UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Calcul Matriciel

Examen de seconde session / Juin 2022

Durée : 2 heures

Toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration.

Nous recommandons de bien rédiger les questions que vous choisissez de traiter, plutôt que d'en traiter beaucoup. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte.

On peut admettre explicitement le résultat d'une question pour l'utiliser ultérieurement. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Il est bon de relire sa copie...

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.

Exercice 1 (Questions de cours, 3 points)**.**

(a) La matrice

$$E := \begin{pmatrix} -0,2 & 0,8 & 0,4 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}$$

est-elle stochastique ? Le nombre 1 est-il l'une de ses valeurs propres ?

(b) (i) Rappeler la définition du rayon spectral d'une matrice carrée A à coefficients complexes.

(ii) Donner une condition suffisante en termes de rayon spectral qui assure la convergence de la suite des puissances $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'une matrice carrée A de taille n à coefficients complexes, vers la matrice nulle carrée de taille n.

Exercice 2 (Diagonalisation, 6 points)**.**

(a) La matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?

(b) Les espaces propres de M sont-ils deux à deux orthogonaux ?

(c) Montrer que 0 est valeur propre de M et déterminer les autres valeurs propres.

(d) Déterminer si possible une base de $\mathbb{R}^3$ composée de vecteurs propres de M.

(e) Diagonaliser M en précisant les matrices de passage P et P^{-1} telles que $M = PDP^{-1}$.

(f) La matrice M admet-elle une racine carrée réelle ?

Tourner s.v.p.

Exercice 3 (Décomposition QR, 5 points)**.**

(a) Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $M_3(R)$ admet une décomposition QR où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

(b) Déterminer la décomposition QR de B.

Exercice 4 (Formes de Jordan, 6 points)**.**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Déterminer le polynôme caractéristique de A et le polynôme minimal de A.

(b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(c) Déterminer les valeurs propres de A et ses espaces propres.

(d) Montrer que la matrice $N = A - 2\mathrm{Id}$ est nilpotente et déterminer son indice de nilpotence.

(e) Exprimer A^2 en fonction de N et de Id.

(f) Déterminer le nombre de blocs de Jordan et la taille du plus grand bloc dans la décomposition de Jordan de A^2. Donner la forme de Jordan de A^2.