Calcul Matriciel

Feuille de TD 3 : Réduction des endomorphismes
Feuille de TD 4 : Exponentielle de matrices

Diagonalisabilité, trigonalisabilité

Exercice 1. (a) Expliquer sans calcul qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E est diagonalisable dans un corps $\mathbb{K}$ si et seulement si $(u + \mathrm{Id}_E)$ l'est.

(b) Expliquer sans calcul si la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

Exercice 2. *On pourra utiliser que le polynôme caractéristique et le polynôme minimal d'une même matrice ont les mêmes facteurs irréductibles.*

Soit M une matrice $n \times n$ à coefficients dans dans un corps $\mathbb{K}$. On dit que M est trigonalisable dans $\mathbb{K}$ s'il existe une matrice $n \times n$ triangulaire T à coefficients dans $\mathbb{K}$ et une matrice $n \times n$ inversible P à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que $M = PTP^{-1}$. En termes d'endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, ceci revient à l'existence d'une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme est triangulaire.

(a) Si M est trigonalisable, le polynôme caractéristique de M est-il scindé dans $\mathbb{K}$? le polynôme minimal de M est-il scindé dans $\mathbb{K}$?

(b) Si M est diagonalisable, le polynôme caractéristique de M est-il à racine simples dans $\mathbb{K}$? le polynôme minimal de M est-il à racine simples dans $\mathbb{K}$?

Exercice 3. *On verra en cours qu'un endomorphisme ou une matrice est trigonalisable sur le corps $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme minimal est scindé sur $\mathbb{K}$.*

(a) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et le factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$ comme produits de facteurs irréductibles.

(b) La matrice M est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$? et dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$?

(c) La matrice M est-elle trigonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$? et dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 4. On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que le polynôme $X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de la A.

(b) En déduire sans calcul le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.

(c) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Diagonalisation

Exercice 5. *On pourra utiliser que si la restriction d'un endomorphisme à un sous-espace stable n'est pas diagonalisable, alors l'endomorphisme initial ne l'est pas*

Pour chacune des matrices suivantes de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ déterminer si elle est diagonalisable, et si oui, calculer les vecteurs propres et la diagonaliser :

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calcul de polynômes minimaux

Exercice 6. Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

On a $\chi_A = -(X+1)(X+2)(X-3)$, $\chi_B = (X-1)(X+2)^2$ et $\chi_C = (X-1)^3$.

(a) Déterminer les polynômes minimaux de A, B et C.
(b) Pour chacune des matrices A, B et C, déterminer si elle est diagonalisable ou non.

Exercice 7. Déterminer le polynôme minimal des matrices de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ suivantes :

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 8. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Si $c \neq 1$, calculer $(M - \mathrm{Id}_3)(M - c\mathrm{Id}_3)$. En déduire le polynôme minimal de M en fonction de a, b et c. Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la matrice M est-elle diagonalisable ?

(b) Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ est-elle diagonalisable ?

Applications

Exercice 9. On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) La matrice A est-elle diagonalisable ?
(b) Calculer $(A - 2I_3)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.
(c) En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10. On considère les matrices $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ et $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$.
(b) Déterminer une matrice $C \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^3 = D$.
(c) En déduire une matrice $B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$.

Exercice 11. On considère les matrices $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$

(a) Montrer que D est diagonalisable.
(b) Déterminer les polynômes caractéristiques et les polynômes minimaux de A, B et C.
(c) Parmi les matrices A, B et C, lesquelles sont diagonalisables et laquelle est semblable à D ?

Réduction de Jordan

Exercice 12. Donner la forme de Jordan de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 13.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Déterminer le polynôme caractéristique de A et le polynôme minimal de A.
(b) La matrice A est-elle diagonalisable ?
(c) Déterminer les valeurs propres de A et ses vecteurs propres.
(d) Montrer que la matrice $N = A - 2\mathrm{Id}$ est nilpotente et déterminer son indice de nilpotence.
(e) Exprimer A^2 en fonction de N et de Id.
(f) Déterminer le nombre de blocs de Jordan et la taille du plus grand bloc dans la décomposition de Jordan de A^2. Donner la forme de Jordan de A^2.

