Contrôle continu 2 (1 heure)

Exercice 1 (Radicaux, 1+2+3)

Soit A un anneau et I un idéal de A.

1 Rappeler la définition du radical $\mathrm{Rad}(I)$ de I.

2 Donner l'exemple d'un anneau A et d'un idéal I tel que $\mathrm{Rad}(I) \neq I$.

3 Montrer que si A est noethérien alors une puissance du radical de I est incluse dans I.

Solution : Soit A un anneau noethérien, I un idéal de A et $\mathrm{Rad}(I)$ son radical. Soit $(g_1, \ldots, g_N)$ un système de générateurs de $\mathrm{Rad}(I)$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que tous les g_i^k soient dans I. Soit $m \geqslant kN$. La puissance $m$ième de $\mathrm{Rad}(I)$ est engendrée par les puissances $m$ième des éléments x de $\mathrm{Rad}(I)$. Or x s'écrit $x = \sum_i a_i g_i$ avec $a_i \in I$ et donc

$$x^m = \sum_{m_1+m_2+\cdots m_n=m} \binom{m_1, m_2, \cdots m_N}{m} \prod_{i=1}^{N} a_i^{m_i} g_i^{m_i}$$

Comme $m \geqslant kN$, chaque terme a un exposant m_i plus grand que k et appartient donc à I. Donc $(\mathrm{Rad}(I))^m \subset I$.

Exercice 2 (Adhérence de Zariski, 2+2+3)

1 Soit k un corps algébriquement clos. On a défini l'adhérence de Zariski d'un sous-ensemble E de l'espace affine $\mathbb{A}^n(k)$ comme $\overline{E}^{\text{zar}} := V_m(I(E))$, la variété maximale de l'idéal des polynômes de $k[X_1, \cdots, X_n]$ nuls sur E.

Montrer que $\overline{E}^{\text{zar}}$ est l'intersection de tous les fermés de Zariski de l'espace affine $\mathbb{A}^n(k)$ contenant E.

2 Soit A un anneau. Rappeler la définition de l'ensemble $\mathrm{Spec}(A)$ et de sa topologie de Zariski.

3 Soit A un anneau. On munit $\mathrm{Spec}(A)$ de la topologie de Zariski. Soit $\mathcal{E}$ un sous-ensemble de $\mathrm{Spec}\, A$. Montrer que l'adhérence de $\mathcal{E}$ (i.e. l'intersection de tous les fermés contenant $\mathcal{E}$) est $V(I(\mathcal{E}))$ où $I(\mathcal{E})$ est l'idéal de A donné par $I(\mathcal{E}) := \bigcap_{P\in\mathcal{E}} P$ et $V(I(\mathcal{E}))$ la variété de l'idéal $I(\mathcal{E})$.

Solution : Soit A un anneau. Soit $\mathcal{E}$ un sous-ensemble de $\mathrm{Spec}\, A$. D'abord $V(I(\mathcal{E})) = V(\bigcap_{P\in\mathcal{E}} P) = \{R \in \mathrm{Spec}(A), R \supset \bigcap_{P\in\mathcal{E}} P\}$ est un fermé de $\mathrm{Spec}(A)$ contenant $\mathcal{E}$.

Soit I un idéal de A et $F = V(I) = \{R \in \mathrm{Spec}(A), R \supset I\}$ le fermé de $\mathrm{Spec}(A)$ associé. Supposons que F contient $\mathcal{E}$. Les éléments P de $\mathcal{E}$ sont dans $V(I)$, vérifient $P \supset I$ et donc $\bigcap_{P\in\mathcal{E}} P \supset I$. Par conséquent, F contient tous les idéaux premiers de A qui contiennent $\bigcap_{P\in\mathcal{E}} P$ i.e. $F \supset V(I(\mathcal{E}))$ et donc $\overline{\mathcal{E}}^{\text{zar}} \supset V(I(\mathcal{E}))$.

