Feuille de TD 4 : Normalisation de Noether et spectre

Retour sur le théorème de normalisation de Noether

Exercice 1 (Lemme de Nakayama)

Soit $A \subset B$ deux anneaux. On suppose que B est une algèbre finie sur A (i.e. B est une A-algèbre de type finie). Soit I un idéal propre de A. Montrer que l'idéal IB de B engendré par I est propre dans B. *On pourra raisonner par l'absurde et écrire dans IB une famille génératrice de B sur A.*

Exercice 2 (Interprétation géométrique du théorème de normalisation de Noether)

Soit k un corps algébriquement clos. Soit $I = I \subset k[x_1, \cdots, x_n]$ un idéal premier. Soit $X = V_m(I) \subset \mathbb{A}^n(k)$. Soit $A = k[x_1, \cdots, x_n]/I = k[a_1, \cdots, a_n]$ l'anneau des fonctions de X. Ici, $a_i = [x_i]_A$ est la classe de x_i dans le quotient $A = k[x_1, \cdots, x_n]/I$. Soit $b_1, \cdots, b_m$ dans A fournis par le théorème de Noether, linéaires en les a_i, algébriquement indépendants et tels que A soit finie sur $B := k[b_1, \cdots, b_m]$.

Soit $y_1, \cdots, y_m$ linéaires dans $k[x_1, \cdots, x_n]$ des relevés de $b_1, \cdots, b_m$ et $\pi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$, $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (y_1(x), \cdots, y_m(x))$ la projection linéaire associée. Soit p sa restriction à X. Le but est de montrer que les fibres de p sont finies et non vides.

1 Montrer que p ne dépend pas du choix des relèvements y_i.

2 En considérant a_i, montrer qu'il existe N et $f_{ij} \in k[y_1, \cdots y_m]$ et $g_i \in I$ tels que

$$x_i^N + \sum_{j=0}^{N-1} f_{ij}(y) x_i^j = g_i(x).$$

3 Pour tout $y \in \mathbb{A}^m(k)$ fixé, en déduire que l'ensemble des $x \in X$ tels que $p(x) = y$ est fini.

4 Soit $y^0 \in \mathbb{A}^m(k)$ fixé. Montrer que

$$I + (y_1 - y_1^0, \cdots, y_m - y_m^0) = k[x_1, \cdots, x_n] \iff (b_1 - b_1^0, \cdots, b_m - b_m^0) = A.$$

En déduire par le Nullstellensatz et le lemme de Nakayama que la fibre $p^{-1}(y^0)$ n'est pas vide.

Étude des schémas affines

Exercice 3 (Topologie de Zariski)

Soit A un anneau intègre. On admettra que la longueur maximale d'une suite strictement croissante d'idéaux premiers de $\mathbb{C}[X, Y]$ est 3 (à comparer avec le fait que tout idéal premier non nul de $\mathbb{C}[X]$ est maximal).

1 Montrer que si M est un idéal maximal de A alors $\{M\}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathrm{Spec}(A)$.

2 Montrer que si A est un anneau intègre le singleton $\xi := \{(0)\}$ de $\mathrm{Spec}(A)$ est dense dans $\mathrm{Spec}(A)$.

3 Soit f un polynôme irréductible de $\mathbb{C}[X, Y]$. Déterminer les singletons de $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[X, Y]$ inclus dans $V((f))$ et leur adhérence.

Exercice 4 (Lemme du cours)

1 Montrer que le radical d'un idéal primaire dans un anneau est premier.
2 Montrer que si deux idéaux primaires d'un anneau ont même radical, leur intersection est primaire avec même radical.

Exercice 5 (Composantes)

Dans $\mathbb{C}[X,Y]$ montrer que $I =< X^2, XY >$ admet pour décompositions primaires minimales
$$I =< X > \cap < Y, X^2 >=< X > \cap < X^2, XY, Y^2 > .$$
En déduire les composantes irréductibles et les composantes plongées de $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/I)$.

Applications polynômiales, applications rationnelles

Exercice 6 (Groupe linéaire)

Soit k un corps.
1 L'application de multiplication $\left\{ \begin{array}{ccc} M_n(k) \times M_n(k) & \to & M_n(k) \\ (A,B) & \mapsto & AB \end{array} \right.$ est-elle une application polynômiale ?
2 Soit $\mathcal{A} := k[X_{ij}, 1 \leqslant i,j \leqslant n]$ une algèbre de polynôme en n^2 indéterminées à coefficients dans un corps k. Soit $\det := \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) \prod_i X_{i\sigma(i)} \in \mathcal{A}$. Soit $\mathcal{A}_{\det}$ la localisation de $\mathcal{A}$ par rapport à la partie multiplicative des puissances de $\det \in \mathcal{A}$. Montrer que $\mathcal{A}_{\det}$ est isomorphe à $\mathcal{A}[t]/(t \det -1)$.
3 L'ensemble $\{(M,t) \in M_n(k) \times k / t \det M = 1\}$ est-il un sous-ensemble algébrique de $M_n(k) \times k$. On le notera
$$GL_n(k) := \{(M,t) \in M_n(k) \times k / t \det M = 1\}.$$
4 La multiplication dans $GL_n(k)$ est-elle polynômiale ?
5 L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} GL_n(k) & \to & GL_n(k) \\ (A,t) & \mapsto & (A^{-1}, t^{-1}) \end{array} \right.$ est-elle une application polynômiale ?

Exercice 7 (Applications polynômiales)

Soit k un corps.
1 Soit $P \in k[X]$. La projection
$$\left\{ \begin{array}{ccc} V(Y - P(X)) & \to & \mathbb{A}^1(k) \\ (x,y) & \mapsto & x \end{array} \right.$$
est-elle une application polynômiale ? Déterminer son image. Est-elle un isomorphisme ?
2 L'application
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1(k) & \to & \mathbb{A}^2(k) \\ t & \mapsto & (t^2 - 1, t(t^2 - 1)) \end{array} \right.$$
est-elle polynômiale ? Déterminer son image. Est-elle un isomorphisme sur son image ?