

## Feuille de TD 1 : Anneaux et algèbres

Plusieurs exercices de cette feuille sont inspirés du livre de Daniel Perrin (Cours d'Algèbre), du livre de Brendan Hassett (Algebraic Geometry) et du poly de Bernard Le Stum.

Tous les anneaux considérés seront commutatifs et unitaires.

### $R$ -ALGÈBRES ET POLYNÔMES

**Exercice 1** (Définitions équivalentes des  $R$ -algèbres).

Soit  $(R, +, \times)$  un anneau. On rappelle qu'une  $R$ -algèbre est un anneau  $(A, +, \times)$  muni d'une loi externe  $\cdot : R \times A \rightarrow A, (c, f) \mapsto c \cdot f$  compatible avec les opérations  $+$  et  $\times$  de  $R$  et  $A$ .

- Rappeler les relations de compatibilité de la loi externe  $\cdot$  avec  $+$  et  $\times$  dans une  $R$ -algèbre.
- Montrer qu'une  $R$ -algèbre est un anneau  $A$  muni d'un morphisme d'anneaux  $R \rightarrow A$ .
- Soit  $(A, +, \times, \cdot)$  une  $R$ -algèbre. Montrer que  $(A, +, \cdot)$  est un  $R$ -module et que la multiplication  $\times : A \times A \rightarrow A$  est  $R$ -bilinéaire.
- Réciproquement, montrer qu'un  $R$ -module  $(M, +, \cdot)$  muni d'un produit  $\times : M \times M \rightarrow M$  bilinéaire tel que  $(M, +, \times)$  est un anneau, fait de  $(M, +, \times, \cdot)$  une  $R$ -algèbre.

**Exercice 2** (Structures d'algèbre).

Soit  $R$  un anneau et  $A$  l'algèbre (non-unitaire) des suites presque nulles à coefficients dans  $R$  munie des opérations  $+$ ,  $\times$ ,  $\cdot$  coordonnées par coordonnées. L'application  $A \rightarrow R[X], (r_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_i r_i X^i$  est-elle bien définie ? est-elle un isomorphisme d'algèbres ?

**Exercice 3** (Polynômes).

- Donner l'exemple d'un anneau  $R$  et de deux polynômes  $P$  et  $Q$  de  $R[X]$  tels que  $\deg(PQ) < \deg P + \deg Q$ .
- Donner l'exemple d'un corps  $K$  et d'un polynôme  $P \in K[X]$  non nul et tel que pour tout  $r \in K, P(r) = 0$ .
- Soit  $K$  un corps et  $f \in K[X, Y]$ . On suppose qu'il existe deux parties infinies  $S_1$  et  $S_2$  de  $K$  telles que  $f$  s'annule pour tous les  $(x, y)$  de  $S_1 \times S_2$ . Montrer que  $f$  est nul.

### IDÉAUX PREMIERS, IDÉAL MAXIMAUX

**Exercice 4** (Éléments et idéaux particuliers).

- Rappeler les définitions dans un anneau intègre d'irréductibilité d'un élément, d'association de deux éléments, de primalité et de maximalité d'un idéal.
- Soit  $A$  un anneau intègre et  $p$  un élément non nul tel que  $(p)$  est premier. Montrer que  $p$  est irréductible.
- Soit  $A$  un anneau intègre et  $p$  un élément irréductible. Montrer que  $(p)$  est maximal parmi les idéaux principaux.

**Exercice 5** (Images réciproques d'idéaux).

- (a) Montrer que l'image réciproque d'un idéal premier par un morphisme d'anneaux est un idéal premier.
- (b) L'image réciproque d'un idéal maximal par un morphisme d'anneaux est-elle un idéal maximal ?

