Contrôle continu 1 (CORRIGÉ)

Exercice 1 (Localisation)

Soit n et s deux entiers naturels non nuls. On note S la partie multiplicative des puissances de la classe $[s]_n$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Déterminer le morphisme de localisation $\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to S^{-1}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ dans les trois situations suivantes :

(a) n et s sont premiers entre eux.
(b) tous les diviseurs premiers de n divisent s.
(c) n et s sont deux entiers naturels non nuls quelconques. On écrit $n = ab$ où les nombres premiers qui apparaissent dans les décompositions de n et de s sont exactement ceux qui apparaissent dans celle de l'entier naturel a avec la même multiplicité que dans celle de n.

Solution :

(a) Dans ce cas tous les éléments de S sont inversibles. L'identité de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est donc par propriété universelle une localisation.
(b) Dans ce cas, une des puissances de s est multiple de n. Par conséquent, pour tout $[i]_n$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ il existe $\sigma \in S$ tel que $\sigma[i]_n = [0]_n$. La localisation est donc l'anneau nul.
(c) Notons que le premier cas correspond à $a = 1, b = n$ et le second à $a = n, b = 1$. Montrons que le morphisme de localisation est isomorphe à la projection naturelle $\pi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$. La construction de a montre qu'il existe une puissance de s telle que $s^k b$ soit multiple de n : le morphisme composé $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to S^{-1}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ envoie donc b sur 0 et donne donc un morphisme factorisé $m_1 : \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \to S^{-1}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ qui envoie le générateur $[1]_b$ sur $\varphi([1]_n)$. La construction de b montre que s est premier avec b donc $\pi([s]_n) = [s]_b$ inversible dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$. La propriété universelle de la localisation permet donc de factoriser π par un morphisme $m_2 : S^{-1}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ qui envoie $\varphi([1]_n)$ sur $[1]_b$. L'image du générateur permet de conclure que $m_2 \circ m_1 = Id_{\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}}$ et que $m_2 \circ m_1$ est l'identité sur l'image de φ donc l'identité de $S^{-1}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. On peut donc conclure que $\varphi = m_1 \circ \pi$ est isomorphe à la projection naturelle π.

Exercice 2 (Idéaux primaires)

Soit k un corps.

(a) En considérant le polynôme $x^2 - y^2$, déterminer si l'idéal $I = (x^2, y^2)$ de $k[x, y]$ est premier.
(b) Montrer que si le radical $r(J)$ d'un idéal J est maximal dans un anneau A, alors J est primaire. *On pourra prendre a et b dans A tels que $ab \in J$ et $b \notin r(J)$.*
(c) Calculer le radical de $I = (x^2, y^2)$ et montrer que I est un idéal primaire de $k[x, y]$.

Solution :

(a) L'idéal $I = (x^2, y^2)$ est monomial : l'appartenance de f à I implique que chaque monôme de f est soit multiple de x^2 soit multiple de y^2. En particulier, ni $x - y$, ni $x + y$ ne sont dans I. La factorisation de l'élément de I, $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, montre donc que I n'est pas premier. En fait, le polynôme x^2 lui-même permet d'obtenir la conclusion.

(b) Soit $ab \in J$. Si $b \notin r(J)$ maximal alors $(b, r(J)) = A$ et il existe donc $f \in A$ et $j \in r(J)$ tels que $1 = fb + j$. Donc, en élevant à une puissance N telle que $j^N \in J$, on obtient g dans A tel que $1 = gb + j^N$, puis $a = abg + aj^N$ est dans J.

(c) On a les inclusions $(x, y)^3 = (x^3, x^2y, xy^2, y^3) \subset I \subset (x, y)$. On en déduit que le radical de I est l'idéal premier (x, y). Notons que le quotient $k[x, y]/(x, y)$ est isomorphe à k et que (x, y) est même maximal. Par (b), puisque $r(I) = (x, y)$, I est primaire.

Exercice 3 (Restriction d'idéaux)

Soit k un corps. On note $k[y, z]$ la sous algèbre de $k[x, y, z]$ engendrée par y et z.
Soit I l'idéal de $k[x, y, z]$ engendré par (x^2y, xz^2, y^2z, yz^2). Déterminer un système de générateurs de $I \cap k[y, z]$, vu comme idéal de $k[y, z]$.

Solution : Montrons que $I \cap k[x, y] = (y^2z, yz^2)$. L'inclusion $I \cap k[y, z] \supset (y^2z, yz^2)$ est élémentaire. Soit $p \in I$. Comme I est un idéal monomial, chaque monôme de p est multiple de l'un des générateurs monomiaux de I. Si $p \notin (y^2z, yz^2)$, l'un des monômes de p n'est ni multiple de y^2z ni multiple de yz^2. Il est multiple de x^2y ou de xz^2, mais alors p n'est pas dans $k[y, z]$.