UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Calcul Matriciel

Feuille de TD 5 : Réduction dans les espaces euclidiens

Manipulation de matrices

Exercice 1. (a) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On note X le vecteur colonne de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1. Calculer ${}^tXAX$.

(b) Montrer que si la matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale, alors la valeur absolue de la somme des coefficients de A est inférieure ou égale à n. Le vérifier pour la matrice A de l'exercice 6.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Déterminer une matrice diagonale D telle que DA ou bien AD soit orthogonale.

(b) En déduire l'inverse de A.

Diagonalisation des endomorphismes symétriques réels

Exercice 3. Diagonaliser “dans une base orthonormale” les matrices symétriques

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. *On pourra successivement déterminer les valeurs propres (par étude du rang, d'une relation entre les puissances, de l'image de certains vecteurs, de la trace ou du polynôme caractéristique), les espaces propres en exploitant leur orthogonalité, puis déterminer une base orthonormale de vecteurs propres.*

Exercice 4. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et soit f un endomorphisme symétrique de E.

(a) Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Montrer que $F^\perp$ est également stable par f.

(b) En déduire que, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f, $(E_\lambda)^\perp$ est stable par f.

Exercice 5. (a) Donner l'exemple d'un endomorphisme d'un espace vectoriel réel dont le spectre est vide.

(b) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ est-elle symétrique ? est-elle diagonalisable ?

Réduction des endomorphismes orthogonaux

Exercice 6. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f dont la matrice représentative dans la base canonique est la matrice

$$A := \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Justifier sans calcul que f est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$.

(b) Montrer que l'endomorphisme f est orthogonal. En déduire les valeurs propres possibles pour f.

(c) Déterminer à partir de la trace de f les multiplicités des valeurs propres de f dans le polynôme caractéristique de f sans calculer celui-ci. En déduire le polynôme caractéristique de f.

(d) Déterminer une base orthonormale de l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 de f.

(e) Montrer que l'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 de f vérifie $E_{-1} = (E_1)^{\perp}$. En utilisant l'équation linéaire caractérisant E_1, en déduire un vecteur générateur de E_{-1}.
(f) Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale.

Exercice 7. Dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^3, < \, , \, >_{\text{can}})$, on considère l'endomorphisme u dont la matrice dans la base canonique est $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Vérifier que u est orthogonal.
(b) Calculer $\det u$ et en déduire sa nature géométrique.
(c) Montrer que u est la composée d'une symétrie et d'une rotation dont on calculera l'axe et l'angle. *On pourra réduire la matrice A en une matrice diagonale par blocs.*

Matrices symétriques positives

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive.

(a) Montrer que les coefficients diagonaux de A sont strictement positifs.
(b) Montrer que le déterminant de A est strictement positif.
(c) Montrer que les mineurs principaux de A (un mineur principal de A est le déterminant d'une sous-matrice obtenue en supprimant les lignes et colonnes de mêmes indices) sont tous strictement positifs.

Racine carrée

Exercice 9. Calculer le carré des matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Laquelle de ces matrices est la racine carrée de la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 10. Pour chacune des matrices symétriques suivantes de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, déterminer s'il s'agit d'une matrice positive, définie positive ou non positive, puis, dans les deux premiers cas, calculer la racine carrée de la matrice :

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On pourra noter les liens entre A et B, et entre B et C.

Décomposition polaire

Exercice 11. Que signifie la décomposition polaire en dimension 1 ?

Exercice 12. Déterminer la décomposition polaire des matrices inversibles suivantes de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 3\sqrt{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 3\sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Pour chaque matrice M, on pourra calculer ${}^tMM$, vérifier quelle est symétrique réelle, la diagonaliser sous la forme ${}^tMM = PDP^{-1}$ en précisant une matrice de passage orthogonale P, déterminer la racine carrée de la matrice diagonale D obtenue puis la racine carrée S de la matrice PDP^{-1}, puis calculer $O := MS^{-1}$ et vérifier que O est alors orthogonale.

Pour aller plus loin

Exercice 13. (a) Montrer que toute matrice orthogonale de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable en tant que matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ et déterminer ses valeurs propres complexes.
(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, toute matrice orthogonale de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable en tant que matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.