UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Calcul Matriciel

Feuille de TD 7 : Matrices stochastiques et théorèmes de Perron-Frobenius

Matrices positives, primitives, irréductibles

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que la matrice A est positive si et seulement si pour tout vecteur $v \geqslant 0$ de $\mathbb{R}^n$, $Av \geqslant 0$.

(b) Montrer que la matrice A est strictement positive si et seulement si pour tout vecteur $v \geqslant 0$ non nul de $\mathbb{R}^n$, $Av > 0$.

Exercice 2. Les matrices

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sont-elles primitives ? Irréductibles ?

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et primitive. En particulier, il existe $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tel que la matrice A^m soit strictement positive.

(a) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant m$, la matrice A^k est strictement positive.

(b) Montrer que la matrice $-A$ est primitive.

Exercice 4. (a) Déterminer un plan engendré par des vecteurs de base stable par la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. La matrice A est-elle primitive ? Irréductible ?

(b) Dessiner le graphe associé à la matrice A. Est-il fortement connexe ? Est-ce en accord avec la question précédente ?

Autour des théorèmes de Perron et Frobenius

Exercice 5. (a) Donner un exemple de matrice positive non nulle de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ dont le rayon spectral est nul.

(b) Donner un exemple de matrice positive non nulle de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ dont le rayon spectral est une valeur propre de multiplicité 2.

(c) Donner un exemple de matrice positive non nulle de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ dont le rayon spectral est une valeur propre non dominante.

Exercice 6. On considère la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

(a) Montrer que la matrice A est irréductible.
(b) Vérifier les conclusions du théorème de Frobenius appliqué à la matrice positive et irréductible A en calculant les valeurs propres de A.
(c) La matrice A est-elle primitive ?

Matrices stochastiques

Exercice 7. La matrice

$$E := \begin{pmatrix} -0,2 & 0,8 & 0,4 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}$$

est-elle stochastique ? Le nombre 1 est-il l'une de ses valeurs propres ?

Exercice 8. Pour chacune des matrices stochastiques suivantes, déterminer si un vecteur d'état limite existe et, si oui, le déterminer :

$$A := \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 (Matrices stochastiques)**.**
(a) Pour quelles valeurs de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ la matrice symétrique réelle

$$E_{abc} := \begin{pmatrix} 0,2 & a & b \\ a & 0,1 & c \\ b & c & 0,1 \end{pmatrix}$$

est-elle stochastique ? On notera E la matrice obtenue.
(b) La matrice E admet-elle un vecteur d'état ? Si oui, déterminer ce vecteur d'état.
(c) La suite $(E^k)_{k\in\mathbb{N}}$ des puissances de E admet-elle une limite ? Si oui, déterminer cette limite.

Pour aller plus loin

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
(a) Montrer que $AL = LA = L$.
(b) En déduire que
  (a) toute colonne de L est soit nulle soit un vecteur propre de A,
  (b) toute ligne de L est soit nulle soit un vecteur propre de ${}^tA$.