Exercice 14. Réduire sous forme de Jordan (si possible) les matrices réelles suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15. On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A et en déduire la forme de Jordan de A.
(b) On note J la forme de Jordan de A et soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer J^n.
(c) Déterminer une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = J$.
(d) Calculer A^n.
(e) Retrouver le résultat précédent en utilisant la division euclidienne de X^n par χ_A.

Pour aller plus loin

Exercice 16. En utilisant les matrices, déterminer le terme général de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes, définies par $u_0 = -1$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(a) $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$,
(b) $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$,
(c) $u_{n+2} = -u_n$.

Feuille de TD 4 : Exponentielle de matrices

On rappelle que l'exponentielle d'une matrice carrée M est la matrice carrée de même taille, somme convergente de la série

$$\exp(M) = e^M := \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$$

Calcul d'exponentielles de matrices

Exercice 17. Soit les matrices $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer e^{A+B} et e^Ae^B.

Exercice 18. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 11 & 17 & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente et calculer e^A.

Exercice 19. On note $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer e^{tA}.

Exercice 20. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.
(b) La matrice A est-elle diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) ? Triangularisable (sur $\mathbb{R}$) ?
(c) Les nombres $\det\left(e^A\right)$ et $e^{\operatorname{tr} A}$ sont-ils égaux.

Exercice 21. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si les matrices A et B commutent alors les matrices A et $\exp(B)$ commutent également.

Système linéaire

Exercice 22. *Soit M une matrice carrée de taille n à coefficient réels. On verra en cours que l'application $e : t \mapsto \exp(tM)$ est dérivable de dérivée $e'(t) = Me(t)$ et que la seule application X de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ solution du système $X' = MX$ avec la condition initiale $X(0) = Y$ est $X(t) = e^{tM}Y$.*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA)$
(b) Résoudre, avec la condition initiale $(x(0), y(0), z(0)) = (1, -2, 1)$, le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= 2x - y + z \\ y' &= \quad 3y - z \\ z' &= 2x + y + 3z \end{cases}$$

Exercice 23. On reprend l'exercice précédent.

(a) Vérifier que la matrice A est inversible et que tout sytème $X' = AX + B$ est donc équivalent à $Y' = AX$ si $Y := X + A^{-1}B$.
(b) Résoudre avec la condition initiale $(x(0), y(0), z(0)) = (1, -2, 1)$, le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= 2x - y + z + 1 \\ y' &= \quad 3y - z + 2 \\ z' &= 2x + y + 3z + 3 \end{cases} .$$

Exercice 24 (Oscillateur harmonique)**.** L'équation du mouvement d'une masse attachée à un ressort s'écrit $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$ où $x(t)$ est la position à l'instant t par rapport au point d'équilibre et $\omega > 0$ est appelée pulsation. On considère alors le vecteur position vitesse $X(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que le vecteur $X(t)$ vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme $X'(t) = AX(t)$ où A est une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ à préciser.
(b) Résoudre l'équation $X'(t) = AX(t)$ avec conditions initiales $X(0) = (1, 0)$.
(c) Représenter en fonction du temps, la position d'une masse attachée à un ressort et lachée à l'instant $t = 0$ à l'abscisse $x = 1$ avec une vitesse initiale nulle.

Pour aller plus loin

Exercice 25. Soit A une matrice diagonalisable et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres deux à deux distinctes. On note $L_i := \frac{\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq i}} (X - \lambda_j)}{\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq i}} (\lambda_i - \lambda_j)}$ les polynômes de Lagrange des valeurs propres. Montrer que $L_i(f)$ est le projecteur de E sur E_{λ_i} parallèlement à $\oplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}$.