UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Calcul Matriciel

Feuille de TD 8 : Systèmes linéaires

Inversion

Exercice 1. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Décompositions LU et PLU

Exercice 2. Résoudre le système $Ax = b$, la décomposition LU de A étant donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad et \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Donner, si possible, la décomposition LU des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Est-ce que A admet une décomposition LU ?

(b) Montrer que la matrice PA obtenue en permutant les lignes 1 et 2 de la matrice A admet une décomposition LU. En déduire une écriture PLU de A.

(c) Résoudre le système $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ à l'aide de la décomposition $PA = LU$.

Exercice 5. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Est-ce que A admet une décomposition LU ? Si non, trouver une matrice inversible P telle que PA admette une décomposition LU, et calculer la.

Décomposition de Cholesky

Exercice 6.

Donner la décomposition de Cholesky de la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.

(a) (i) Développer pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la quantité $2(x + y + 2z)^2 + 3(y - z)^2 + 10z^2$.

(ii) La matrice

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 21 \end{pmatrix}$$

est-elle symétrique positive ?

(b) La matrice C admet-elle une décomposition de Cholesky, c'est à dire une écriture $C = T\,{}^tT$ où T est une matrice triangulaire inférieure avec des termes diagonaux strictement positifs ?

(c) Si oui, mettre la matrice C sous forme de Cholesky $C = T\,{}^tT$. Vérifier que le résultat est compatible avec l'égalité $\det C = 60$.

Moindres carrés

Exercice 8. Résoudre au sens des moindres carrés les systèmes $AX = B$ suivants. La solution trouvée est-elle unique ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Résoudre les systèmes linéaires $AX = B$ suivants, exactement ou au sens des moindres carrés. Dans le second cas, justifier le cas échéant l'unicité de la solution.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. En appliquant la méthode des moindres carrés, trouver la droite de régression (de y par rapport à x) approchant le nuage de points suivant :

$a)$ $(2,5), (3,9), (4,15), (5,21)$ $\qquad$ $b)$ $(4,3), (15,16), (30,13), (100,70), (200,90)$

1. Valeurs singulières

Exercice 11. Donner une décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer un pseudo inverse de A, B et C.