UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Calcul Matriciel

Examen terminal / Décembre 2021

Durée : 2 heures

Nous recommandons de bien rédiger les questions que vous choisissez de traiter, plutôt que d'en traiter beaucoup. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la note. Toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration. On peut admettre explicitement le résultat d'une question pour l'utiliser ultérieurement. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Il est bon de relire sa copie... Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.

Exercice 1 (Exponentielle, 2 points)**.**

(a) Démontrer que la transposée ${}^t\exp(A)$ de l'exponentielle d'une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est l'exponentielle $\exp({}^tA)$ de sa transposée.

(b) Démontrer que l'exponentielle d'une matrice A anti-symétrique (i.e. vérifiant ${}^tA = -A$) est orthogonale.

Exercice 2 (Diagonalisation, 5 points)**.**

(a) Montrer que la matrice $A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$? Les espaces propres de A sont-ils deux à deux orthogonaux ?

(b) Montrer que 10 est valeur propre de A et déterminer les autres valeurs propres.

(c) Déterminer une matrice $P \in M_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D \in M_3(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale. On calculera P^{-1}.

(d) (i) Pour tout entier naturel k écrire la matrice $(\frac{A}{10})^k$ à l'aide de k, P et D.

(ii) Déterminer la limite de la suite $((\frac{A}{10})^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3 (Décomposition LU, 5 points)**.**

(a) La matrice $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est $\det B = 30$ admet-elle une décomposition LU c'est à dire une écriture $B = LU$ où L est une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et U une matrice triangulaire supérieure inversible.

(b) Si oui, déterminer la décomposition LU de B. Vérifier que le résultat est compatible avec l'égalité $\det B = 30$.

(c) À l'aide de la décomposition LU, résoudre l'équation $BX = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Tourner s.v.p.

Exercice 4 (Matrices stochastiques, 4 points)**.**

(a) Pour quelles valeurs de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ la matrice symétrique réelle

$$E_{abc} := \begin{pmatrix} 0,2 & a & b \\ a & 0,1 & c \\ b & c & 0,1 \end{pmatrix}$$

est-elle stochastique ? On notera E la matrice obtenue.

(b) La matrice E admet-elle un vecteur d'état ? Si oui, déterminer ce vecteur d'état.

(c) La suite $(E^k)_{k\in\mathbb{N}}$ des puissances de E admet-elle une limite ? Si oui, déterminer cette limite.

Exercice 5 (Moindres carrés, 5 points)**.**

Le but de l'exercice est de retrouver en coordonnées le lien entre la projection orthogonale et la résolution d'un système linéaire au sens des moindres carrés.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ des m-uplets $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ muni de son produit scalaire standard

$$\begin{array}{rccc} \langle\ ,\ \rangle : & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R} \\ & (X, Y) & \mapsto & {}^tXY \end{array}.$$

Soit A une matrice de $M_{m,2}(\mathbb{R})$ supposée de rang 2 et C_1 et C_2 les colonnes de la matrice A. Soit B un vecteur fixé dans $\mathbb{R}^m$.

(a) Dans le cas particulier où (C_1, C_2) est une famille orthonormée, calculer ${}^tAA$ et ${}^tAB$ et déterminer l'unique solution $\hat{X}$ de $AX = B$ au sens des moindres carrés, en termes de C_1, C_2 et B.

(b) On suppose désormais que (C_1, C_2) est seulement une famille libre. Soit $\hat{X}$ l'unique solution de $AX = B$ au sens des moindres carrés. On note $\hat{B} := A\hat{X}$.

   (i) Démontrer qu'un vecteur Z de $\mathbb{R}^m$ est orthogonal à l'image de A si et seulement si ${}^tAZ = 0$.

   (i) Montrer que $\hat{B} - B$ est orthogonal à l'image de A

   (iii) En déduire que $\hat{B}$ est le projeté orthogonal de B sur l'image de A.