CALCUL MATRICIEL

Christophe Mourougane
(sur la base d'un texte de Fabien Priziac)

Licence 3 de Mathématiques,
année universitaire 2022-2023

Table des matières

Index des notations

Soit

$\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque,

n, p et k des entiers naturels non nuls,

i et j deux nombres de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$,

E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$,

$v, v_1, \ldots, v_k$ des vecteurs de E,

S un sous-ensemble quelconque de E,

f une application linéaire de E dans F,

g un endomorphisme de E,

$\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ une base de F,

A une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$,

M une matrice carrée de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$,

P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$,

R un anneau commutatif et $x_1, \ldots, x_k$ des éléments de R.

Alors, on utilisera les notations

$\mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_k\}$: sous-espace vectoriel de E engendré par $v_1, \ldots, v_k$.

$\mathrm{Vect}(S)$: sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs de E contenus dans S.

$\dim(E)$: dimension de E sur $\mathbb{K}$ si E est de dimension finie.

$\mathcal{L}(E, F)$: espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des applications linéaires de E dans F.

$\mathcal{L}(E)$: espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des endomorphismes de E ($\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$).

Id_E : application identité de E.

$\mathrm{Ker}\, f$: noyau de f (il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E).

$\mathrm{Im}\, f$: image de f (il s'agit d'un sous-espace vectoriel de F).

$\mathrm{rg}\,(f)$: rang de l'application linéaire f.

$\det\,(g)$: déterminant de l'endomorphisme g.

$\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$: espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

I_n : matrice identité de taille n.

$0_{n,p}$: matrice à n lignes et p colonnes avec uniquement des coefficients nuls.

$E_{i\,j}$: matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ avec un coefficient 1 sur la ligne i et la colonne j, et des coefficients nuls partout ailleurs.

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$: vecteur colonne (matrice colonne) des coordonnées du vecteur v dans la base $\mathcal{B}$.

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$: matrice représentative de f dans les bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F.

$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$: matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ (il s'agit de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$. Noter que $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''}$).

$\mathrm{Tr}(M)$: trace de la matrice M i.e. la somme des coefficients diagonaux de M.

$\mathrm{Ker}\, A$: noyau de la matrice A.

$\mathrm{rg}(A)$: rang de la matrice A.

$\det(M)$: déterminant de la matrice M.

${}^tA$: transposée de la matrice A.

$\mathbb{K}_n[X]$: espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des polynômes en une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré au plus n.

$\deg(P)$: degré du polynôme P.

$(x_1, \ldots, x_k)$: idéal de R engendré par les éléments $x_1, \ldots, x_k$.

Chapitre 1

Formes linéaires et dualité linéaire

Introduction

La dualité linéaire est la théorie des formes linéaires sur un espace vectoriel, c'est-à-dire, pour $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque, la théorie des applications linéaires $E \to \mathbb{K}$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. La dualité linéaire est une théorie qui généralise la dualité dans les espaces euclidiens. Elle met en correspondance deux espaces vectoriels E et son dual E^*. Quand E est de plus de dimension finie muni d'un produit scalaire, on peut identifier E^* à E et ainsi retrouver la dualité euclidienne.

On peut également voir la dualité linéaire comme la théorie des équations linéaires sur un espace vectoriel. En particulier, cette théorie nous donne une correspondance explicite entre les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E et les systèmes d'équations linéaires sur E. La dualité linéaire nous fournit également une interprétation vectorielle de l'opération de transposition sur les matrices.

Tout au long de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif quelconque.

1. Formes linéaires sur un espace vectoriel et espace dual

DÉFINITION 1.1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. L'ensemble des formes linéaires sur E muni de l'addition et de la multiplication par les éléments de $\mathbb{K}$ issues des opérations sur l'espace d'arrivée $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ appelé espace dual de E et noté E^*.*

REMARQUE 1.2. Si E est un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$, alors l'application coordonnée $\varphi_i : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ v = \sum_{j=1}^n x_j e_j & \mapsto & x_i \end{array}$ est une forme linéaire sur E.

Montrons que les formes linéaires sur E sont alors exactement les combinaisons linéaires de ces applications coordonnées. Soit φ une forme linéaire sur E. Pour tout vecteur v de E de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$, on a par linéarité

$$\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_1 \underbrace{\varphi(e_1)}_{\in\mathbb{K}} + \cdots + x_n \underbrace{\varphi(e_n)}_{\in\mathbb{K}} = \underbrace{\varphi(e_1)}_{\in\mathbb{K}} \varphi_1(v) + \cdots + \underbrace{\varphi(e_n)}_{\in\mathbb{K}} \varphi_n(v).$$

On en déduit que φ est la combinaison $\varphi(e_1)\varphi_1 + \cdots + \varphi(e_n)\varphi_n$. On peut aussi écrire

$$\varphi(v) = (\varphi(e_1) \cdots \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

La matrice de l'application linéaire φ dans la base $\mathcal{B}$ de E et $\{1\}$ de $\mathbb{K}$ est donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},1}(\varphi) = (\varphi(e_1) \cdots \varphi(e_n))$.

EXEMPLE 1.3 (exemple “fil rouge”). L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & 2x + 3y - 5z \end{array}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, combinaison linéaire des trois formes linéaires coordonnées $(x, y, z) \mapsto$

x, $(x,y,z) \mapsto y$, $(x,y,z) \mapsto z$ de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour tout vecteur (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\varphi(x,y,z) = (2 \ \ 3 \ -5)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

2. Base duale

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Comme $\dim E^* = \dim(\mathcal{L}(E,\mathbb{K})) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{K}) = \dim(E)$, on obtient $\dim(E^*) = \dim(E)$. On peut également le montrer en associant à toute base de E une base de E^* :

THÉORÈME ET DÉFINITION 1.4. *Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Pour $i \in \{1,\ldots,n\}$, on note e_i^* la forme linéaire sur E définie sur la base $\mathcal{B}$ par*

$$\textit{pour tout } j \in \{1,\ldots,n\},\ e_i^*(e_j) = \delta_{i\,j} = \begin{cases} 1 & \textit{si } i = j, \\ 0 & \textit{si } i \neq j. \end{cases}$$

La famille $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ de E^* est une base de E^*, appelée <u>base duale de $\mathcal{B}$</u> et notée $\mathcal{B}^*$.

DÉMONSTRATION. Soit $i \in \{1,\ldots,n\}$. Commençons par remarquer que, par définition, si v est un vecteur de E de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$,

$$e_i^*(v) = e^*(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_1 e_i^*(e_1) + \ldots + x_n e_i^*(e_n) = x_i,$$

autrement dit e_i^* associe à tout vecteur v de E sa $i^{\text{ème}}$ coordonnée dans la base $\mathcal{B}$.

À présent, montrons que la famille $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ de E^* est libre : soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 e_1^* + \ldots + \lambda_n e_n^*$ soit la forme linéaire nulle, i.e., pour tout vecteur v de E, $\lambda_1 e_1^*(v) + \ldots + \lambda_n e_n^*(v) = 0$. En particulier, pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$, $0 = \lambda_1 e_1^*(e_j) + \ldots + \lambda_n e_n^*(e_j) = \lambda_j$ et la famille $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ de E^* est donc libre.

On a vu dans la remarque 1.2 que la famille $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ engendre E^* [1]. □

EXEMPLE 1.5. Si $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, e_i^* est la forme linéaire

$$e_i^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K} \\ (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$$

Les espaces vectoriels E et E^* étant de même dimension finie, sont isomorphes. Cependant, en général, ils ne le sont pas de façon “canonique” : un isomorphisme entre ces deux espaces vectoriels dépend, en général, d'un choix de bases pour E et E^*, ou bien d'un produit scalaire sur E :

PROPOSITION 1.6. *Si E est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $<\ ,\ >$ et si v_0 est un vecteur de E, alors l'application $\varphi_{v_0} : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ v = \sum_{j=1}^n x_j e_j & \mapsto & < v, v_0 > \end{array}$ est une forme linéaire sur E. De plus, l'application $\Phi : \begin{array}{ccc} E & \to & E^* \\ v & \mapsto & \varphi_v \end{array}$ est une application linéaire injective.*

DÉMONSTRATION. Les énoncés de linéarité sont conséquences de la bilinéarité du produit scalaire. Pour montrer l'injectivité de Φ, on considère un vecteur v_0 de E tel que $\Phi(v_0) = 0$, autrement dit orthogonal à tout vecteur de E. En particulier, $\Phi(v_0)(v_0) =< v_0, v_0 >= 0$. Comme le produit scalaire est défini, on en déduit que $v_0 = 0$. L'application Φ est donc injective. □

1. On aurait pu se contenter de montrer le caractère libre ou le caractère générateur de la famille $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ puis d'utiliser le fait, établi précédemment, que $\dim(E^*) = \dim(E) = n$ pour montrer que la famille $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ est une base de E^*. On a cependant fait le choix de la démonstration “complète” ci-dessus pour son intérêt didactique.

EXEMPLE 1.7. On considère la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ formé par les vecteurs $e_1 := (1,1,1)$, $e_2 := (1,0,-1)$ et $e_3 := (0,1,1)$. Déterminons la base duale $\mathcal{B}^*$ de $\mathcal{B}$: précisément, nous allons déterminer les expressions des formes linéaires e_1^*, e_2^* et e_3^* sur $\mathbb{R}^3$.

On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $e_1^*(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3$. L'application e_1^* vérifie

$$\begin{cases} e_1^*(e_1) = 1 \\ e_1^*(e_2) = 0 \\ e_1^*(e_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ a \quad - c = 0 \\ \quad b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Ainsi, e_1^* est l'application

$$e_1^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & x_1 - x_2 + x_3 \end{array}.$$

On cherche à présent $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $e_2^*(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3$. Or

$$\begin{cases} e_2^*(e_1) = 0 \\ e_2^*(e_2) = 1 \\ e_2^*(e_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a \quad - c = 1 \\ \quad b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Ainsi, e_2^* est l'application

$$e_2^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & x_2 - x_3 \end{array}$$

Enfin, on cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $e_3^*(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3$. Or

$$\begin{cases} e_3^*(e_1) = 0 \\ e_3^*(e_2) = 0 \\ e_3^*(e_3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a \quad - c = 0 \\ \quad b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

Ainsi, e_3^* est l'application

$$e_3^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & -x_1 + 2x_2 - x_3 \end{array}$$

REMARQUE 1.8. Attention : parler de “dual d'un vecteur” n'a pas de sens. Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de E et v est un vecteur de E appartenant à chacune de ces deux bases, les vecteurs “v^*” dans $\mathcal{B}_1^*$ et “v^*” dans $\mathcal{B}_2^*$ sont a priori différents (on devrait écrire $v^{*_{\mathcal{B}_1}}$, respectivement $v^{*_{\mathcal{B}_2}}$), car ils sont définis par des conditions impliquant tous les vecteurs de base.