**Exercice 6** (Idéaux maximaux).

- (a) Décrire les idéaux maximaux de  $\mathbb{Z}$ , de  $k[X]$  où  $k$  est un corps, et d'un anneau principal  $A$ .
- (b) Montrer que les idéaux de la forme  $(p, f)$  où  $p$  est un nombre premier et  $f$  un polynôme unitaire irréductible modulo  $p$  sont maximaux dans  $\mathbb{Z}[X]$ .
- (c) Soit  $k$  un corps et  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in k^n$ . Montrer à l'aide de l'application d'évaluation en  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  que l'idéal  $(X_1 - a_1, X_2 - a_2, \dots, X_n - a_n)$  de  $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$  est maximal. (En fait, si  $k$  est algébriquement clos, le théorème des zéros de Hilbert permet de montrer que ce sont les seuls idéaux maximaux.)

LOCALISATION

**Exercice 7** (Anneaux locaux).

- (a) On rappelle que si  $A$  est un anneau et  $I$  un idéal propre, puisque l'ensemble des idéaux propres de  $A$  contenant  $I$  est inductif (i.e. toute famille totalement ordonnée admet un élément maximal), il existe par le lemme de Zorn un idéal maximal contenant  $I$ . Montrer qu'un élément de  $A$  est inversible si et seulement si il n'appartient à aucun idéal maximal.
- (b) Montrer que  $A$  admet un unique idéal maximal si et seulement si  $A - A^\times$  est un idéal de  $A$ . (On dit alors que  $A$  est *local*. L'unique idéal maximal est alors  $M = A - A^\times$ .)
- (c) Pour quels entiers naturels  $n$ , l'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est-il local ?

**Exercice 8** (Partie multiplicative et localisation).

On rappelle qu'une partie d'un anneau est dite *multiplicative*, si elle contient 1 et si elle est stable par multiplication.

- (a) Montrer que l'image et l'image réciproque d'une partie multiplicative par un morphisme d'anneaux est une partie multiplicative.
- (b) Montrer que si  $I$  est un idéal de l'anneau  $A$ ,  $1 + I$  est une partie multiplicative de  $A$ .
- (c) À quelle condition sur  $A$  le sous-ensemble des éléments non-nuls est-il une partie multiplicative ? Quelle est alors la localisation d'un tel anneau par rapport à la partie multiplicative des éléments non nuls ?
- (d) Montrer que le localisé  $S^{-1}A$  de l'anneau  $A$  par rapport à la partie multiplicative  $S$  est  $\{(0_A, 1_A)\}$  si et seulement si  $0_A$  appartient à  $S$ .
- (e) Montrer que les éléments de  $S^{-1}A$  s'écrivent sous la forme  $\frac{\varphi(a)}{\varphi(s)} := \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$  avec  $(a, s) \in A \times S$  et l'application  $\varphi : A \rightarrow S^{-1}A$ ,  $a \mapsto [(a, 1)]$ .
- (f) Montrer que si  $A$  est intègre et  $S$  une partie multiplicative de  $A$  qui ne contient pas 0, alors  $S^{-1}A$  s'injecte dans le corps des fractions de  $A$  et l'application  $\varphi : A \rightarrow S^{-1}A$ ,  $a \mapsto [(a, 1)]$  de  $A$  dans le localisé  $S^{-1}A$  est injective.
- (g) Montrer que les idéaux premiers de  $S^{-1}A$  sont exactement les  $S^{-1}P$ , pour  $P$  idéal premier de  $A$  ne rencontrant pas  $S$ .

**Exercice 9** (Localisation par rapport à un idéal premier).

Soit  $A$  un anneau intègre.

- Montrer que si  $P$  est un idéal premier de l'anneau  $A$ , alors  $S := A - P$  est une partie multiplicative de  $A$ .
- Montrer que les éléments de  $S$  sont inversibles dans le localisé  $S^{-1}A$  et que l'image de  $P$  dans le localisé  $S^{-1}A$  engendre l'unique idéal maximal  $M$ .
- Montrer le corps résiduel  $S^{-1}A/M$  est le corps des fractions de  $A/P$ .
- Soit  $u : A \rightarrow B$  un morphisme d'anneaux et  $Q$  un idéal premier de  $B$ . Montrer que  $P = u^{-1}(Q)$  est un idéal premier de  $A$  et que  $u$  se prolonge de manière unique en un morphisme d'anneaux locaux  $u_P : A_P \rightarrow B_Q$ .

