Feuille de TD 3 : Normalisation de Noether et spectre

Quelques propriétés des anneaux

Exercice 1 (radical)

Soit A un anneau (commutatif, unitaire).
1 Montrer que le radical $\sqrt{I} := \{a \in A / \exists n \in \mathbb{N}, a^n \in I\}$ d'un idéal I de A est un idéal de A contenant I.
2 Soit $a \in A$ hors de $\sqrt{(0)}$. Montrer en utilisant le lemme de Zorn qu'il existe un idéal premier qui ne contient pas la partie multiplicative S des puissances de a.
3 Montrer que $\sqrt{(0)}$ est l'intersection de tous les idéaux premiers de A : on l'appelle le nilradical de A.

Exercice 2 (extensions entières d'anneaux)

On dit qu'une extension d'anneau B d'un anneau A est une extension entière si tout élément de B est entier sur A. On dit qu'une extension d'anneau B d'un anneau A est une extension finie si B est un A module de type fini.
1 Montrer qu'une extension finie B d'un anneau A est entière.
Indication : Pour un élément x de b, on pourra considérer le A-endomorphisme X de B de multiplication par x.
2 Montrer que si $A \subset B$ est une extension entière d'anneaux intègres, A est un corps si et seulement si B est un corps.
3 Le résultat reste-il vrai sans l'hypothèse d'intégrité ?

Exercice 3 (Hypersurfaces de k^2)

Soit k un corps. Montrer qu'aucun idéal principal de $k[X, Y]$ n'est maximal.
Indication : Si $I = (P)$ avec $\deg_Y P \geqslant 1$, $P(X, Y) = P_d(X)Y^d + \cdots P_0(X)$, on pourra commencer par le cas où $P_d(x) = 1$ puis considérer une extension finie de k où P_d admet une valeur non nulle.

Sur la normalisation

Exercice 4 (Idéaux maximaux)

Soit k un corps. Montrer que le noyau de l'évaluation $k[X_1, \cdots, X_n] \to k$ en $(x_1, \cdots, x_n)$ de k^n est l'idéal maximal $(X_1 - x_1, \cdots, X_n - x_n)$.

Exercice 5 (Normalisation explicite)

On admettra que le polynôme $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ de $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ est irréductible et que $x_2^2 + x_3^2 - 1$ n'est pas un carré dans $\mathbb{C}(x_2, x_3)$.

Soit F le corps des fractions de $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]/(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$. Donner une base $z_1, \cdots, z_d$ de transcendance de F sur $\mathbb{C}$ et expliciter l'extension algébrique $\mathbb{C}(z_1, \cdots z_d) \subset F$.

Exercice 6 (Annulations communes)

Soit $F \in \mathbb{C}[X, Y]$ irréductible. Montrer que si $G \in \mathbb{C}[X, Y]$ s'annule en tous les points où F s'annule alors F divise G. Ce résultat reste-t-il vrai dans $\mathbb{R}[X, Y]$?

Premières propriétés des spectres

Exercice 7 (À l'aide des idéaux maximaux)

1 Soit A un anneau intègre. Montrer que dans $Frac(A)$, le corps des fractions de A, l'anneau A est l'intersection des localisés suivant les complémentaires des idéaux maximaux

$$A = \bigcap_{M \in \mathrm{Spec}_m(A)} A_M.$$

Indication : Pour $x \in \bigcap_{M \in \mathrm{Spec}_m(A)} A_M$, on pourra considérer le conducteur de x dans A défini par $(A : x) := \{a \in A, ax \in A\}$.

2 Soit $f \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$. On rappelle que $D(f) := \{M \in \mathrm{Spec}_m \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]/f \notin M\}$ s'identifie à l'ouvert de $\mathbb{C}^n$ défini par $\{x \in \mathbb{C}^n, f(x) \neq 0\}$ et que l'anneau des fonctions régulières sur $D(f)$ est $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}) := \bigcap_{x \in D(f)} \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]_{\mathcal{M}_x}$. Montrer que

$$\Gamma(D(f), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}) = \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]_f.$$

3 Soit $f, g \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ sans facteurs irréductibles communs. Montrer que

$$\Gamma(D(f) \cup D(g), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}) = \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n].$$

Exercice 8 (Spectre de $A \times B$)

Le but de l'exercice est de montrer l'isomorphisme

$$\mathrm{Spec}(A \times B) = \mathrm{Spec}(A) \cup \mathrm{Spec}(A)$$

1 Soit $P \in \mathrm{Spec}(A \times B)$. Montrer que si $(0_A, 1_B) \notin P$ alors $P = \pi_2^{-1}\pi_2(P)$ où $\pi_2 : A \times B \to B$ est la projection naturelle. *Remarque : π_2 est la localisation de $A \times B$ par rapport à $\{(1,1), (0,1)\}$.*

2 En déduire que les idéaux premiers de $A \times B$ sont de la forme $P \times B$ ou $A \times Q$ où P est un idéal premier de A et Q un idéal premier de B.