Reprenons les vecteurs $e_1 = (1,1,1)$ et $e_2 = (1,0,-1)$ de $\mathbb{R}^3$ de l'exemple précédent mais posons cette fois $v_3 := (1,0,0)$. La famille $\mathcal{B}' := \{e_1, e_2, v_3\}$ est également une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminons les formes linéaires de la base duale $\mathcal{B}'^*$ de $\mathcal{B}'$: on cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $e_1^*(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3$. Or

$$\begin{cases} e_1^*(e_1) = 1 \\ e_1^*(e_2) = 0 \\ e_1^*(v_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ a \quad - c = 0 \\ a \qquad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Ainsi, e_1^* est l'application

$$e_1^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & x_2 \end{array}$$

On cherche ensuite $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $e_2^*(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3$. Or

$$\begin{cases} e_2^*(e_1) = 0 \\ e_2^*(e_2) = 1 \\ e_2^*(v_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a \quad - c = 1 \\ a \qquad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Ainsi, e_2^* est l'application

$$e_2^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & x_2 - x_3 \end{array}$$

Enfin, on cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $v_3^*(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3$. Or

$$\begin{cases} v_3^*(e_1) = 0 \\ v_3^*(e_2) = 0 \\ v_3^*(v_3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a \quad - c = 0 \\ a \qquad = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Ainsi, v_3^* est l'application

$$v_3^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & x_1 - 2x_2 + x_3 \end{array}$$

On remarque ainsi que $e_2^{*\mathcal{B}'} = e_2^{*\mathcal{B}}$ mais que $e_1^{*\mathcal{B}'} \neq e_1^{*\mathcal{B}}$. A noter également que, même si v_3 est le troisième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $v_3^{*\mathcal{B}'}$ n'est pas l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & x_3 \end{array}$.

PROPOSITION 1.9. *Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $\mathcal{B}^\star = \{e_1^\star, \dots, e_n^\star\}$ sa base duale.*

(i) Pour toute forme linéaire $\varphi \in E^*$, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$, autrement dit φ a pour vecteur de coordonnées dans la base duale $\mathcal{B}^*$ le vecteur $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) \\ \vdots \\ \varphi(e_n) \end{pmatrix} = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},1}(\varphi)$.

(ii) Pour tout vecteur $v \in E$, $v = \sum_{j=1}^{n} e_j^*(v) e_j$, autrement dit v a pour coordonnées $\begin{pmatrix} e_1^*(v) \\ \vdots \\ e_n^*(v) \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

DÉMONSTRATION. (i) Soit $\varphi \in E^*$. Comme les formes linéaires φ et $\sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$ prennent les mêmes valeurs sur les élément de la base $\mathcal{B}$, elles sont égales.

(ii) Soit $v \in E$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ uniques tels que $v = \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j$. Si $i \in \{1, \dots, n\}$, on a alors $e_i^*(v) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_i^*(e_j) = \mu_i$, et donc $v = \sum_{j=1}^{n} e_j^*(v) e_j$.

□

REMARQUE 1.10. Cela peut constituer un moyen "efficace" de déterminer les coordonnées d'une forme linéaire dans une base duale donnée, resp. ("respectivement") d'un vecteur dans une base donnée.

EXEMPLE 1.11.

- Reprenons la forme linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \end{array}$ de l'exemple fil rouge et déterminons ses coordonnées dans la base duale $\mathcal{B}^*$ de l'exemple 1.7. On a $\varphi(e_1) = 0$, $\varphi(e_2) = 7$, $\varphi(e_3) = -2$ et donc $\varphi = 7e_2^* - 2e_3^*$. Remarquons que l'on n'a pas besoin de l'expression des formes linéaires de la base duale pour déterminer les coordonnées de φ dans celle-ci (les expressions obtenues dans l'exemple 1.7 nous permettent cependant de vérifier que la décomposition précédente est bien correcte).

- Si l'on considère le vecteur $v = (3, -4, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, on obtient ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de l'exemple 1.7 en calculant $e_1^*(v) = 8$, $e_2^*(v) = -5$ et $e_3^*(v) = -12$. On a donc $v = 8e_1 - 5e_2 - 12e_3$.

COROLLAIRE 1.12. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et v un vecteur de E qui annule toutes les formes linéaires sur E. Alors v est le vecteur nul.*

DÉMONSTRATION. Si on considère une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E et sa base duale $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$, on a, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $e_j^*(v) = 0$ et donc $v = \sum_{j=1}^{n} e_j^*(v)e_j = 0$. □

La proposition 1.9 nous permet également de montrer que l'opération qui à toute base de E associe sa base duale est injective. Nous montrerons sa surjectivité dans la section suivante.

COROLLAIRE 1.13. *Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{f_1, \dots, f_n\}$ deux bases d'un espace vectoriel E. Si $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}'^*$, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.*

DÉMONSTRATION. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. D'après la proposition 1.9,

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} f_j^*(e_i)f_j = \sum_{j=1}^{n} e_j^*(e_i)f_j = f_i.$$

Ainsi $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. □

3. Aspects matriciels

Comme l'espace vectoriel de dimension finie E^* admet des bases finies, on peut utiliser les outils matriciels pour étudier les formes linéaires de E^*. Comme dans la section précédente, on considère un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ muni d'une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$.

Commençons par une première remarque : si φ est une forme linéaire de E^* et v est un vecteur de E, alors, d'après la remarque 1.2 et la proposition 1.9

$$\varphi(v) = {}^t\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\varphi)\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v).$$

Nous allons nous intéresser au changement de base pour les bases duales : précisément, soit $\mathcal{B}' = \{f_1, \dots, f_n\}$ une autre base de E, on cherche à calculer la matrice de passage de la base duale $\mathcal{B}^*$ à la base duale $\mathcal{B}'^*$ à partir de la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

PROPOSITION 1.14. *On a*

$$P_{\mathcal{B}^* \to \mathcal{B}'^*} = {}^tP_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}{}^{-1} = {}^tP_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}.$$

DÉMONSTRATION. (rappel : la transposition et l'inversion des matrices inversibles commutent si bien que ${}^t(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{}^{-1}) = ({}^tP_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1}$). Pour simplifier les écritures, on note $P = (p_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} := P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ et $Q = (q_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} := P_{\mathcal{B}^*\to\mathcal{B}'^*}$.

On considère les matrices de passage comme agissant sur les coordonnées : soit v un point de E de vecteur de coordonnées $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. Le vecteur de coordonnées $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = X'$ de v dans la base $\mathcal{B}'$ est alors $X' = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{-1}X = P^{-1}X$. On écrit de même pour une forme linéaire φ sur E, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\varphi) = Y$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'^*}(\varphi) = Y'$ avec $Y' = Q^{-1}Y$. Maintenant,

$$\varphi(v) = {}^tYX = {}^tY'X' = {}^t(Q^{-1}Y)(P^{-1}X) = {}^tY({}^tQ^{-1}P^{-1})X.$$

En appliquant à tous les vecteurs X et Y la relation ${}^tYI_nX = {}^tY({}^tQ^{-1}P^{-1})X$, on en déduit que $I_n = {}^tQ^{-1}P^{-1}$ et donc $Q = {}^tP^{-1}$.

Autre démonstration : On écrit pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, la décomposition de f_i^* dans la base $\mathcal{B}^*$: $f_i^* = \sum_{k=1}^n q_{k\,i} e_k^*$ et la décomposition de f_j dans la base $\mathcal{B}$: $f_j = \sum_{l=1}^n p_{l\,j} e_l$. Nous allons montrer que $I_n = {}^tQP$ et donc $Q = {}^tP^{-1}$.

Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice identité I_n est $\delta_{i,j}$ et, par définition de la base duale $\mathcal{B}'^* = \{f_1^*, \dots, f_n^*\}$, on a

$$\begin{aligned} \delta_{i,j} &= f_i^*(f_j) = \left(\sum_{k=1}^n q_{k\,i} e_k^*\right)\left(\sum_{l=1}^n p_{l\,j} e_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n q_{k\,i} p_{l\,j} e_k^*(e_l) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n q_{k\,i} p_{l\,j} \delta_{k,l} = \sum_{k=1}^n q_{k\,i} p_{k\,j}. \end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^n q_{k\,i} p_{k\,j}$ est justement le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice produit ${}^tQP$. Ainsi, on a bien $I_n = {}^tQP$ i.e. $Q = {}^tP^{-1}$ i.e. $P_{\mathcal{B}^* \to \mathcal{B}'^*} = {}^tP_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}{}^{-1}$. □

À l'aide de cette propriété, on peut également montrer la surjectivité, et donc la bijectivité (voir corollaire 1.13 ci-dessus), de l'opération qui associe à toute base $\mathcal{B}$ de E sa base duale $\mathcal{B}^*$ de E^* :

COROLLAIRE ET DÉFINITION 1.15. *Pour toute base $\mathcal{C}$ de E^*, il existe une et une seule base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{C} = \mathcal{B}^*$. On appelle $\mathcal{B}$ la <u>base antéduale de $\mathcal{C}$</u>.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{C}$ une base de E^*. Fixons maintenant $\mathcal{B}_0$ une base quelconque de E et considérons la matrice $Q := {}^tP_{\mathcal{B}_0^* \to \mathcal{C}}{}^{-1}$. Comme il s'agit d'une matrice inversible de taille n, Q peut être considérée comme la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}_0$ de E à une base $\mathcal{B}$ (les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}_0$ sont données par les colonnes de Q) et on a alors, d'après la proposition précédente,

$$P_{\mathcal{B}_0^* \to \mathcal{B}^*} = {}^tP_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}{}^{-1} = {}^tQ^{-1} = P_{\mathcal{B}_0^* \to \mathcal{C}},$$

de sorte que les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}_0^*$ sont les mêmes que les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}^*$ dans la base $\mathcal{B}_0^*$ et donc $\mathcal{C} = \mathcal{B}^*$. L'unicité a été démontrée précédemment. □

EXEMPLE 1.16. On considère les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \to & x_1 + x_2 + x_3 \end{array}, \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \to & -x_1 + x_3 \end{array}, \varphi_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \to & x_2 + x_3 \end{array}$$

La famille $\mathcal{C} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$. Pour le voir, on écrit les coordonnées de φ_1, φ_2 et φ_3 dans la base duale $\mathcal{B}_0^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ de la base canonique $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$: on a $\varphi_1 = e_1^* + e_2^* + e_3^*$, $\varphi_2 = -e_1^* + e_3^*$ et $\varphi_3 = e_2^* + e_3^*$, et la matrice

$$P := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dont les colonnes sont les coordonnées de φ_1, φ_2 et φ_3 dans la base $\mathcal{B}^*$, est inversible.

On cherche maintenant à déterminer la base antéduale $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de la base $\mathcal{C}$. On procède comme dans la démonstration précédente : la matrice P ci-dessus est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0^*$ à $\mathcal{C}$ et la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ est alors la matrice ${}^tP^{-1}$. On obtient

$${}^tP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et on a donc $v_1 = e_1 - e_2 + e_3 = (1, -1, 1)$, $v_2 = -e_2 + e_3 = (0, -1, 1)$ et $v_3 = -e_1 + 2e_2 - e_3 = (-1, 2, -1)$. On vérifie par exemple que $\varphi_1(v_1) = 1, \varphi_1(v_2) = 0, \varphi_1(v_3) = 0$.