**Exercice 10** (Localisation par rapport à une famille de puissances).

- Montrer que si  $s$  est un élément non nilpotent d'un anneau  $A$ , alors l'ensemble  $S$  des puissances de  $s$  est une partie multiplicative de  $A$  qui ne contient pas  $0$ . On notera  $A_s := S^{-1}A$ . Montrer alors que le morphisme de  $A$ -algèbres  $A[X] \rightarrow A_s, P \mapsto P(1/s)$  induit un isomorphisme de  $A[X]/(sX - 1)$  sur  $A_s$ .
- Décrire la localisation  $\mathbb{Z}_{10}$  de  $\mathbb{Z}$  par rapport à la partie multiplicative des puissances de  $10$ ?
- Avec les notations de la première question, l'anneau localisé  $A_s$  est-il local ?

**Exercice 11** (Hérédité par localisation).

- Montrer que le localisé  $S^{-1}A$  d'un anneau principal  $A$  par rapport à une partie multiplicative  $S$  reste principal.
- En déduire de  $\mathbb{C}[X, Y]/(XY - 1)$  est principal.
- Montrer que le localisé  $S^{-1}A$  d'un anneau factoriel par rapport à une partie multiplicative  $S$  reste factoriel. On montrera que les éléments premiers de  $S^{-1}A$  sont les éléments premiers  $p$  de  $A$  tels que  $(p) \cap S = \emptyset$ .

**Exercice 12** (Anneaux de valuation discrète).

Une *valuation discrète* sur un corps  $K$  est une application surjective  $v : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  vérifiant

- $\forall f \in K, v(f) = \infty \iff f = 0$
- $\forall f, g \in K, v(fg) = v(f) + v(g)$ .
- $\forall f, g \in K, v(f + g) \geq \min(v(f), v(g))$ .

On dit que  $l$  est une *uniformisante* si  $v(l) = 1$  et que  $A := \{f \in K, v(f) \geq 0\}$  est l'anneau de valuation de  $K$ .

- Donner un exemple d'anneau de valuation discrète.
- Montrer que si  $v$  est une valuation discrète sur un corps  $K$  et  $x$  un nombre réel strictement plus grand que  $1$ , l'application  $|\cdot|_v := x^{-v}$  est une norme sur  $K$ .
- Montrer qu'un anneau de valuation discrète est un anneau local. On précisera l'idéal maximal  $M$  et le groupe des inversibles de  $A$  en termes de la valuation, puis en termes de la norme.
- Montrer que tout élément  $a$  de  $A$  s'écrit de la forme  $a = ul^n$ , avec  $u \in A^\times$  et  $n \in \mathbb{N}$ .
- Montrer que  $v(f) \geq n \iff f \in M^n$ .
- Montrer qu'un anneau de valuation discrète est principal.

## ANNEAUX PRINCIPAUX, FACTORIELS

**Exercice 13** (Irréductibles dans un anneau factoriel).

Soit  $A$  un anneau factoriel. Montrer qu'un élément  $p$  de  $A$  est irréductible ou nul si et seulement si  $(p)$  est premier si et seulement si  $(p)$  est maximal.

**Exercice 14** (Exemple d'anneaux).

Soit  $K$  un corps. On rappelle que si  $A$  est un anneau commutatif noethérien, alors  $A[X]$  est aussi noethérien (Théorème de la base de Hilbert).

