UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Calcul Matriciel

Contrôle continu/Rattrapage

Durée : 2 heures

Nous recommandons de bien rédiger les questions que vous choisissez de traiter, plutôt que d'en traiter beaucoup. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la note. Toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration. On peut admettre explicitement le résultat d'une question pour l'utiliser ultérieurement. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Il est bon de relire sa copie... Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.

Exercice 1 (Dualité, 5 points)**.**
Le but de l'exercice est de trouver un système d'équations pour un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(a) Soit $a = (1,2,0,0)$, $b = (3,4,1,0)$ et $c = (0,0,1,1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et V le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(a,b,c)$ de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{a,b,c\}$. Montrer que $\{a,b,c\}$ est une famille libre et la compléter en une base $\mathcal{B} = (a,b,c,d)$ de $\mathbb{R}^4$.

(b) Déterminer la base duale $\mathcal{B}^\star = (a^\star, b^\star, c^\star, d^\star)$ de la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$.

(c) Déterminer l'annulateur V° du sous-espace vectoriel V en termes de $(a^\star, b^\star, c^\star, d^\star)$.

(d) Déterminer un système d'équations pour V.

Exercice 2 (Espaces euclidiens, 4 points)**.**

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes en une indéterminée à coefficients réels et de degré inférieur à 2.

(a) Montrer que l'application

$$< .,. >: \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1) \end{array}$$

est un produit scalaire sur E.

(b) Montrer que la famille $\mathcal{P} = (P_1, P_2, P_3)$ avec $P_1(X) = X(X-1)$, $P_2(X) = (X-1)(X+1)$, $P_3(X) = X(X+1)$ est une base de E.

(c) La famille $\mathcal{P}$ est-elle une famille orthogonale de E ? une famille orthonormale de E ?

Exercice 3 (Forme QR, 4 points)**.**

(a) La matrice

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

admet-elle une forme QR, c'est à dire une écriture $A = QR$ où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure R avec des termes diagonaux strictement positifs ?

(b) Si oui, mettre la matrice A sous forme QR.

Tourner s.v.p.

Exercice 4 (Diagonalisation, 4 points).

(a) Déterminer les puissances de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? et dans $\mathbb{C}$?

Exercice 5 (Trigonalisation, 4 points).

(a) La matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$ est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$?

(b) Si oui, déterminer une base de trigonalisation de A.