4. Hyperplans

DÉFINITION 1.17. *Soit $\varphi \in E^*$ une forme linéaire sur E non nulle. On appelle* <u>*hyperplan linéaire*</u> *de E déterminé par φ le noyau* Ker φ *de φ.*

EXEMPLE 1.18 (suite de l'exemple "fil rouge"). L'hyperplan de $\mathbb{R}^3$ déterminé par φ est le sous-espace vectoriel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - 5y = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Quand il n'y a pas de risque de confusion avec les hyperplans affines par exemple, on omet l'adjectif "linéaire". L'appellation "hyperplan" est justifiée par le fait que, si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, l'hyperplan déterminée par une forme linéaire sur E non identiquement nulle est effectivement un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$. Nous allons montrer ce fait ci-dessous, ainsi que sa réciproque :

PROPOSITION 1.19.
- *(i) Les sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$ d'un espace vectoriel E de dimension n sont exactement les noyaux de formes linéaires non nulles.*
- *(ii) Les sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$ d'un espace vectoriel E de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$ sont exactement les sous-espaces vectoriels définis par une équation linéaire non nulle en les coordonnées.*
- *(iii) De plus, deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles.*
- *(iv) Deux équations linéaires non nulles en les coordonnées dans une base de E définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.*
- *(v) L'espace des solutions d'un système d'équations linéaires en les coordonnées dans une base de E est l'intersection des hyperplans correspondants.*

DÉMONSTRATION.
(i) Soit $\varphi \in E^*\backslash\{0\}$. L'image $\mathrm{Im}\,\varphi$ de φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$. Puisque la dimension de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{K}$ est 1, la dimension de $\mathrm{Im}\,\varphi$ sur $\mathbb{K}$ est inférieure ou égale à 1. Comme les seuls sous-espaces de $\mathbb{K}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{K}$ et comme φ est non identiquement nulle, la dimension de $\mathrm{Im}\,\varphi$ est 1. Par le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = n - 1,$$

i.e. l'hyperplan de E déterminé par φ est de dimension $n-1$.

Réciproquement, soit H un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$. Puisque H est strictement inclus dans E, il existe v_0 un vecteur de E n'appartenant pas à H. Alors les sous-espaces vectoriels H et $\mathrm{Vect}\{v_0\}$ de E sont en somme directe et, par un argument de dimension, $E = H \oplus \mathrm{Vect}\{v_0\}$. Ainsi, tout vecteur v de E se décompose de façon unique en une somme $v = u_v + \lambda_v v_0$ avec $u_v \in H$ et $\lambda_v \in \mathbb{K}$. Si φ désigne alors la forme linéaire $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ v & \mapsto & \lambda_v \end{array}$, on a $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$, i.e. H est l'hyperplan de E déterminé par la forme linéaire φ.[2]

(ii) Si de plus E est muni d'une base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, tout noyau $\ker\varphi$ d'une forme linéaire non nulle φ est défini par l'équation linéaire non nulle $\underbrace{\varphi(e_1)}_{\in\mathbb{K}} x_1 + \cdots + \underbrace{\varphi(e_n)}_{\in\mathbb{K}} x_n = 0$.

Réciproquement, si H est un sous-espace vectoriel défini par l'équation linéaire non nulle $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ en les coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$ avec

2. La projection sur $\mathrm{Vect}\{v_0\}$ parallèlement à H a pour noyau H. Le choix de la base $\{v_0\}$ de $\mathrm{Vect}\{v_0\}$ a permis de la transformer en une forme linéaire de même noyau.

$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{(0, \ldots, 0)\}$, alors H est le noyau de la forme linéaire non nulle

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n & \mapsto & a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \end{array}.$$

(iii) Si deux formes linéaires non nulles sur E sont proportionnelles, elles ont même noyau. Si deux formes linéaires φ et φ' non nulles ont même noyau, soit v un vecteur de E hors de ce noyau. Alors

$$\varphi' = \underbrace{\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}}_{\in \mathbb{K}} \varphi$$

car ces deux formes linéaires sont égales sur $\ker \varphi \oplus \mathbb{K}v = E$.

(iv) Si deux équations linéaires $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ et $a'_1 x_1 + \cdots + a'_n x_n = 0$ ont le même hyperplan de solutions, alors les deux formes linéaires associées ont le même noyau, et sont donc proportionnelles. Les équations $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ et $a'_1 x_1 + \cdots + a'_n x_n = 0$ le sont donc aussi.

(v) Vérifier plusieurs équations linéaires, c'est être dans chaque hyperplan associé. $\square$

5. Annulateur d'un sous-espace vectoriel et correspondance duale

Dans cette section, on va définir des outils de la dualité qui vont nous donner une correspondance explicite entre les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B}$ et les systèmes d'équations linéaires en les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ qui les caractérisent.

DÉFINITION 1.20. *Soit E un espace vectoriel. Soit S un sous-ensemble de E et T un sous-ensemble de E^*.*

(i) L'ensemble des formes linéaires sur E qui s'annulent sur S est appelé <u>annulateur de S</u> et noté S^0. C'est un sous-espace vectoriel de E^*.

(ii) L'ensemble des vecteurs de E qui sont annulés par toutes les formes linéaires de T est appelé <u>annulateur de T</u> et noté T^0. C'est un sous-espace vectoriel de E.

L'ensemble $S^0 = \{\varphi \in E^* \mid \text{ pour tout } v \in S, \varphi(v) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E^* : la forme linéaire identiquement nulle sur E appartient à S^0 et, si $\varphi, \psi \in S^0$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, pour tout $v \in S$, $(\lambda\varphi + \mu\psi)(v) = \lambda\varphi(v) + \mu\psi(v) = 0$.

De façon analogue, $T^0 = \{v \in E \mid \text{ pour tout } \varphi \in T, \varphi(v) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E : le vecteur nul de E appartient à T^0 et, si $v, w \in T^0$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, pour tout $\varphi \in T$, $\varphi(\lambda v + \mu w) = \lambda\varphi(v) + \mu\varphi(w) = 0$.

REMARQUE 1.21. On a par linéarité $\{0_E\}^0 = E^*$, $E^0 = \{0_{E^*}\}$, $\{0_{E^*}\}^0 = E$. Le corollaire 1.12 montre aussi $(E^*)^0 = \{0_E\}$.

PROPOSITION 1.22. *Soit E un espace vectoriel. Soit S une partie de E et soit T une partie de E^*. Alors*

(i) $S^0 = (\mathrm{Vect}(S))^0$.

(ii) $T^0 = (\mathrm{Vect}(T))^0$.

DÉMONSTRATION. (i) Comme $S \subset \mathrm{Vect}(S)$, on a déjà $S^0 \supset (\mathrm{Vect}(S))^0$. Pour l'autre inclusion, soit $\varphi \in S^0$ et $v \in \mathrm{Vect}(S)$. Il existe $v_1, \ldots, v_p \in S$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i$. Comme $\varphi(v_1) = 0, \ldots, \varphi(v_p) = 0$, par linéarité, $\varphi(v) = 0$. Par conséquent $\varphi \in (\mathrm{Vect}(S))^0$ et donc $S^0 \subset (\mathrm{Vect}(S))^0$.

(ii) Cette démonstration analogue est un bon exercice laissé au lecteur. $\square$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Remarquons que, si W est un sous-espace vectoriel de E^* et $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_q\}$ est une base de W, alors $W^0 = \bigcap_{i=1}^q \operatorname{Ker} \varphi_i$ et W^0 est le sous-espace vectoriel de E caractérisé par le système linéaire

$$\begin{cases} \varphi_1(e_1)x_1 + \cdots + \varphi_1(e_n)x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \varphi_q(e_1)x_1 + \cdots + \varphi_q(e_n)x_n = 0 \end{cases}$$

en les coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

La proposition suivante affirme notamment que si $W = F^0$, alors F peut être décrit par le système linéaire ci-dessus, autrement dit que les vecteurs de F forment l'espace W^0 des solutions de ce système.

PROPOSITION 1.23. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Soit F un sous-espace vectoriel de E et W un sous-espace vectoriel de E^*. Alors*

(i) $\dim(E) = \dim(F) + \dim\left(F^0\right)$ *et* $\dim\left(E^*\right) = \dim(W) + \dim\left(W^0\right)$,

(ii) $\left(F^0\right)^0 = F$ *et* $\left(W^0\right)^0 = W$.

DÉMONSTRATION. (i) Montrons tout d'abord que $\dim(E) = \dim(F) + \dim\left(F^0\right)$. Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une base de F que l'on complète en une base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n\}$ de E. Considérons la base duale $\mathcal{B}^* = \left\{v_1^*, \ldots, v_p^*, v_{p+1}^*, \ldots, v_n^*\right\}$ et montrons que la famille $\left\{v_{p+1}^*, \ldots, v_n^*\right\}$ est une base de F^0 :

- Soit $i \in \{p+1, \ldots, n\}$, alors $v_i^* \in F^0$ car, pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, $v_i^*(v_j) = 0$ $(i \neq j)$ et les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ engendrent F.
- La famille $\left\{v_{p+1}^*, \ldots, v_n^*\right\}$ de E^* est libre comme sous-famille de la base $\mathcal{B}^*$.
- De plus, elle engendre F^0 : en effet, soit $\varphi \in F^0$. Alors, $\varphi(v_1) = \cdots = \varphi(v_p) = 0$ car $v_1, \ldots, v_p \in F$ et $\varphi \in F^0$. D'après la proposition 1.9 i),

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(v_1)v_1^* + \cdots + \varphi(v_p)v_p^* + \varphi(v_{p+1})v_{p+1}^* + \cdots + \varphi(v_n)v_n^* \\ &= \varphi(v_{p+1})v_{p+1}^* + \cdots + \varphi(v_n)v_n^* \in \operatorname{Vect}\left\{v_{p+1}^*, \ldots, v_n^*\right\}. \end{aligned}$$

En particulier, $\dim\left(F^0\right) = n - p = \dim(E) - \dim(F)$.

L'égalité $\dim\left(E^0\right) = \dim(W) + \dim\left(W^0\right)$ se démontre de façon tout à fait similaire, à l'aide de la notion de base antéduale (corollaire et définition 1.15) : soit $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_q\}$ une base de W que l'on complète en une base $\mathcal{C} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_q, \varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_n\}$ de E^* et notons $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_q, v_{q+1}, \ldots, v_n\}$ la base antéduale de $\mathcal{C}$. On montre que la famille $\{v_{q+1}, \ldots, v_n\}$ est une base de W^0 :

- Soit $j \in \{q+1, \ldots, n\}$, alors $v_j \in W^0$ car, pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$, $\varphi_i(v_j) = v_i^*(v_j) = 0$ $(i \neq j)$ et les vecteurs $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ engendrent W.
- La famille $\{v_{q+1}, \ldots, v_n\}$ de E est libre comme sous-famille de la base $\mathcal{B}$.
- De plus, elle engendre W^0 : en effet, soit $v \in W^0$, alors, d'après la proposition 1.9 ii),

$$\begin{aligned} v &= v_1^*(v)v_1 + \cdots + v_q^*(v)v_q + v_{q+1}^*(v)v_{q+1} + \cdots + v_n^*(v)v_n \\ &= \varphi_1(v)v_1 + \cdots + \varphi_q(v)v_q + \varphi_{q+1}(v)v_{q+1} + \cdots + \varphi_n(v)v_n \\ &= \varphi_{q+1}(v)v_{q+1} + \cdots + \varphi_n(v)v_n \in \operatorname{Vect}\{v_{q+1}, \ldots, v_n\} \end{aligned}$$

  $(\varphi_1(v) = \cdots = \varphi_q(v) = 0$ car $\varphi_1, \ldots, \varphi_q \in W$ et $v \in W^0)$.

En particulier, $\dim\left(W^0\right) = n - q = \dim\left(E^*\right) - \dim(W) = \dim(E) - \dim(W)$.