3 Conclure.

Idéaux et variétés

Exercice 9 (Ensembles algébriques)

Soit k un corps.

1 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{A}^n(k)$ et x un point de $\mathbb{A}^n(k) - E$. Existe-t-il un polynôme F de $k[X_1, \cdots, X_n]$ tel que $F_{|E} = 0$ et $F(x) = 1$?

2 Soit V un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{A}^n(k)$ et x un point de $\mathbb{A}^n(k) - V$. Existe-t-il un polynôme F de $k[X_1, \cdots, X_n]$ tel que $F_{|V} = 0$ et $F(x) = 1$?

3 Soit V un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{A}^n(k)$. L'ensemble V est-il une intersection finie d'hypersurfaces de $\mathbb{A}^n(k)$? *Une hypersurface de* $\mathbb{A}^n(k)$ *est le lieu des zéros d'un polynôme non constant de* $k[X_1, \cdots, X_n]$.

Exercice 10 (Idéaux annulateurs)

1 À l'aide de division euclidienne, déterminer des générateurs l'idéal $I(S)$ de $\mathbb{C}[X, Y]$ des polynômes nuls sur $S = \{(1, 2)\} \subset \mathbb{C}^2$.

2 Déterminer des générateurs l'idéal $I(T)$ de $\mathbb{C}[X, Y]$ des polynômes nuls sur $T = \{(1, 2), (3, 4)\} \subset \mathbb{C}^2$.

Exercice 11 (Variétés maximales)

Soit I_1 et I_2 deux idéaux de $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$. Vérifier que

$$V_m(I_1) \cup V_m(I_2) = V_m(I_1 \cap I_2) = V_m(I_1 I_2).$$

Exercice 12 (Image d'une application)

Soit k un corps.

1 Montrer que l'image de l'application

$$\begin{cases} \varphi : \mathbb{A}^1(k) & \to & \mathbb{A}^3(k) \\ \quad t & \mapsto & (t, t^2, t^3) \end{cases}$$

est incluse dans l'ensemble $D := \{(x_1, x_2, x_3) \in k^3, x_1^2 = x_2 \text{ et } x_1 x_2 = x_3\}$.

2 Montrer que l'image de l'application φ est un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{A}^3(k)$.

Exercice 13 (Réunion de droites)

Déterminer un système de générateurs pour l'idéal de la réunion $\ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3$ des axes de coordonnées canoniques dans $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. i.e. $\ell_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_2 = x_3 = 0\}$.

Topologie de Zariski

Exercice 14 (Propriétés de base)

1 Soit k un corps infini. La topologie de Zariski sur $\mathbb{A}^n(k)$ est-elle séparée ?

2 Tout ouvert de Zariski est-il une réunion finie de complémentaires d'hypersurfaces ?

Exercice 15 (Comparaison avec la topologie métrique)

1 Toute fonction continue pour la topologie métrique sur $\mathbb{C}^n$, nulle sur un sous-ensemble E de $\mathbb{C}^n$ est-elle nulle sur l'adhérence de Zariski de E ?

2 Toute fonction polynômiale sur $\mathbb{C}^n$, nulle sur un sous-ensemble E de $\mathbb{C}^n$ est-elle nulle sur l'adhérence de E pour la topologie métrique ?

3 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$. Comparer pour l'inclusion E, l'adhérence $\overline{E}^{met}$ de E pour la topologie métrique et l'adhérence $\overline{E}^{Zar}$ de E pour la topologie de Zariski.

Exercice 16 (Adhérence de Zariski)

1 Déterminer à l'aide de générateurs l'idéal $I(E)$ des polynômes de $\mathbb{C}[X,Y]$ nuls sur $E = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2, \exists n \in \mathbb{N}, (x,y) = (n^2, n^3)\}$. *Si $P(X,Y)$ est dans $I(E)$, on pourra effectuer une division euclidienne de P par le polynôme unitaire $Y^2 - X^3$ dans $k[X][Y]$.*

2 Déterminer l'adhérence de Zariski $\overline{X}$ de X.

Exercice 17 (Ensembles de matrices)

Soit n un entier supérieur à 3.

1 Le sous ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales est-il un fermé de Zariski de $M_n(\mathbb{R})$?

2 Le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{C})$ des matrices inversibles est-il un ouvert de Zariski de l'espace affine $M_n(\mathbb{C})$.

3 Soit $r \leqslant R$ deux entiers naturels. Montrer que toute matrice de rang r est dans l'adhérence de Zariski du sous-ensemble de $M_n(\mathbb{C})$ des matrices de rang R.

4 Le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{C})$ des matrices de rang $n-2$ est-il un fermé de Zariski de l'espace affine $M_n(\mathbb{C})$.

5 Si non, déterminer son adhérence de Zariski.