Contrôle continu 1 (1 heure)

Exercice 1 (Localisation)

Soit n et s deux entiers naturels non nuls. On note S la partie multiplicative des puissances de la classe $[s]_n$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Déterminer le morphisme de localisation $\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to S^{-1}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ dans les trois situations suivantes :

(a) n et s sont premiers entre eux.
(b) tous les diviseurs premiers de n divisent s.
(c) les deux entiers naturels non nuls n et s sont quelconques. On écrit $n = ab$ où les nombres premiers qui apparaissent dans les décompositions de n et de s sont exactement ceux qui apparaissent dans celle de l'entier naturel a avec la même multiplicité que dans celle de n.

Exercice 2 (Idéaux primaires)

Soit k un corps.

(a) En considérant le polynôme $x^2 - y^2$, déterminer si l'idéal $I = (x^2, y^2)$ de $k[x, y]$ est premier.
(b) Montrer que si le radical $r(J)$ d'un idéal J est maximal dans un anneau A, alors J est primaire. *On pourra prendre a et b dans A tels que $ab \in J$ et $b \notin r(J)$.*
(c) Calculer le radical de $I = (x^2, y^2)$ et montrer que I est un idéal primaire de $k[x, y]$.

Exercice 3 (Restriction d'idéaux)

Soit k un corps. On note $k[y, z]$ la sous algèbre de $k[x, y, z]$ engendrée par y et z.
Soit I l'idéal de $k[x, y, z]$ engendré par (x^2y, xz^2, y^2z, yz^2). Déterminer un système de générateurs de $I \cap k[y, z]$ vu comme idéal de $k[y, z]$.