(ii) Des deux égalités démontrées précédemment, on déduit la double inclusion $\left(F^0\right)^0 = F$: on a $F \subset \left(F^0\right)^0$ (car si $v \in F$ et $\varphi \in F^0$ alors $\varphi(v) = 0$) et

$$\dim\left(\left(F^0\right)^0\right) = \dim(E) - \dim\left(F^0\right) = \dim(E) - (\dim(E) - \dim(F)) = \dim(F).$$

De même, $\left(W^0\right)^0 = W$ car $W \subset \left(W^0\right)^0$ (si $\varphi \in W$ et $v \in W^0$ alors $\varphi(v) = 0$) et

$$\dim\left(\left(W^0\right)^0\right) = \dim(E) - \dim\left(W^0\right) = \dim(E) - (\dim(E) - \dim(W)) = \dim(W). \quad \square$$

Cette proposition et sa démonstration nous donnent en particulier une méthode pour, à partir d'une base de F, obtenir un système d'équations linéaires "linéairement indépendantes" (i.e. d'équations correspondant à des formes linéaires linéairement indépendantes) décrivant F :

COROLLAIRE 1.24. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une base de F que l'on complète en une base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n\}$ de E. Considérons la base duale $\mathcal{B}^* = \left\{v_1^*, \ldots, v_p^*, v_{p+1}^*, \ldots, v_n^*\right\}$.*

(i) Alors la famille $\left\{v_{p+1}^*, \ldots, v_n^*\right\}$ est une base de F^0.

(ii) Si de plus $\mathcal{B}_0 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E, alors F admet comme système d'équations en les coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_0$, le système linéaire

$$\begin{cases} v_{p+1}^*(e_1)x_1 + \cdots + v_{p+1}^*(e_n)x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ v_n^*(e_1)x_1 + \cdots + v_n^*(e_n)x_n = 0 \end{cases}.$$

(iii) Le nombre d'équations linéaires indépendantes nécessaires pour définir le sous-espace vectoriel F est la dimension de F^0, soit $\dim E - \dim F = n - p$.

EXEMPLE 1.25. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $v_1 = (1, 1, 1)$. On note v_2 le vecteur $(1, 0, -1)$ et v_3 le vecteur $(0, 1, 1)$, puis on complète la famille libre $\{v_1\}$ de $\mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ (voir également exemple 1.7). On considère ensuite la base duale $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$ et, d'après ce que l'on a vu dans la démonstration précédente, $F^0 = \mathrm{Vect}\,\{v_2^*, v_3^*\}$. L'expression de v_2^* sur $\mathbb{R}^3$ est $v_2^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & x_2 - x_3 \end{array}$ et l'expression de v_3^* sur $\mathbb{R}^3$ est $v_3^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & -x_1 + 2x_2 - x_3 \end{array}$. Ainsi

$$\begin{aligned} F = \left(F^0\right)^0 &= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_2^*(x_1, x_2, x_3) = 0, v_3^*(x_1, x_2, x_3) = 0\right\} \\ &= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 - x_3 = 0, -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\right\}. \end{aligned}$$

Une méthode analogue permet d'obtenir, à partir d'une description de F comme ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires linéairement indépendantes, une base de F :

COROLLAIRE 1.26. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Soit F un sous-espace vectoriel de E défini par les équations $F = \{v \in E, \varphi_1(v) = 0, \ldots, \varphi_p(v) = 0\}$ où les φ_i sont des formes linéaires sur E. On suppose que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_p\}$ est une famille libre de E^* que l'on complète en une base $\mathcal{C} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_n\}$ de E^*. Considérons sa base antéduale $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n\}$. Alors la famille $\{v_{p+1}, \ldots, v_n\}$ est une base de F.*

EXEMPLE 1.27. Notons $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et considérons les formes linéaires $\varphi_1 = e_1^* + e_2^* + e_3^*$ et $\varphi_2 = -e_1^* + e_3^*$ sur $\mathbb{R}^3$. On note $W := \mathrm{Vect}\{\varphi_1, \varphi_2\} \subset \mathbb{R}^{3*}$ et on cherche à déterminer une base de $W^0 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0, -x_1 + x_3 = 0\}$.

Tout d'abord, remarquons que les formes linéaires φ_1 et φ_2 sont linéairement indépendantes : on peut par exemple constituer la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de φ_1 et φ_2 dans la base $\mathcal{B}_0^*$ et montrer qu'elle est bien de rang 2. On note ensuite $\varphi_3 := e_2^* + e_3^*$ et on complète la famille libre $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ en la base $\mathcal{C} := \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ de $(\mathbb{R}^3)^*$. D'après l'exemple 1.16, la base antéduale de $\mathcal{C}$ est la base $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1), (0, -1, 1), (-1, 2, -1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ et, d'après la démonstration de la proposition 1.23, $W^0 = \mathrm{Vect}\{(-1, 2, -1)\}$.

6. Application transposée

La dualité linéaire va également nous permettre de donner une interprétation vectorielle à l'opération de transposition sur les matrices.

DÉFINITION 1.28. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle* <u>*transposée de f*</u> *l'application linéaire*

$$ {}^t f : \begin{array}{ccc} F^* & \to & E^* \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{array} $$

REMARQUE 1.29.
- Si $\varphi \in F^* = \mathcal{L}(F, \mathbb{K})$, on a bien $\varphi \circ f \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
- L'application ${}^t f$ est bien linéaire : si $\varphi, \psi \in F^*$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
$$ {}^t f\,(\lambda\varphi + \mu\psi) = (\lambda\varphi + \mu\psi) \circ f = \lambda\varphi \circ f + \mu\psi \circ f = \lambda\, {}^t f(\varphi) + \mu\, {}^t f(\psi) $$

Les propriétés de base de la transposée d'une application linéaire sont réunies dans la proposition suivante :

PROPOSITION 1.30.
(i) ${}^t(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_{E^*}$.
(ii) Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, ${}^t(\lambda f + \mu g) = \lambda\, {}^t f + \mu\, {}^t g$.
(iii) Si G est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$.
(iv) Si f est une application linéaire bijective de E dans F, alors ${}^t f : F^* \to E^*$ est également bijective et $\left({}^t f\right)^{-1} = {}^t\left(f^{-1}\right)$.

DÉMONSTRATION.
(i) Pour tout $\varphi \in E^*$, on a
$$ {}^t(\mathrm{Id}_E)\,(\varphi) = \varphi \circ \mathrm{Id}_E = \varphi = \mathrm{Id}_{E^*}(\varphi). $$
(ii) Pour tout $\varphi \in F^*$, on a
$$ {}^t(\lambda f + \mu g)\,(\varphi) = \varphi \circ (f + g) = \varphi \circ f + \varphi \circ g = {}^t f(\varphi) + {}^t g(\varphi) = \left({}^t f + {}^t g\right)(\varphi). $$
(iii) Pour tout $\varphi \in G^*$, on a
$$ {}^t(g \circ f)\,(\varphi) = \varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f = {}^t g(\varphi) \circ f = {}^t f\left({}^t g(\varphi)\right) = \left({}^t f \circ {}^t g\right)(\varphi). $$
(iv) On a ${}^t f \circ {}^t\left(f^{-1}\right) = {}^t\left(f^{-1} \circ f\right) = {}^t(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_{E^*}$ et ${}^t\left(f^{-1}\right) \circ {}^t f = {}^t\left(f \circ f^{-1}\right) = {}^t(\mathrm{Id}_F) = \mathrm{Id}_{F^*}$ □

On en vient à la justification matricielle de l'appellation "transposée" :

PROPOSITION 1.31. *On suppose que les espaces vectoriels E et F sont tous deux de dimension finie. Soient alors $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ une base de F, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a*
$$ \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*}\left({}^t f\right) = {}^t\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f), $$
autrement dit la matrice de la transposée ${}^t f$ de f dans les bases duales $\mathcal{C}^*$ et $\mathcal{B}^*$ est la transposée de la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

DÉMONSTRATION. Soit $j \in \{1, \ldots, m\}$ et notons $A = (a_{k\,l})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant m, \\ 1 \leqslant l \leqslant n}} := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. Alors

$$\begin{aligned} {}^t f\left(v_j^*\right) = \underbrace{v_j^* \circ f}_{\in E^*} &= \sum_{i=1}^{n} (v_j^* \circ f)(e_i) e_i^* \text{ par la proposition 1.9 (i).} \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_j^* \left(f(e_i)\right) e_i^* = \sum_{i=1}^{n} v_j^* \left(\sum_{k=1}^{m} a_{k\,i} v_k \right) e_i^* \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{k\,i} v_j^*(v_k) e_i^* = \sum_{i=1}^{n} a_{j\,i} e_i^* \end{aligned}$$

Ainsi la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}^*,\mathcal{B}^*}\left({}^t f\right)$ est exactement la transposée de la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. □

REMARQUE 1.32. Ce résultat permet également de retrouver la propriété 1.14 concernant la matrice de passage d'une base duale à une autre : si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E, la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\mathrm{Id}_E\right)$ de l'identité de E dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$. Or ${}^t\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_{E^*}$. Donc,

$$P_{\mathcal{B}^*\to\mathcal{B}'^*} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'^*,\mathcal{B}^*}\left(\mathrm{Id}_{E^*}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'^*,\mathcal{B}^*}\left({}^t\mathrm{Id}_E\right) = {}^t\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\left(\mathrm{Id}_E\right)\right) = {}^tP_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = {}^tP_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{-1}.$$

Ce point de vue "vectoriel" sur la transposition matricielle permet également, à partir de la proposition 1.30 et de la correspondance entre produit de matrices et composition d'applications linéaires, de montrer sans calcul les propriétés matricielles "${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$" et "$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$".

7. Bidual

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Son dual E^* est également un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$: on peut donc aussi considérer son dual que l'on note E^{**}. On a alors, par définition,

$$E^{**} = (E^*)^* = \mathcal{L}\left(E^*, \mathbb{K}\right) = \mathcal{L}\left(\mathcal{L}(E, \mathbb{K}), \mathbb{K}\right).$$

DÉFINITION 1.33. *On appelle E^{**} le bidual de E.*

Une propriété remarquable du bidual est

PROPOSITION 1.34. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors E est canoniquement isomorphe à son bidual E^{**}, i.e. on peut construire un isomorphisme linéaire de E sur E^{**} sans faire appel à des choix de bases.*

DÉMONSTRATION. Pour $v \in E$, définissons tout d'abord l'application $\Phi_v : \begin{array}{ccc} E^* & \to & \mathbb{K} \\ \varphi & \mapsto & \varphi(v) \end{array}$ (l'application d'"évaluation" des formes linéaires sur E en le vecteur v). Pour tout $v \in E$, l'application Φ_v est linéaire : si $\varphi, \psi \in E^*$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\Phi_v\left(\lambda\varphi + \mu\psi\right) = \left(\lambda\varphi + \mu\psi\right)(v) = \lambda\varphi(v) + \mu\psi(v) = \lambda\Phi_v(\varphi) + \mu\Phi_v(\psi).$$

Ainsi, pour tout $v \in E$, $\Phi_v \in \mathcal{L}\left(E^*, \mathbb{K}\right) = E^{**}$.

