UNIVERSITÉ DE RENNES 1

**Calcul Matriciel**

# Feuille de TD 2 : Espaces euclidiens

## 1. Exercices de base sur le produit scalaire

**Exercice 1.** On considère l'application

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ ((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) & \mapsto & x_1x_2 + 2y_1y_2 + 3z_1z_2 + x_1y_2 + y_1x_2 \end{array}.$$

(a) Est-ce un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ ? Justifier.
(b) Si oui, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est-elle orthonormale pour ce produit scalaire ?
(c) En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique, déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ orthonormale pour ce produit scalaire.

**Exercice 2.** Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne induite par $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Les deux questions ci-dessous sont indépendantes.

(a) Montrer que, pour tous $v,w \in E$, $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right)$.
(b) Soit $\{v_1,\dots,v_p\}$ une famille orthogonale de $E$. Montrer que $\left\|\sum_{i=1}^{p} v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p}\|v_i\|^2$.

**Exercice 3.** Montrer que pour tout $n$-uplet $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de nombres réels

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$

**Exercice 4.** On considère $(\mathbb{R}^3,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{standard}})$.

(a) Écrire la matrice $A$ dans la base canonique de la projection orthogonale $p$ sur le plan $P$ d'équation $x-2y+z=0$. (*On pourra déterminer une base orthonormale* $(v_1,v_2)$ *de* $P$.)
(b) Est-ce une matrice orthogonale ? symétrique ?

## 2. Orthogonalité

**Exercice 5.** Déterminer l'orthogonal

(a) du vecteur $(1,1,1)$ dans l'espace euclidien $\left(\mathbb{R}^3,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{standard}}\right)$,
(b) de l'hyperplan d'équation $x+2y-z+t=0$ dans $\left(\mathbb{R}^4,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{standard}}\right)$,
(c) du sous-espace vectoriel engendré par $(1,1,0)$ et $(-1,2,1)$ dans $\left(\mathbb{R}^3,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{standard}}\right)$.

**Exercice 6.** Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles de $E$.

(a) Montrer que $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$ (où $\mathrm{Vect}(A)$ est le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par les vecteurs de $A$).
(b) Montrer que $(A\cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

**Exercice 7.** Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux familles libres

(a) $\{(1,1),(2,3)\}$ de $\left(\mathbb{R}^2,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{standard}}\right)$,
(b) $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ de $\left(\mathbb{R}^3,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{standard}}\right)$,
(c) $\{(1,2,1),(-1,0,-1)\}$ de $\left(\mathbb{R}^3,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{standard}}\right)$, puis, pour ce cas, compléter la famille orthonormale obtenue en une base orthonormale de $\left(\mathbb{R}^3,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{standard}}\right)$,

(d) $\{(1,0,1),(1,1,1),(-1,1,0)\}$ de $\left(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{standard}}\right)$, puis, pour ce cas, donner la décomposition $QR$ de la matrice $A$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont formées, dans l'ordre, par les vecteurs $(1,0,1)$, $(1,1,1)$ et $(-1,1,0)$ soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

## 3. Sur les espaces de polynômes

**Exercice 8.** Pour tous polynômes $P$ et $Q$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on définit $\langle P, Q\rangle := \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

(a) Vérifier que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \langle P, Q\rangle \end{array}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) Écrire la matrice de ce produit scalaire dans la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

(c) Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

(d) Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour ce produit scalaire en termes d'intégrales.

## 4. Matrices orthogonales

**Exercice 9.** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Ecrire les équations en $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ caractérisant l'orthogonalité de $A$.

(b) En déduire la forme générale des matrices orthogonales de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

**Exercice 10.** Déterminer si les matrices suivantes de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sont orthogonales :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 11.** (a) La matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle orthogonale ?

(b) Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x - y + 2z & = 3 \\ 2x + 2y - z & = 6 \\ -x + 2y + 2z & = 9 \end{cases}$$

## 5. Décomposition $QR$

**Exercice 12.** Déterminer la décomposition $QR$ des matrices inversibles suivantes :

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

## 6. Sur les espaces hermitiens

**Exercice 13.** On considère $\mathbb{C}^3$ muni du produit scalaire hermitien standard

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix} \right\rangle = z_1\overline{z_1'} + z_2\overline{z_2'} + z_3\overline{z_3'}.$$

(a) Les vecteurs $v = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ? Calculer $\|v\|^2$, $\|w\|^2$ et $\|v+w\|^2$.

(b) Soit $v$ et $w$ deux vecteurs, avec $w \neq 0$. On note $v' := \frac{<v,w>w}{\|w\|^2}$. Vérifier que $v'$ est le projeté orthogonal de $v$ sur $\mathrm{Vect} w$. Calculer $\|v - v'\|^2$.

(c) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.