Feuille de TD 2 : Résultants

Plusieurs exercices de cette feuille sont inspirés du livre de Daniel Perrin (Cours d'Algèbre), du livre de Brendan Hassett (Algebraic Geometry) et du poly de Bernard Le Stum et du texte de Michel Coste "Elimination, résultant. Discriminant".

Résultants

Exercice 1 (Propriétés de base)

Soit K un corps. Rappeler la démonstration de l'égalité $\mathrm{Res}\,(F,G) = a_f^{g-h}\mathrm{Res}\,(F,H)$ si F, G sont deux polynômes de $K[X]$ de degré f et g et H dans $K[X]$ vérifie $G = QF + H$ et $\deg H = h \leqslant g$. Ici a_f est le coefficient dominant de F.

Exercice 2 (Sur les facteurs communs)

Soit F et G deux polynômes de $R[X]$ tels que la matrice qui définit leur résultant soit de rang $\deg F + \deg G - 1$. Montrer que F et G ont un facteur de degré 1 commun, mais pas de facteur de degré 2.

Exercice 3 (Résolution de systèmes)

Résoudre

$$\begin{cases} x^3 + 3x + 1 &= 0 \\ x^2 - 4x + 1 &= 0. \end{cases}$$

Exercice 4 (Résolution de systèmes)

1 Montrer le résultant en X de $P(X,Y) = X^2 + Y^2 + X^3 + Y^3$ et $Q(X,Y) = X^3 + Y^3 - 2XY$ vaut $\mathrm{Res}\,_X(P,Q) = \mathrm{Res}\,_X(P, -(X+Y)^2) = P(-Y,Y)^2 = 4Y^4$.

2 En déduire les solutions du système

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 + X^3 + Y^3 &= 0 \\ X^3 + Y^3 - 2XY &= 0 \end{cases}$$

Exercice 5 (Résolution de systèmes)

1 Calculer le résultant en Y de $P(X,Y) = X^2 - XY + Y^2 - 1$ et $Q(X,Y) = 2X^2 + Y^2 - Y - 2$.

2 En déduire les solutions du système

$$\begin{cases} X^2 - XY + Y^2 &= 1 \\ 2X^2 + Y^2 - Y &= 2 \end{cases}$$

Exercice 6 (Paramétrage et équation)

Soit K un corps et $x, y \in K$. Montrer à l'aide d'un résultant que

$$(\exists t \in \overline{K} / x = t^2, y = t^5) \iff y^2 = x^5$$

Exercice 7 (Folium de Descartes)

Déterminer une équation cartésienne de l'image de la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) &= \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

Exercice 8 (Nombres algébriques)

Soit R un anneau intègre, $\alpha, \beta \in R$ et $F, G \in R[X]$ tels que $F(\alpha) = G(\beta) = 0$.

1 Montrer que $R(X) := \mathrm{Res}_Y(F(Y), G(X - Y))$ est un polynôme annulateur de $\alpha + \beta$.

2 En déduire un polynôme annulateur de $\sqrt{2} + \sqrt[3]{7}$.

3 Construire un polynôme annulateur du produit $\alpha\beta$

Exercice 9 (Discriminants)

Soit K un corps. On rappelle que le discriminant d'un polynôme $P \in K[X]$ de degré d premier à la caractéristique de K et de coefficient dominant a_d est défini par l'égalité $\mathrm{Res}\,(P, P') = (-1)^{d(d-1)/2} a_d \mathrm{disc}(P)$.

1 Démontrer qu'un polynôme P a une racine multiple dans la clôture algébrique $\overline{K}$ de K (i.e. se factorise dans $\overline{K}[X]$ par $(X - \alpha)^2$ pour un $\alpha \in \overline{K}$) si et seulement si $\mathrm{disc}(P) = 0$.