On considère alors l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} E & \to & E^{**} \\ v & \to & \Phi_v \end{array}$$

Φ est une application linéaire : si $v, w \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ alors, pour tout $\varphi \in E^*$,

$$\begin{aligned} \Phi\left(\lambda v + \mu w\right)(\varphi) &= \Phi_{\lambda v + \mu w}(\varphi) = \varphi\left(\lambda v + \mu w\right) = \lambda\varphi(v) + \mu\varphi(w) \\ &= \lambda\Phi_v(\varphi) + \mu\Phi_w(\varphi) = \lambda\Phi(v)(\varphi) + \mu\Phi(w)(\varphi) = \left(\lambda\Phi(v) + \mu\Phi(w)\right)(\varphi) \end{aligned}$$

i.e. $\Phi\left(\lambda v + \mu w\right) = \lambda\Phi(v) + \mu\Phi(w)$.

On montre enfin que l'application linéaire $\Phi : E \to E^{**}$ est bijective : comme $\dim\left(E^{**}\right) = \dim\left(E^*\right) = \dim(E)$, on peut se contenter de montrer que Φ est injective. Soit $v \in E$ tel que

$\Phi(v) = \Phi_v = 0$, i.e., pour tout $\varphi \in E^*$, $\varphi(v) = 0$. Le vecteur v est nul par le corollaire 1.12. L'application Φ est donc bien injective.

Ainsi, l'application Φ est bien un isomorphisme linéaire de E sur E^{**} (et sa définition ne dépend pas d'un choix de bases). $\square$

Chapitre 2

Espaces euclidiens

Introduction

On introduit sur les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie une structure supplémentaire : le produit scalaire, notion qui généralise le produit scalaire classique sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Cette structure supplémentaire permet de définir les notions géométriques d'orthogonalité et de distance.

1. Produit scalaire sur un espace vectoriel réel

DÉFINITION 2.1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une application* $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{array}{ccc} E\times E & \to & \mathbb{R} \\ (v,w) & \mapsto & \langle v,w\rangle \end{array}$ *est appelée produit scalaire sur E si elle est*

(1) bilinéaire, i.e. pour tous $v_1, v_2, w_1, w_2 \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda v_1 + \mu v_2, w\rangle = \lambda\langle v_1, w\rangle + \mu\langle v_2, w\rangle$ et $\langle v, \lambda w_1 + \mu w_2\rangle = \lambda\langle v, w_1\rangle + \mu\langle v, w_2\rangle$,

(2) symétrique, i.e. pour tous $v, w \in E$, $\langle v,w\rangle = \langle w,v\rangle$,

(3) positive, i.e. pour tout $v \in E$, $\langle v,v\rangle \geqslant 0$

(4) définie i.e. $\langle v,v\rangle = 0$ si et seulement si $v = 0_E$.

EXEMPLE 2.2.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, pour tous $v = (x_1, \ldots, x_n)$ et $w = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on définit $\langle v,w\rangle_{\text{can}} := x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (v,w) & \mapsto & \langle v,w\rangle_{\text{can}} \end{array}$ est alors un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Montrons le caractère défini positif de l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}$: si $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\langle v,v\rangle_{\text{can}} = \sum_i^n x_i^2 \geqslant 0$ et $\langle v,v\rangle_{\text{can}} = \sum_i^n x_i^2 = 0$ ssi ("si et seulement si") pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i = 0$ ssi $v = (0, \ldots, 0)$.

(2) Supposons que E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Pour tous vecteurs v et w de E, de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$, on définit $\langle v,w\rangle_{\mathcal{B}} := x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$. L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{B}} : \begin{array}{ccc} E\times E & \to & \mathbb{R} \\ (v,w) & \mapsto & \langle v,w\rangle_{\mathcal{B}} \end{array}$ est alors un produit scalaire sur E, appelé produit scalaire associé à la base $\mathcal{B}$.

(3) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Pour toutes matrices $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on définit
$$\langle A,B\rangle := \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}b_{ij} = \mathrm{Tr}\left({}^tA\,B\right).$$
L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\times\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (A,B) & \mapsto & \langle A,B\rangle \end{array}$ est alors un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$: il s'agit du produit scalaire associé à la base canonique $\{E_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(4) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit
$$\langle P, Q\rangle := \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$
L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \langle P, Q\rangle \end{array}$ est alors un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. La bilinéarité de l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ provient de la linéarité de l'intégrale. Montrons que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien définie positive. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_0^1 (P(t))^2\mathrm{d}t \geqslant 0$ (l'intégrale sur un segment d'une fonction positive est positive). Si $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_0^1 (P(t))^2\mathrm{d}t = 0$, comme la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive, on a, pour tout $t \in [0,1]$, $(P(t))^2 = 0$ (l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment est nulle si et seulement si la fonction est identiquement nulle sur ce segment) et donc, pour tout $t \in [0,1]$, $P(t) = 0$, donc (un polynôme ayant une infinité de racines étant nécessairement nul) le polynôme P est nul.

REMARQUE 2.3. Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E et si F est un sous-espace vectoriel de E, la restriction
$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{|F\times F} : \begin{array}{ccc} F \times F & \to & \mathbb{R} \\ (v,w) & \mapsto & \langle v, w\rangle \end{array}$$
est un produit scalaire sur F.

DÉFINITION 2.4. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, le couple $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est appelé espace euclidien.*

REMARQUE 2.5. D'après la remarque 2.3, si $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\big(F, \langle\ ,\ \rangle_{|F\times F}\big)$ est également un espace euclidien. On le notera simplement $(F, \langle\ ,\ \rangle)$.

2. Norme euclidienne

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace euclidien. Pour tout vecteur v de E, $\langle v, v\rangle \geqslant 0$ et on définit alors $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Une première propriété importante des espaces euclidiens est l'inégalité de Cauchy-Schwarz ci-dessous. Cette inégalité permet en particulier de montrer que l'application qui à tout vecteur v de E associe $\|v\| \in [0, +\infty[$ est une norme.

LEMME 2.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Pour tous vecteurs v et w de E, on a l'inégalité*
$$|\langle v, w\rangle| \leqslant \|v\|\|w\|,$$
et $|\langle v, w\rangle| = \|v\|\|w\|$ si et seulement si les vecteurs v et w sont liés.

DÉMONSTRATION. Soient $v, w \in E$.

Si w est le vecteur nul 0_E de E, on a
$$\langle v, w\rangle = \langle v, 0_E\rangle = \langle v, 0\cdot 0_E\rangle = 0\cdot\langle v, 0_E\rangle = 0$$
et $\|w\| = \sqrt{\langle w, w\rangle} = \sqrt{\langle 0_E, 0_E\rangle} = 0$. L'inégalité ci-dessus est donc vérifiée : il s'agit d'une égalité et on a $w = 0_E = 0\cdot v$.

On suppose maintenant que $w \neq 0_E$. Soit alors $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|v + \lambda w\|^2 \geqslant 0$. Or
$$\begin{aligned}\|v+\lambda w\|^2 &= \langle v+\lambda w, v+\lambda w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle + \lambda\langle v, w\rangle + \lambda\langle w, v\rangle + \lambda^2\langle w, w\rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\lambda\langle v, w\rangle + \lambda^2\|w\|^2.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|w\|^2\lambda^2+2\langle v,w\rangle\lambda+\|v\|^2 \geqslant 0$, en d'autres termes, la fonction polynomiale du second degré (remarquons que $\|w\|^2 \neq 0$ car $\langle w,w\rangle \neq 0$ car $w \neq 0_E$)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \lambda & \mapsto & \|w\|^2\lambda^2 + 2\langle v,w\rangle\lambda + \|v\|^2 \end{array}$$

est positive sur tout $\mathbb{R}$, ce qui est équivalent au fait que le discriminant réduit associé $\langle v,w\rangle^2 - \|w\|^2\|v\|^2$ soit négatif ou nul. Ainsi, on a $\langle v,w\rangle^2 \leqslant \|v\|^2\|w\|^2$ i.e. $|\langle v,w\rangle| \leqslant \|v\|\|w\|$.

De plus, si $|\langle v,w\rangle| = \|v\|\|w\|$ et donc $\langle v,w\rangle^2 = \|v\|^2\|w\|^2$, le discriminant associé à la fonction polynomiale du second degré ci-dessus est nul et donc le polynôme associé possède une racine (double) $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. On a ainsi

$$\langle v+\lambda_0 w, v+\lambda_0 w\rangle = \|v+\lambda_0 w\|^2 = \|w\|^2\lambda_0^2 + 2\langle v,w\rangle\lambda_0 + \|v\|^2 = 0$$

et donc $v+\lambda_0 w = 0_E$, en particulier les vecteurs v et w sont liés.

Réciproquement, supposons qu'il existe $(\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ tel que $\mu_1 v + \mu_2 w = 0$. Si $\mu_2 = 0$, nécessairement $v = 0_E$ et, comme ci-dessus, $|\langle v,w\rangle| = 0 = \|v\|\|w\|$. Si $\mu_2 \neq 0$, on a $w = \frac{\mu_1}{\mu_2}v$ et alors

$$\langle v,w\rangle^2 = \left\langle v, \frac{\mu_1}{\mu_2}v\right\rangle^2 = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2\langle v,v\rangle^2 = \langle v,v\rangle\left\langle \frac{\mu_1}{\mu_2}v, \frac{\mu_1}{\mu_2}v\right\rangle = \|v\|^2\|w\|^2. \qquad \square$$

COROLLAIRE ET DÉFINITION 2.7. *L'application* $\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} E & \to & [0,+\infty[\\ v & \mapsto & \|v\| \end{array}$ *est une norme, i.e.*

(1) pour tous $v \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$,

(2) pour tout $v \in E$, $\|v\| = 0$ *si et seulement si* $v = 0_E$,

(3) pour tous $v,w \in E$, $\|v+w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$.

En conséquence, le couple $(E, \|\cdot\|)$ *est un espace vectoriel normé. La norme* $\|\cdot\|$ *est appelée* <u>*norme euclidienne*</u> *associée au produit scalaire* $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

DÉMONSTRATION. (1) Soient $v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\langle v,v\rangle} = |\lambda|\|v\|.$$

(2) Soit $v \in E$, alors $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} = 0$ ssi $\langle v,v\rangle = 0$ ssi $v = 0_E$.

(3) Soient $v,w \in E$. Alors

$$\begin{array}{rcl} \|v+w\|^2 & = & \langle v+w, v+w\rangle \\ & = & \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle \\ & = & \|v\|^2 + 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2 \text{ (par symétrie du produit scalaire)} \\ & \leqslant & \|v\|^2 + 2|\langle v,w\rangle| + \|w\|^2 \\ & \leqslant & \|v\|^2 + 2\|v\|^2\|w\|^2 + \|w\|^2 \text{ (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ & = & (\|v\| + \|w\|)^2 \end{array}$$

et donc $\|v+w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$. $\square$

On remarque que la connaissance de la norme euclidienne suffit à retrouver tout le produit scalaire par le

LEMME 2.8 (Égalité de polarisation). *D'après les premières égalités ci-dessus, on a, pour tous* $v,w \in E$,

$$\langle v,w\rangle = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right).$$

3. Orthogonalité dans les espaces euclidiens

La structure supplémentaire qu'apporte le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur l'espace vectoriel de dimension finie E nous permet d'introduire une notion d'orthogonalité :

DÉFINITION 2.9. *Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Soient v et w deux vecteurs de E. On dit que v est orthogonal à w si $\langle v,w\rangle = 0$. Dans ce cas, par symétrie du produit scalaire, on a aussi $\langle w,v\rangle = 0$ et donc w est orthogonal à v.*

Soit maintenant A un sous-ensemble non vide de E. L'orthogonal $A^\perp$ de A pour le produit scalaire $<\ ,\ >$ est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs contenus dans A, i.e.

$$A^\perp := \{v \in E \mid \text{ pour tout } w \in A, \langle v,w\rangle = 0\}.$$

Remarquons que le théorème de Pythagore peut être étendu à tout cadre euclidien général :

LEMME 2.10 (Théorème de Pythagore). *Soient v et w deux vecteurs de E. Alors v et w sont orthogonaux si et seulement si $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.*

DÉMONSTRATION. Par l'égalité de polarisation $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ ssi $\langle v,w\rangle = 0$ ssi v et w sont orthogonaux. □

EXEMPLE 2.11. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, les vecteurs $(1,-1,2)$ et $(1,3,1)$ sont orthogonaux, et $\{(-2,5,3)\}^\perp = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (x,y,z),(-2,5,3)\rangle_{\text{can}} = -2x+5y+3z = 0\big\}$.

