UNIVERSITÉ DE RENNES 1

**Calcul Matriciel**

# Contrôle continu

Durée : 2 heures

Nous recommandons de bien rédiger les questions que vous choisissez de traiter, plutôt que d'en traiter beaucoup. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la note. Toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration. On peut admettre explicitement le résultat d'une question pour l'utiliser ultérieurement. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Il est bon de relire sa copie... Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.

**Exercice 1** (Dualité, 5 points)**.**
*Le but de l'exercice est de trouver un système d'équations pour un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$.

(a) Soit $a = (1,2,0,0)$, $b = (3,4,1,0)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et $V$ le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(a,b)$ de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{a,b\}$. Montrer que $\{a,b\}$ est une famille libre et la compléter en une base $\mathcal{B} = (a,b,c,d)$ de $\mathbb{R}^4$.
(b) Déterminer la base duale $\mathcal{B}^\star = (a^\star, b^\star, c^\star, d^\star)$ de la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$.
(c) Déterminer l'annulateur $V^\circ$ du sous-espace vectoriel $V$ en termes de $(a^\star, b^\star, c^\star, d^\star)$.
(d) Déterminer un système d'équations pour $V$.

**Exercice 2** (Espaces euclidiens, 3 points)**.**
*Le but de l'exercice est d'obtenir une démonstration différente de celle du cours de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace euclidien et du cas d'égalité.*
Soit $(E, <\,,\,>)$ un espace euclidien.

(a) Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $E$. Préciser le cas d'égalité.
(b) Soit $y$ un vecteur non nul dans $E$ et $Y = \text{Vect}(y)$ la droite engendrée par $y$. Soit $x \in E$. On définit $p(x) = \frac{<x,y>}{\|y\|^2} y$. Montrer que $p(x)$ appartient à $Y$ et que $x - p(x)$ appartient à $Y^\perp$. Représenter $y$, $x$ et $p(x)$ sur une figure dans le cas où l'espace euclidien est $\mathbb{R}^2$ avec son produit scalaire standard, $y = (1,1)$ et $x$ un point du plan (choisi pour produire une figure claire).
(c) Montrer que, avec les notations précédentes, $\|x - p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \frac{<x,y>^2}{\|y\|^2}$.
(d) Conclure.

**Exercice 3** (Forme $QR$, 4 points)**.**

(a) La matrice

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ \sqrt{6} & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ?
(b) Mettre la matrice $A$ sous forme $QR$ ; c'est à dire, trouver une matrice orthogonale $Q$ et une matrice triangulaire supérieure $R$ avec des termes diagonaux strictement positifs telles que $A = QR$.

*Tourner s.v.p.*

**Exercice 4** (Diagonalisation, 2 points)**.**
Pour quelles valeurs de $a$, $b$ et $c$ réels, la matrice

$$M_{abc} := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ? et dans $\mathbb{C}$ ?

**Exercice 5** (Diagonalisation, 3 points)**.**
Soit $n$ un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels en une indéterminée de degré inférieur à $n$. On considère l'endomorphisme

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(2-X) \end{array}$$

(a) Déterminer $f \circ f$.
(b) Montrer que $f$ est diagonalisable.
(c) Préciser son spectre. *On ne demande pas de déterminer de vecteurs propres.*

**Exercice 6** (Forme de Jordan, 4 points)**.**
La matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

de $M_6(\mathbb{R})$ a pour polynôme caractéristique $\chi(X) = (X-2)^2(X-3)^4$ et pour polynôme minimal $\mu(X) = (X-2)(X-3)^2$. (*On ne demande pas de le vérifier.*)

(a) Expliquer pourquoi la matrice $A$ admet une forme de Jordan dans $M_6(\mathbb{R})$ .
(b) Quelles sont les formes de Jordan possibles (sans distinguer l'ordre des blocs) ?
(c) Quelle est la forme de Jordan de $A$ ? Avant de commencer les calculs, décrivez de façon synthétique l'intégralité de votre démarche. (*On ne demande pas d'expliciter une base qui réalise effectivement la forme de Jordan.*)