2 Calculer le discriminant de $aX^2 + bX + c$.

3 Calculer le discriminant de $X^3 + pX + q$.

Exercice 10 (Discriminant)

Soit

$$P(X, Y) = Y - X(X - 1)(X + 1).$$

1 Calculer le discriminant $d(Y)$ de P considéré dans $\mathbb{C}(Y)[X]$.

2 Interpréter ses racines en termes géométriques pour la courbe affine d'équation $P(X, Y) = 0$.

Pour aller plus loin

Exercice 11 (Irréductibilité de l'hypersurface universelle)

Soit k un corps. Le but de l'exercice est de montrer que l'équation de l'hypersurface universelle

$$H(X, a_0, \cdots, a_d) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_0 \in k[X, a_0, \cdots, a_d]$$

est irréductible. On considère le morphisme d'algèbres

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & k[X, a_0, \cdots, a_d] & \to & k[X, \alpha_1, \cdots, \alpha_d, a_d] \\ & X & \mapsto & X \\ & a_{d-k} & \mapsto & (-1)^k a_d \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k}. \end{array}$$

qui correspond aux relations coefficients-racines, c'est à dire $\varphi(\sum_{i=1}^d a_i X^i) = a_d \prod_{i=1}^d (X - \alpha_i)$.

1 Montrer que φ conserve le degré en X.

2 Supposons que H s'écrive $H = P_1 P_2$ avec $P_i \in k[X, a_0, \cdots, a_d]$ et que $(X - \alpha_1)$ divise $\varphi(P_1)$. Montrer que $\prod_{i=1}^d (X - \alpha_i)$ divise $\varphi(P_1)$. En déduire que $\varphi(P_2)$ est constant.

3 Conclure.

Exercice 12 (Sur le cours)

1 Soit K un corps. Soit $I =< x^{I(1)}, \cdots, x^{I(r)} >$ un idéal monomial de $K[x_1, \cdots, x_n]$. Soit $P = \sum c_I x^I$ un polynôme de I. Montrer que chaque x^I tel que $c_I \neq 0$ est divisible par l'un des $x^{I(j)}$.
2 Lister dans l'ordre pour les ordres lex, grlex et grinvlex les monômes en trois variables X, Y et Z (avec $X > Y > Z$) jusqu'au degré total 3 inclus.
3 La base $(x_1 - x_2^{37}, x_1 - x_2^{38})$ de l'idéal $< x_1 - x_2^{37}, x_1 - x_2^{38} >$ est-elle une base de Gröbner pour l'ordre lexicographique ?

Exercice 13 (Base de Gröbner et appartenance)

1 En utilisant le critère des S-polynômes, dire si la famille $(X + Z, Y - Z)$ est une base de Gröbner pour l'ordre lexicographique de l'idéal I de $K[X, Y, Z]$ qu'elle engendre.
2 Déterminer si le polynôme $X^2 + Y^2 + Z^2$ appartient à I.
3 Même question avec le polynôme $X^2 + 2XY - Y^2 + 2YZ$.

Exercice 14 (Appartenance)

Le polynôme $f = 2X^2Y^2 - X^2 + Y^2$ est-il dans l'idéal engendré par $f_1 = X^2Y + Y$ et $f_2 = Y^2 - 1$?

Exercice 15 (Calcul de dimension)

Soit $f = x^4 + x^2y^2 + y^3 - x^3 \in \mathbb{C}[x, y]$ et $I =< f, \partial f/\partial x, \partial f/\partial y >$. On admet que $\{x^2, y^2\}$ est une base de Gröbner réduite de I est pour l'ordre lexicographique avec $x < y$,
1 Calculer la dimension de $\mathbb{C}[x, y]/I$.
2 A-t-on $x^5 = y^5 \mod I$?

Exercice 16 (Forme normale)

1 Déterminer une base de Gröbner pour l'idéal $< x_3 - x_1^5, x_2 - x_1^3 >$ pour l'ordre lexicographique, puis pour l'ordre lexicographique gradué inverse.
2 Déterminer la forme normale de $x_1x_2x_3$ pour chacune de ces bases.

Exercice 17 (Base de Gröbner et équations)

On rappelle que si S est une base de Gröbner de $I \subset k[X_1, ..., X_n]$ pour l'ordre invlex et $m \leqslant n$, alors $S' := S \cap k[X_1, ..., X_m]$ est une base de Gröbner de $I' := I \cap k[X_1, ..., X_m]$. Le but de l'exercice est d'obtenir des équations de l'image de l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3, t \mapsto (t^3, t^4, t^5)$.
1 Déterminer une base de Gröbner pour l'idéal $I :=< x - t^3, y - t^4, z - t^5 >$ pour l'ordre lexicographique $x < y < z < t$.
2 Vérifier que I est l'idéal du graphe de f dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3$ et que $I' := I \cap \mathbb{C}[x, y, z]$ est l'idéal de l'image de f.
3 Conclure.