UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Calcul Matriciel

Feuille de TD 1 : Dualité

Dans cette feuille, les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ sont munis de la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et leurs duaux $(\mathbb{R}^n)^\star$ de la base duale $\mathcal{B}^\star_{\text{can}} = (e_i^\star)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

1. Exercices élémentaires sur la dualité

Exercice 1.

(a) Vérifier que la base $\mathcal{C} = \{-2e_1^\star + \frac{3}{2}e_2^\star, e_1^\star - \frac{1}{2}e_2^\star\}$ de $(\mathbb{R}^3)^\star$ est la base duale de la base $\mathcal{B} = \{(1,2),(3,4)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

(b) Déterminer la base duale de la base $\{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2. Montrer que les formes linéaires

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & 2x_1 - x_2 + x_3 \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & x_1 + 3x_2 + 5x_3 \end{array}$$

forment une famille libre de $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ et la compléter en une base de $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$.

Exercice 3.

(a) Écrire la matrice des coordonnées dans la base $\mathcal{B}^\star_{\text{can}}$ de $(\mathbb{R}^3)^\star$ de la famille

$$\begin{array}{l} \varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{array}, \\ \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & x_2 + x_3 \end{array}, \\ \varphi_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \end{array} \end{array} .$$

(b) En déduire que la famille $(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ est une base de $\left(\mathbb{R}^3\right)^\star$

(c) En déterminer la base antéduale (v_1, v_2, v_3).

(d) Vérifier les résultats en calculant $\varphi_1(v_1)$, $\varphi_2(v_1)$ et $\varphi_3(v_1)$.

Exercice 4. Soit $a = (1, 2i, 0)$, $b = (3, 4, 0)$ et $c = (0, 0, 1+i)$ trois vecteurs de $\mathbb{C}^3$.

(a) Montrer que $\mathcal{B} = \{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

(b) Déterminer la base duale de la base $\mathcal{B}$.

(c) Déterminer une forme linéaire sur $\mathbb{C}^3$ qui vaut 1 sur a, 2 sur b et 3 sur c.

2. Pour construire des équations

Exercice 5. *Le but de l'exercice est de déterminer un système d'équations linéaires en les coordonnées pour un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^5$.

(a) Soit $a = (1,2,0,0,0)$, $b = (3,4,0,0,0)$ et $c = (0,0,1,1,1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^5$ et V le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(a,b,c)$ de $\mathbb{R}^5$ engendré par $\{a,b,c\}$. Montrer que $\{a,b,c\}$ est une base de V et une famille libre de $\mathbb{R}^5$.

(b) La compléter en une base $\mathcal{B} = \{a,b,c,d,e\}$ de $\mathbb{R}^5$.

(c) Déterminer la base duale $\mathcal{B}^\star = (a^\star, b^\star, c^\star, d^\star, e^\star)$ de la base $\mathcal{B}$.

(d) Déterminer un système d'équations linéaires pour V.

Exercice 6. Déterminer un système d'équations linéaires pour le sous-espace W de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\alpha = (1,2,-3,2)$, $\beta = (1,1,-2,2)$, $\gamma = (0,1,-1,0)$.

Exercice 7. *Le but de l'exercice est de déterminer une base pour un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^5$ *donné par un système d'équations. Soit*

$$V = \{(x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0\}.$$

La méthode de Gauss permet d'en déterminer une base. Nous allons utiliser une autre méthode, basée sur la notion de base antéduale.

(a) Donner deux formes linéaires φ_1 et φ_2 sur $\mathbb{R}^5$ telles que

$$V = \{(x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5, \varphi_1 = 0 \text{ et } \varphi_2 = 0\}.$$

(b) Vérifier que la famille (φ_1, φ_2) est une famille libre de $(\mathbb{R}^5)^*$ et la compléter en une base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_5)$ de $(\mathbb{R}^5)^*$.

(c) Déterminer la base antéduale $(e_1, \ldots, e_5)$ de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_5)$.

(d) En déduire une base de V.

3. Sur les espaces de polynômes

Exercice 8 (Une formule bien connue). Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes en une indéterminée, à coefficients réels et de degré au plus n. On considère la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}} = (P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n) = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

(a) Montrer que la base duale de $\mathcal{B}_{\text{can}}$ est $\mathcal{B}^\star_{\text{can}} = (P_0^*, P_1^*, P_2^* \ldots, P_n^*)$ où $P_k^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \end{array}$.

(b) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. Écrire explicitement la formule

$$P(X) = \sum_k P_k^*(P) P_k(X).$$

Exercice 9 (Polynômes de Lagrange).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ des nombres réels deux à deux distincts. Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on définit l'application

$$\varphi_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(\alpha_i) \end{array}$$

(a) Vérifier que, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, φ_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Écrire la matrice des coordonnées de la famille $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ dans la base $\mathcal{B}^\star_{\text{can}}$ de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

(c) En déduire que la famille $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

(d) Déterminer la base antéduale de la base $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ de $(\mathbb{R}_n[X])^*$ (autrement dit une base $\{L_0, \ldots, L_n\}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que, pour tout $i, j \in \{0, \ldots, n\}$, $L_j(\alpha_i) = \delta_{i\,j}$).

4. Pour aller plus loin

Exercice 10. *On définit l'annulateur* F^0 *d'un sous-espace vectoriel* F *d'un espace vectoriel* E *comme le sous-espace vectoriel du dual* $E^\star$ *des formes linéaires nulles sur* F

$$F^0 := \{\varphi \in E^\star, \forall v \in F, \varphi(v) = 0\}.$$

Une propriété importante est, si E *est de dimension finie, l'égalité* $\dim F^0 + \dim F = \dim E$.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

(a) si $F_1 \subset F_2$, alors $F_2^0 \subset F_1^0$,

(b) $(F_1 + F_2)^0 = F_1^0 \cap F_2^0$,

(c) $(F_1 \cap F_2)^0 = F_1^0 + F_2^0$ (indication : montrer l'une des deux inclusions puis utiliser un argument de dimension pour conclure).

(d) On reprend l'exercice 5. Soit $f = (1, 4, 1, 2, 0)$ et $V' = vect(a, b, c, f) = V + vect(f)$. Montrer que

$$(V')^\circ = (V + vect(f))^\circ = V^\circ \cap (vect(f))^\circ,$$

déterminer l'annulateur $(V')^\circ$ de V' et un système d'équation pour V'.