Dans l'exemple ci-dessus, on peut remarquer que $\{(-2,5,3)\}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. L'orthogonal d'un sous-ensemble est en fait toujours un sous-espace vectoriel :

LEMME 2.12. *Soit A un sous-ensemble de E. Alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E (même si A ne l'est pas).*

DÉMONSTRATION. $0_E \in A^\perp$ car, pour tout $w \in A$, $\langle 0_E, w\rangle = 0$, et, si $v_1, v_2 \in A^\perp$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, on a, pour tout $w \in A$,

$$\langle \lambda v_1 + \mu v_2, w\rangle = \lambda\langle v_1,w\rangle + \mu\langle v_2,w\rangle = 0.$$

Ainsi, $A^\perp$ est bien un sous-espace vectoriel de E. □

REMARQUE 2.13.
- Par une démonstration analogue à celle de la proposition 1.22, si A est un sous-ensemble de E, on a $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$.
- On a $\{0_E\}^\perp = E$ (car, pour tout $v \in E$, $\langle v, 0_E\rangle = 0$) et $E^\perp = \{0_E\}$ (en effet, si $v \in E^\perp$, $\langle v,v\rangle = 0$, car $v \in E^\perp$ et $v \in E$, et donc $v = 0_E$).

4. Familles orthogonales, familles orthonormales

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit $\{v_1,\dots,v_n\}$ une base de E. Si v et w sont deux vecteurs de E de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans cette base, alors par bilinéarité

$$\langle v,w\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \right\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j \langle v_i, v_j\rangle.$$

On aimerait une base de E dans laquelle cette expression du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur E soit la plus simple possible. Cela nous mène à la notion de base orthogonale et de base orthonormale :

DÉFINITION 2.14. *Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit $\mathcal{F} = \{e_1,\dots,e_p\}$ une famille finie de vecteurs de E.*

(1) *On dit que $\mathcal{F}$ est une famille orthogonale de E si pour tous $i, j \in \{1, \ldots, p\}$ tels que $i \neq j$, on a $\langle e_i, e_j \rangle = 0$.*

(2) *On dit que $\mathcal{F}$ est une famille orthonormale de E si $\mathcal{F}$ est une famille orthogonale de E et si tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont de norme euclidienne 1. Autrement dit, $\mathcal{F}$ est une famille orthonormale de E si et seulement si pour tous $i, j \in \{1, \ldots, p\}$, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.*

EXEMPLE 2.15. — La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ (exemple 2.2 1.).

— Par définition, une base $\mathcal{B}$ de E est une base orthonormale pour le produit scalaire associé $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$ (exemple 2.2 2.).

LEMME 2.16. *Une famille finie orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est libre.*

DÉMONSTRATION. Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille de vecteurs non nuls de E deux à deux orthogonaux (i.e., pour tous $i, j \in \{1, \ldots, p\}$, si $i \neq j$ alors $\langle v_i, v_j \rangle = 0$). Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0_E$, alors, pour $i \in \{1, \ldots, p\}$,

$$0 = \left\langle v_i, \sum_{j=1}^{p} \lambda_j v_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle = \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle.$$

Comme $v_i \neq 0_E$, la norme $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$, et donc $\lambda_i = 0$. □

LEMME 2.17 (Expressions dans une base orthonormale). *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ et soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base orthonormale de E. Alors*

(1) *Pour tout v de E, $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle e_i$.*

(2) *Pour tous vecteurs v et w de E de coordonnées respectives $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$, on a $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle \langle w, e_i \rangle$.*

DÉMONSTRATION. (1) Soit v un vecteur de E de coordonnées $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\langle v, e_i \rangle = x_i$ et donc $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle e_i$.

(2) Par bilinéarité, $\langle v, w \rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. □

5. Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Un résultat fondamental de la théorie des espaces euclidiens est qu'il est toujours possible de construire, de façon algorithmique, une base orthonormale pour n'importe quel espace euclidien :

THÉORÈME 2.18 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt). *Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille finie libre de E. On peut construire, de façon algorithmique, une famille orthonormale $\{e_1, \ldots, e_p\}$ de E telle que, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, $\mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_k\} = \mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_k\}$ (en particulier, $\{e_1, \ldots, e_p\}$ est donc une base orthonormale de $\mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_p\}$).*

DÉMONSTRATION. On construit, de façon récursive, une base orthogonale $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p\}$ pour $\mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_p\}$. On en déduit immédiatement une base orthonormale en "normalisant" les vecteurs non nuls obtenus (i.e. en les multipliant chacun par l'inverse de leur norme).

Le procédé récursif est le suivant : pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$, on suppose que l'on a déjà construit des vecteurs $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k \in E$ orthogonaux deux à deux tels que $\mathrm{Vect}\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k\} = \mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_k\}$. On recherche alors un vecteur ϵ_{k+1} de E de la forme

$$\epsilon_{k+1} = v_{k+1} + \lambda_1 \epsilon_1 + \cdots + \lambda_k \epsilon_k \in \mathrm{Vect}\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k, v_{k+1}\} = \mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}\}$$ [1].

tel que, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\langle \epsilon_{k+1}, \epsilon_i \rangle = 0$.

Or, pour $i \in \{1, \ldots, k\}$,

$$\langle \epsilon_{k+1}, \epsilon_i \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle v_{k+1} + \lambda_1 \epsilon_1 + \cdots + \lambda_k \epsilon_k, \epsilon_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v_{k+1}, \epsilon_i \rangle + \lambda_i \langle \epsilon_i, \epsilon_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = -\frac{\langle v_{k+1}, \epsilon_i \rangle}{\|\epsilon_i\|^2}$$

Ainsi, par construction, la famille $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{k+1}\}$ avec

$$\epsilon_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, \epsilon_i \rangle}{\|\epsilon_i\|^2} \epsilon_i$$

est orthogonale. De plus, $\mathrm{Vect}\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k, \epsilon_{k+1}\} = \mathrm{Vect}\left\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k, v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, \epsilon_i \rangle}{\|\epsilon_i\|^2} \epsilon_i\right\}$
$= \mathrm{Vect}\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k, v_{k+1}\} = \mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}\}$. □

REMARQUE 2.19. Au terme de l'étape $k+1$ du procédé ci-dessus, on peut remplacer ϵ_{k+1} par n'importe quel vecteur non nul ϵ'_{k+1} de la droite vectorielle engendrée par ϵ_{k+1} : la famille $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k, \epsilon'_{k+1}\}$ ainsi obtenue reste orthogonale et engendre toujours $\mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$. Cela peut être utile pour simplifier les calculs (notamment pour éviter de manipuler des fractions).

EXEMPLE 2.20. On détermine une base orthonormée pour le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,0,-1,1)$ et $v_3 = (0,1,1,1)$. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre (c'est donc une base de $F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$) et on applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour déterminer une base orthonormale de F.

On pose

$$\begin{array}{rcl}
\epsilon_1 & := & v_1 = (1,1,0,0) \\
\epsilon_2 & := & v_2 - \dfrac{\langle v_2, \epsilon_1 \rangle}{\|\epsilon_1\|^2}\epsilon_1 = v_2 - \dfrac{1}{2}\epsilon_1 = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -1, 1\right) = \dfrac{1}{2}(1,-1,-2,2) \\
\epsilon'_2 & := & (1,-1,-2,2) \text{ (pour simplifier les calculs)} \\
\epsilon_3 & := & v_3 - \dfrac{\langle v_3, \epsilon_1 \rangle}{\|\epsilon_1\|^2}\epsilon_1 - \dfrac{\langle v_3, \epsilon'_2 \rangle}{\|\epsilon'_2\|^2}\epsilon'_2 = v_3 - \dfrac{1}{2}\epsilon_1 + \dfrac{1}{10}\epsilon'_2 = \left(-\dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{6}{5}\right) = \dfrac{2}{5}(-1,1,2,3) \\
\epsilon'_3 & := & (-1,1,2,3)
\end{array}$$

et la famille $\{\epsilon_1, \epsilon'_2, \epsilon'_3\}$ est alors une base orthogonale de F. La famille

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \frac{1}{\sqrt{10}}(1,-1,-2,2), \frac{1}{\sqrt{15}}(-1,1,2,3)\right\}$$

ensuite obtenue par normalisation est une base orthonormale de F.

COROLLAIRE 2.21. *Il existe une base orthonormale pour l'espace euclidien* $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

DÉMONSTRATION. Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de E. Puisque la famille $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est libre, d'après le théorème 2.18, on peut construire une base orthonormale pour $\mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_n\} = E$. □

Le choix d'une base orthonormale pour l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ permet d'identifier E avec l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{can}})$ muni du produit scalaire canonique. Précisément :

COROLLAIRE 2.22. *Il existe un isomorphisme (non canonique)* $\psi : E \to \mathbb{R}^n$ *tel que, pour tous vecteurs* v *et* w *de* E, $\langle \psi(v), \psi(w) \rangle_{\mathrm{can}} = \langle v, w \rangle$.

1. Notez qu'on utilise les vecteurs déjà construits ϵ_i

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et notons $\mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Notons ensuite $\psi_{\mathcal{B}}$ l'application linéaire de E dans $\mathbb{R}^n$ qui, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, associe e'_i à e_i. Autrement dit, $\psi_{\mathcal{B}}$ est l'application qui à tout vecteur v de E de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$ associe le vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Il s'agit d'un isomorphisme linéaire et, si v et w sont deux vecteurs de E de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$, on a

$$\langle \psi_{\mathcal{B}}(v), \psi_{\mathcal{B}}(w) \rangle_{\mathrm{can}} = \langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle_{\mathrm{can}} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle v, w \rangle$$

(car $\mathcal{B}$ est une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$). □

Revenons maintenant à l'orthogonal d'un sous-ensemble de E. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on va pouvoir décomposer E en la somme directe de F et de son orthogonal $F^{\perp}$.

PROPOSITION 2.23. *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ et soit F un sous-espace vectoriel de E. On a :*

(1) $E = F \oplus F^{\perp}$,

(2) $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

DÉMONSTRATION. (1) On choisit une base $\{v_1, \ldots, v_p\}$ de F où $p = \dim F$. Par le procédé d'orthonormalisation, on la transforme en une base $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p\}$ orthonormale de F. Soit $v \in E$ et considérons $v' := \sum \langle v, \epsilon_j \rangle \epsilon_j$. On écrit $v = v' + (v - v')$. Le vecteur v' est dans F et puisque $\langle v - v', \epsilon_i \rangle = 0$ pour tout i, le vecteur $v - v'$ est dans $F^{\perp}$. Ainsi, $E = F + F^{\perp}$.