- (a) Soit  $I$  un idéal de  $K[X, Y]$ . Montrer que l'anneau  $K[X, Y]/I$  est noethérien.
- (b) L'anneau  $K[X, Y]/(XY)$  est-il factoriel ?
- (c) L'anneau  $K[X, Y]/(Y^3 - X^2)$  est-il factoriel ? *On pourra vérifier que  $[Y]$  est irréductible mais que  $([Y])$  n'est pas premier.*
- (d) L'anneau  $K[X, Y]/(Y - X^2)$  est-il factoriel ? *On pourra considérer le morphisme d'algèbres  $K[X, Y] \rightarrow K[T], X \mapsto T, Y \mapsto T^2$ .*
- (e) L'anneau  $K[X, Y]/(XY - 1)$  est-il factoriel ?

**Exercice 15** (Condition de régularité).

Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes de l'anneau factoriel  $\mathbb{C}[X, Y]$  sans facteurs communs.

- (a) Montrer qu'il existe un polynôme non nul  $D$  de  $\mathbb{C}[X]$  et des polynômes  $U, V$  de  $\mathbb{C}[X, Y]$  tels que  $D = UP + VQ$ . *On pourra travailler dans l'anneau  $\mathbb{C}(X)[Y]$ .*
- (b) En déduire que l'ensemble  $V(P, Q) := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, P(x, y) = Q(x, y) = 0\}$  est un ensemble fini.

**Exercice 16** (Caractérisation des anneaux principaux).

- (a) Montrer qu'un anneau principal est noethérien.
- (b) Montrer qu'un anneau noethérien vérifie l'existence de la décomposition en produit d'irréductibles. *On pourra raisonner par l'absurde et considérer l'ensemble des idéaux  $(x)$  engendrés par les éléments qui n'admettent pas d'écriture en produits d'irréductibles.*
- (c) Soit  $A$  un anneau intègre avec l'existence de la décomposition en produit d'irréductibles. Supposons de plus que pour tout élément irréductible  $p$ , l'idéal  $(p)$  est premier. Montrer qu'il y a alors unicité dans la décomposition en produit d'irréductibles à association et ordre près. *On pourra raisonner par récurrence sur la longueur des décompositions et considérer un anneau quotient.*
- (d) Montrer qu'un anneau principal est factoriel et que tout idéal premier non nul et strict y est maximal.

**Exercice 17** (Caractérisation des anneaux principaux).

On admet qu'un anneau intègre dont tous les idéaux premiers sont principaux est principal. Montrer qu'un anneau factoriel, dont chaque idéal premier non nul est maximal, est un anneau principal. *On pourra prendre un idéal premier  $I$ , un élément non nul  $x$  de  $I$  et montrer l'existence d'un facteur irréductible  $p$  de  $x$  qui engendre  $I$ .*

## ANNEAUX INTÉGRALEMENT CLOS

**Exercice 18.** Soit  $A$  un sous-anneau d'un anneau  $B$ . On dit qu'un élément  $b$  de  $B$  est *entier* sur  $A$  s'il est solution d'une équation polynomiale unitaire à coefficients dans  $A$ . On dit qu'un anneau intègre  $A$  est *intégralement clos* si tout élément  $x$  de son corps des fractions  $K$  entier sur  $A$  est en fait dans  $A$ .

- (a) Montrer que tout élément non nul du corps des fractions d'un anneau factoriel  $A$  s'écrit comme quotient  $x/y$  d'éléments de  $A$  sans facteurs communs. Montrer que cette écriture est unique à association près.
- (b) Montrer qu'un anneau factoriel est intégralement clos.
- (c) Construire un morphisme d'algèbre injectif de  $A := \mathbb{C}[X, Y]/(Y^3 - X^2)$  dans  $\mathbb{C}[T]$ . En déduire que le corps des fractions de  $A$  est isomorphe à  $\mathbb{C}(T)$ . En utilisant l'image de  $T$  dans le corps des fractions de  $A$ , montrer que  $A$  n'est pas intégralement clos.