Exercice 3 (Intersection de courbes algébriques, 2+2+2+2+2)

(a) Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que $x^3 - y^2 = 0$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{C}$ tel que $x = t^2$ et $y = t^3$.

Solution : Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Les polynômes $t^2 - x$ et $t^3 - y$ de $\mathbb{C}[t]$ ont une racine commune dans $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ si et seulement si leur résultant s'annule. Or, par division euclidienne de $t^3 - y$ par le polynôme unitaire $t^2 - x$, on calcule

$$\mathrm{Res}_t(t^2 - x, t^3 - y) = \mathrm{Res}_t(t^2 - x, tx - y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x \\ x & -y & 0 \\ 0 & x & -y \end{vmatrix} = y^2 - x^3$$

(b) En déduire les points d'intersection des courbes algébriques C_1 d'équation $X^3 - Y^2 = 0$ et C_2 d'équation $2X^2 + XY^2 + 1 = 0$.

Solution : Soit $(x, y) \in C_1 \cap C_2$. Alors, il existe $t \in \mathbb{C}$ tel que $x = t^2$ et $y = t^3$. De plus, $(x, y) \in C_2$ et donc $0 = 2x^2 + xy^2 + 1 = 2t^4 + t^8 + 1 = (t^4 + 1)^2$ On en déduit que le paramètre t satisfait $t^4 = -1$. Réciproquement, soit w une racine quatrième de -1. Soit $M = (w^2, w^3)$. Par la première question M est sur C_1. De plus $2(w^2)^2 + w^2(w^3)^2 + 1 = (w^4 + 1)^2 = 0$. Donc M est aussi sur C_2.

Les points d'intersection de C_1 et C_2 sont donc les quatre points de la forme $(w^2, w^3) = (w^2, -1/w)$ où w est une racine quatrième de -1.

(c) Déterminer les points d'intersection des courbes algébriques C_1 d'équation $X^3 - Y^2 = 0$ et C_3 d'équation $X^5 + Y^5 = 0$.

Solution : Soit $(x, y) \in C_1 \cap C_3$. Alors, il existe $t \in \mathbb{C}$ tel que $x = t^2$ et $y = t^3$. De plus $0 = t^{10} + t^{15} = t^{10}(1 + t^5)$. Donc $t = 0$ ou $t^5 = -1$.

(d) Existe-il un couple $(U, V) \in \mathbb{C}[X, Y]$ tel que

$$U(X, Y)(X^3 - Y^2) + V(X, Y)(2X^2 + XY^2 + 1) = 1$$

Solution : Pour tout $U \in \mathbb{C}[X, Y]$ et $V \in \mathbb{C}[X, Y]$ le polynôme $U(X, Y)(X^3 - Y^2) + V(X, Y)(2X^2 + XY^2 + 1)$ s'annule en (w^2, w^3) si w est une racine quatrième de -1. Ce n'est par conséquent pas le polynôme constant 1. Il n'existe donc pas de couple $(U, V) \in \mathbb{C}[X, Y]$ tel que $U(X, Y)(X^3 - Y^2) + V(X, Y)(2X^2 + XY^2 + 1) = 1$.

(e) Existe-il un triplet $(U, V, W) \in \mathbb{C}[X, Y]$ tel que

$$U(X, Y)(X^3 - Y^2) + V(X, Y)(X^5 + Y^5) + W(X, Y)(2X^2 + XY^2 + 1) = 1$$

Solution : Comme $t^4 = -1$ et $t^{10}(1 + t^5) = 0$ n'ont pas de racine commune ($t^4 = t^5 = -1$ implique $t = 1$ et donc $t^4 = 1$), la variété de l'idéal $((X^3 - Y^2), (X^5 + Y^5), (2X^2 + XY^2 + 1))$ est vide. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, le théorème Nullstellensatz de Hilbert implique que l'idéal est $\mathbb{C}[X, Y]$ et qu'il contient donc 1.