Soit maintenant $v \in F \cap F^{\perp}$, $\langle v, v \rangle = 0$ (car $v \in F^{\perp}$ et $v \in F$) et donc $v = 0_E$. On a donc $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$. Ainsi, F et $F^{\perp}$ sont en somme directe $E = F \oplus F^{\perp}$.

(2) On a $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ car, si $v \in F$, pour tout $w \in F^{\perp}$, $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle = 0$. De plus,

$$\dim\left(\left(F^{\perp}\right)^{\perp}\right) = \dim(E) - \dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E) - (\dim(E) - \dim(F)) = \dim(F).$$

En conséquence, $F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$. □

6. Projections orthogonales, distances euclidiennes

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Comme E se décompose en la somme directe de F et son orthogonal $F^{\perp}$, on peut considérer la projection de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$:

DÉFINITION 2.24. *On appelle <u>projection orthogonale sur F</u> la projection de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$. Il s'agit de l'application linéaire surjective qui à tout vecteur $v = w + u$ de E avec $w \in F$ et $u \in F^{\perp}$ associe sa composante w dans F. On note p_F cette application.*

REMARQUE 2.25. Si $\{e_1, \ldots, e_p\}$ est une base de F et $\{e_{p+1}, \ldots, e_n\}$ est une base de $F^{\perp}$ alors $\mathcal{B} := \{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n\}$ est une base de E dans laquelle la matrice représentative de p_F

est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & 0_{n-p,n-p} \end{pmatrix}$$

LEMME 2.26. *Soit F un sous-espace vectoriel de E euclidien et $\mathcal{C} = \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p\}$ une base orthonormale de F. Alors le projeté orthogonal d'un vecteur v de E sur F est donné par $p_F(v) = \sum_{i=1}^{p} \langle v, \epsilon_i \rangle \epsilon_i$.*

DÉMONSTRATION. Le vecteur $\sum_{i=1}^{p} \langle v, \epsilon_i \rangle \epsilon_i$, combinaison des ϵ_i, est dans F. De plus, puisque la famille ϵ_i est orthonormale, le produit scalaire de $v - \sum_{i=1}^{p} \langle v, \epsilon_i \rangle \epsilon_i$ avec chaque ϵ_j est nul. Cette différence est donc orthogonale à F. □

La projection orthogonale permet notamment de calculer explicitement la distance euclidienne d'un vecteur de E à un sous-espace vectoriel de E. On donne tout d'abord la définition de cette notion de distance euclidienne :

DÉFINITION 2.27. *Si v et w sont deux vecteurs de E, on définit la distance euclidienne de v à w comme étant le réel positif ou nul $d(v, w) := \|w - v\|$. Si v est un vecteur de E et A un sous-ensemble non vide de E, on définit également la distance euclidienne de v à A comme étant le réel positif ou nul $d(v, A) := \inf_{w \in A} d(v, w) = \inf_{w \in A} \|w - v\|$.*

REMARQUE 2.28.

— La distance euclidienne d'un vecteur de E à un autre est bien une distance, dans le sens où
  1. pour tous $v, w \in E$, $d(v, w) \geqslant 0$,
  2. pour tous $v, w \in E$, $d(v, w) = d(w, v)$ (en effet $\|w - v\| = \|v - w\|$),
  3. pour tous $v, w \in E$, $d(v, w) = 0$ ssi $v = w$ (en effet, $\|w - v\| = 0$ ssi $w - v = 0_E$),
  4. pour tous $v, w, u \in E$, $d(v, u) \leqslant d(v, w) + d(w, u)$ (en effet, $\|u - v\| = \|u - w + w - v\| \leqslant \|u - w\| + \|w - v\|$).

  Plus généralement, toute norme sur un espace vectoriel induit, de cette façon, une distance.

— Pour v un vecteur de E et A un sous-ensemble non vide de E, la borne inférieure de l'ensemble $\{d(v, w) \mid w \in A\}$ existe bien et est positive ou nulle : ce sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est non vide et minorée par 0.

PROPOSITION 2.29. *Soit $v \in E$. On a*

$$d(v, F) = \|v - p_F(v)\|.$$

DÉMONSTRATION. Soit $w \in F$. On a

$$\|v - w\|^2 = \|v - p_F(v) + p_F(v) - w\|^2 = \|v - p_F(v)\|^2 + \|p_F(v) - w\|^2$$

par le théorème de Pythagore (lemme 2.10) car $v - p_F(v) \in F^{\perp}$ (par définition de la projection orthogonale : il existe un unique vecteur $u \in F^{\perp}$ tel que $v = p_F(v) + u$) et $p_F(v) - w \in F$ (car F est un sous-espace vectoriel de E).

Ainsi, pour tout $w \in F$, $\|v - w\|^2 \geqslant \|v - p_F(v)\|^2$ donc $\|v - w\| \geqslant \|v - p_F(v)\|$ donc $\inf\{\|v - w\| \mid w \in F\} \geqslant \|v - p_F(v)\|$. De plus, comme $p_F(v) \in F$, $\inf\{\|v - w\| \mid w \in F\} \leqslant \|v - p_F(v)\|$. Au total, $\|v - p_F(v)\| = \inf\{\|v - w\| \mid w \in F\} = d(v, F)$. □

On définit également la symétrie orthogonale par rapport à F :

DÉFINITION 2.30. *On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$. Il s'agit de l'involution linéaire de E qui à tout vecteur $v = w + u$ de E avec $w \in F$ et $u \in F^\perp$ associe le vecteur $w - u$. On note s_F cette application.*

REMARQUE 2.31.
— "Involution linéaire de E" signifie que s_F est une application linéaire de E dans E telle que $s_F \circ s_F = \mathrm{Id}_E$. Autrement dit, s_F est un automorphisme linéaire de E d'inverse lui-même.
— Comme pour toute symétrie vectorielle, on a $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$ (si $v = w + u \in E$ avec $w \in F$ et $u \in F^\perp$, on a $(2p_F - \mathrm{Id}_E)(v) = 2w - (w + u) = w - u = s_F(v)$).
— Si $\{e_1, \dots, e_p\}$ est une base de F et $\{e_{p+1}, \dots, e_n\}$ est une base de $F^\perp$ alors $\mathcal{B} := \{e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n\}$ est une base de E dans laquelle la matrice représentative de s_F est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & -I_{n-p} \end{pmatrix}$$

7. Représentation matricielle du produit scalaire

Afin d'aider aux calculs, on cherche à représenter le produit scalaire de façon matricielle.

DÉFINITION 2.32. *On appelle matrice représentative du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice*

$$\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle) := (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \cdots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \cdots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

REMARQUE 2.33. Attention aux confusions avec la matrice représentative d'une application linéaire !

EXEMPLE 2.34.
— Si $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{can}}) = I_n$. Plus généralement, la base $\mathcal{B}$ est orthonormale par rapport au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si et seulement si $\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle) = I_n$.
— Considérons sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ de dimension 3 le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini dans l'exemple 2.2 4.. On note $\mathcal{B}$ la base $\{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ et on calcule alors

$$\begin{aligned}
\langle 1, 1 \rangle &= \int_0^1 1 \, \mathrm{d}t = [t]_0^1 = 1 \\
\langle 1, X \rangle = \langle X, 1 \rangle &= \int_0^1 t \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \\
\langle 1, X^2 \rangle = \langle X^2, 1 \rangle &= \int_0^1 t^2 \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \\
\langle X, X \rangle &= \int_0^1 t^2 \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \\
\langle X, X^2 \rangle = \langle X^2, X \rangle &= \int_0^1 t^3 \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} \\
\langle X^2, X^2 \rangle &= \int_0^1 t^4 \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}}\left(\langle\cdot,\cdot\rangle\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

PROPOSITION 2.35. *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot,\rangle)$ un espace euclidien et soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base (quelconque) de E. Alors, pour tous vecteurs v, w de E,*

$$\langle v, w\rangle = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}}\left(\langle\cdot,\cdot\rangle\right)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w).$$

DÉMONSTRATION. Écrivons $A = \mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}}\left(\langle\cdot,\cdot\rangle\right) = \left(\langle e_i, e_j\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Par bilinéarité du produit scalaire, si v et w sont deux vecteurs de E de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$, alors

$$\begin{aligned}\langle v, w\rangle &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i \langle e_i, e_j\rangle y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \langle e_i, e_j\rangle y_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i (AY)_i \text{ (où } (AY)_i \text{ désigne la } i^{\text{ème}} \text{ coordonnée du vecteur colonne } AY) \\ &= {}^tXAY. \quad \square\end{aligned}$$

On notera $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ c'est à dire les matrices A telles que i.e. ${}^tA = A$.

DÉFINITION 2.36. *Soit A une matrice symétrique réelle de taille n. On dit que A est*

— *positive si, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXAX \geqslant 0$,*

— *définie positive si, pour tout $X \in \mathbb{R}^n \backslash \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, ${}^tXAX > 0$.*

EXEMPLE 2.37. (1) La matrice symétrique $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est définie positive : pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$), ${}^tXAX = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy = (x+y)^2 + y^2 + 3z^2 \geqslant 0$, et cette quantité est égale à 0 ssi $x = y = z = 0$ ssi $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) La matrice symétrique $B := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est positive car, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, ${}^tXBX = 2x^2 + 11y^2 - 6xy = (x-3y)^2 + x^2 + 2y^2 \geqslant 0$, mais elle n'est pas définie positive car $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

PROPOSITION 2.38. *Soit E un espace vectoriel réel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Alors la matrice d'un produit scalaire sur E est symétrique, positive et inversible. Réciproquement, toute matrice A symétrique, positive et inversible définit un produit scalaire sur E*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (v = \sum_i v_i e_i, w = \sum_i w_i e_i) & \mapsto & \langle v, w \rangle_A := \sum_{ij} a_{ij} v_i w_j = {}^t V A W \end{array}$$

où $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ *et* $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

DÉMONSTRATION. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E. Comme le produit scalaire est symétrique, on a, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\langle e_i, e_j \rangle = \langle e_j, e_i \rangle$ et la matrice $A := \mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ est donc symétrique. Comme le produit scalaire est positif, la matrice A l'est aussi par la définition 2.36. Le fait que le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ soit "défini" s'exprime dans le fait que $\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ est inversible. En effet, soit X un vecteur colonne de taille n tel que $AX = 0$, alors ${}^t X A X = 0$ et donc $\langle v, v \rangle = 0$ où v désigne le vecteur de coordonnées X dans la base $\mathcal{B}$. Par suite, $v = 0_E$ et X est donc le vecteur colonne nul. Comme le noyau de la matrice carrée A est réduit au vecteur colonne nul, A est inversible.

Réciproquement, si A est une matrice symétrique, positive et inversible, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ est bilinéaire, symétrique et positive. Soit v tel que $\langle v, v \rangle_A = 0$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle e_i + \lambda v, e_i + \lambda v \rangle_A = \langle e_i, e_i \rangle_A + 2\lambda \langle e_i, v \rangle_A \geqslant 0$ implique que $\langle e_i, v \rangle_A = \sum_j a_{ij} v_j = 0$. Alors, $AV = 0$ et comme V est inversible, $V = 0$. Par conséquent, $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ est définie : c'est donc un produit scalaire. $\square$

On peut à présent se demander comment sont reliées les matrices représentatives de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans deux bases (quelconques) différentes, autrement dit s'intéresser à la question du changement de base pour la matrice représentative d'un produit scalaire.

