5 = 0$ pour C_3.

1 Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que (x, y) appartient à C_1 si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{C}$ tel que

$$x = t^2 \text{ et } y = t^3.$$

2 En déduire les points d'intersection des courbes C_1 et C_2.

3 Déduire de la première question, les points d'intersection des courbes C_1 et C_3.

4 Existe-t-il un couple $(U, V) \in \mathbb{C}[X, Y]^2$ tel que

$$U(X, Y)(X^3 - Y^2) + V(X, Y)(2X^2 + XY^2 + 1) = 1$$

5 Existe-t-il un triplet $(U, V, W) \in \mathbb{C}[X, Y]^3$ tel que

$$U(X, Y)(X^3 - Y^2) + V(X, Y)(X^5 + Y^5) + W(X, Y)(2X^2 + XY^2 + 1) = 1$$