PROPOSITION 2.39. *Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace euclidien E et soit $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Alors*

$$\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}'}(\langle \cdot, \cdot \rangle) = {}^t P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} \, \mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle) \, P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$$

DÉMONSTRATION. Soient $v, w \in E$. Comme au début de la section, notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$, $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$ et $A := \mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$. Notons ensuite $X' := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)$, $Y' := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(w)$ et $A' := \mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}'}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$.

On a $X = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} X'$ et $Y = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} Y'$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} \langle v, w \rangle & = & {}^t X A Y \\ & = & {}^t \left(P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} X' \right) A \left(P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} Y' \right) \\ & = & {}^t X' \left({}^t P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} A \, P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} \right) Y'. \end{array}$$

Remarquons maintenant que, si $M = (m_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une matrice carrée de taille n quelconque et si, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, E_i désigne le vecteur colonne avec coordonnées 1 à la ligne i et 0 sur les autres lignes, on a, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, ${}^t E_i M E_j = m_{i\,j}$.

Soient alors $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ et notons $\mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$. On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(e'_i) = E_i$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(e'_j\right) = E_j$ et, par l'égalité ci-dessus,

$$\left\langle e'_i, e'_j \right\rangle = {}^t E_i \left({}^t P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} A \, P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} \right) E_j.$$

Autrement dit, le coefficient à la ligne i et la colonne j de la matrice A' est égal au coefficient à la ligne i et la colonne j de la matrice ${}^t P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} A \, P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$. Par conséquent, $A' = {}^t P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} A \, P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$. $\square$

REMARQUE 2.40. Attention à ne surtout pas confondre ce changement de base pour les produits scalaires avec le changement de base pour les applications linéaires.

8. Orthogonalité et dualité dans les espaces euclidiens

Effectuons un petit retour sur la dualité linéaire. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. On a vu au chapitre précédent que, même si E et son dual E^* sont isomorphes, il n'existe en général pas d'isomorphisme canonique (i.e. ne dépendant pas d'un choix de bases) entre E et E^*. Mais si E est maintenant muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, celui-ci permet de construire un tel isomorphisme canonique entre E et E^* :

THÉORÈME 2.41. *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Pour tout $v \in E$, on définit l'application linéaire $\Lambda_v : E \to \mathbb{R}$; $w \mapsto \langle v, w \rangle$. On définit ensuite l'application*

$$\Lambda : \begin{array}{ccc} E & \to & E^* \\ v & \mapsto & \Lambda_v \end{array}$$

L'application Λ est un isomorphisme linéaire.

DÉMONSTRATION. Remarquons tout d'abord que, si $v \in E$, Λ_v est bien une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ (en d'autres termes $\Lambda_v \in E^*$) car le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.

Montrons ensuite que l'application Λ est bien linéaire. Soient donc $v_1, v_2 \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors, pour tout $w \in E$,

$$\begin{aligned} \Lambda(\lambda v_1 + \mu v_2)(w) &= \Lambda_{\lambda v_1 + \mu v_2}(w) = \langle \lambda v_1 + \mu v_2, w \rangle \\ &= \lambda \langle v_1, w \rangle + \mu \langle v_2, w \rangle = \lambda\, \Lambda_{v_1}(w) + \mu\, \Lambda_{v_2}(w) \\ &= (\lambda \Lambda_{v_1} + \mu \Lambda_{v_2})(w) \end{aligned}$$

i.e. $\Lambda(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda \Lambda(v_1) + \mu \Lambda(v_2)$.

Montrons enfin que Λ est injective : comme $\dim(E) = \dim(E^*)$, on obtiendra alors (par le théorème du rang) que Λ est bijective. Soit donc $v \in E$ tel que Λ_v est l'application identiquement nulle. En particulier, $\Lambda_v(v) = \langle v, v \rangle = 0$ donc $v = 0_E$. L'application Λ est donc bien injective, et Λ est donc un isomorphisme. $\square$

La surjectivité de Λ donne le

COROLLAIRE 2.42. *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Pour toute forme linéaire $\varphi \in E^*$, il existe un unique $v \in E$ tel que, pour tout $w \in E$, $\varphi(w) = \langle v, w \rangle$. De plus, comme Λ est bijective, $v = \Lambda^{-1}(\varphi)$.*

Intéressant en soi, ce résultat nous permet également de mettre une évidence une correspondance entre les notions d'orthogonal et d'annulateur d'un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien :

COROLLAIRE 2.43. *Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. On a*

$$\Lambda\left(F^\perp\right) = F^0.$$

DÉMONSTRATION. Montrons l'égalité équivalente $\Lambda^{-1}\left(F^0\right) = F^\perp$. On a

$$\Lambda^{-1}\left(F^0\right) = \left\{v \in E \mid \Lambda(v) \in F^0\right\} = \{v \in E \mid \text{ pour tout } w \in F, \langle v, w \rangle = 0\} = F^\perp \qquad \square$$

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Le corollaire précédent affirme en particulier que Λ induit, par restriction, un isomorphisme linéaire $F^\perp \to F^0$, et donc que $\dim\left(F^\perp\right) = \dim\left(F^0\right)$. On retrouve ainsi

COROLLAIRE 2.44. *On a $\dim(E) = \dim(F) + \dim\left(F^\perp\right)$.*

DÉMONSTRATION. On a, en utilisant proposition 1.23 1.,

$$\dim\left(F^\perp\right) = \dim\left(F^0\right) = \dim(E) - \dim(F). \qquad \square$$

9. Endomorphisme adjoint

PROPOSITION ET DÉFINITION 2.45. *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et soit f un endomorphisme de E. Il existe une et une seule application $f^* : E \to E$ tel que, pour tous vecteurs v et w de E,*

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle.$$

De plus, f^* est une application linéaire (et donc un endomorphisme de E). On appelle f^* l'<u>endomorphisme adjoint de f</u>.

DÉMONSTRATION. On montre l'existence de f^* en utilisant l'isomorphisme canonique entre E et E^* du théorème 2.41. Soit $w \in E$, on considère l'application

$$\varphi_w : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \langle f(v), w\rangle \end{array}$$

Cette application est linéaire car f l'est et φ_w est donc un élément du dual E^* de E. D'après le théorème 2.41, il existe donc un unique vecteur noté $f^*(w)$ de E tel que $\varphi_w = \Lambda(f^*(w))$ i.e. tel que, pour tout $v \in E$,

$$\langle f(v), w\rangle = \varphi_w(v) = \Lambda(f^*(w))(v) = \langle f^*(w), v\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle.$$

On note alors f^* l'application qui à tout vecteur w de E associe $f^*(w)$. L'unicité évoquée ci-dessus montre l'unicité de l'application $f^* : E \to E$ telle que, pour tous $v, w \in E$, $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle$.

Montrons à présent sa linéarité : soient $w_1, w_2 \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors, pour tout $v \in E$,

$$\begin{aligned} \langle v, f^*(\lambda w_1 + \mu w_2)\rangle &= \langle f(v), \lambda w_1 + \mu w_2\rangle \\ &= \lambda\langle f(v), w_1\rangle + \mu\langle f(v), w_2\rangle \\ &= \lambda\langle v, f^*(w_1)\rangle + \mu\langle v, f^*(w_2)\rangle \\ &= \langle v, \lambda f^*(w_1) + \mu f^*(w_2)\rangle \end{aligned}$$

Ainsi, $\Lambda(f^*(\lambda w_1 + \mu w_2)) = \Lambda(\lambda f^*(w_1) + \mu f^*(w_2))$. Par injectivité de l'application Λ, on obtient alors l'égalité $f^*(\lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda f^*(w_1) + \mu f^*(w_2)$ et f^* est donc bien linéaire. □

Avant d'étudier le pendant matriciel de cette opération d'"adjonction" des endomorphismes de E, on en montre quelques propriétés de base :

PROPOSITION 2.46. *(1)* $(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$.

(2) Si $g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^*$ et $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

(3) Si f est une application bijective, son adjoint f^* l'est également et $(f^*)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^*$.

(4) $(f^*)^* = f$.

DÉMONSTRATION. (1) Pour tous $v, w \in E$, on a $\langle \mathrm{Id}_E(v), w\rangle = \langle v, w\rangle = \langle v, \mathrm{Id}_E(w)\rangle$ donc $(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$ (par unicité de l'adjoint).

(2) Pour tous $v, w \in E$, on a

$$\begin{aligned} \langle(\lambda f + \mu g)(v), w\rangle &= \lambda\langle f(v), w\rangle + \mu\langle g(v), w\rangle = \lambda\langle v, f^*(w)\rangle + \mu\langle v, g^*(w)\rangle \\ &= \langle v, (\lambda f^* + \mu g^*)(w)\rangle \end{aligned}$$

donc $(\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^*$.

Pour tous $v, w \in E$, on a

$$\begin{aligned} \langle g \circ f(v), w\rangle &= \langle g(f(v)), w\rangle = \langle f(v), g^*(w)\rangle \\ &= \langle v, f^*(g^*(w))\rangle = \langle v, f^* \circ g^*(w)\rangle \end{aligned}$$

donc $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

(3) On a $f^* \circ \left(f^{-1}\right)^* = \left(f^{-1} \circ f\right)^* = (\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$ et $\left(f^{-1}\right)^* \circ f^* = \left(f \circ f^{-1}\right)^* = (\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$.

(4) Pour tous $v, w \in E$, on a
$$\langle f^*(v), w\rangle = \langle w, f^*(v)\rangle = \langle f(w), v\rangle = \langle v, f(w)\rangle$$
donc $(f^*)^* = f$. □

REMARQUE 2.47. On dit que l'endomorphisme f est auto-adjoint si $f^* = f$. L'identité Id_E est un exemple d'endomorphisme auto-adjoint de E.

LEMME 2.48. *Les projections orthogonales et les symétries orthogonales sont auto-adjointes.*

DÉMONSTRATION. Soit E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et p la projection orthogonale sur F. Alors, pour tout (v, w) de E^2,
$$\langle p(v), w\rangle = \langle p(v), p(w)\rangle = \langle v, p(w)\rangle.$$
Donc p est auto-adjoint.

Maintenant, soit s la symétrie orthogonale par rapport à F. On a $s = 2p - Id_E$ et donc $s^\star = 2p^\star - Id_E^\star = s$. La symétrie orthogonale s est donc aussi auto-adjointe. □

Donnons également deux égalités intéressantes reliant noyaux et images de f et de son adjoint via l'opération "orthogonal d'un sous-ensemble" :

PROPOSITION 2.49. *On a* $\mathrm{Ker}\ f^* = (\mathrm{Im}\ f)^\perp$ *et* $\mathrm{Im}\ f^* = (\mathrm{Ker}\ f)^\perp$

DÉMONSTRATION. Soit $w \in E$. Supposons que $w \in \mathrm{Ker}\ f^*$. Alors, pour tout $v \in E$,
$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle = \langle v, 0\rangle = 0$$
donc $w \in (\mathrm{Im}\ f)^\perp$. Réciproquement, si $w \in (\mathrm{Im}\ f)^\perp$ alors, pour tout $v \in E$,
$$\langle v, f^*(w)\rangle = \langle f(v), w\rangle = 0,$$
en particulier $\langle f^*(w), f^*(w)\rangle = 0$ donc $f^*(w) = 0_E$ i.e. $w \in \mathrm{Ker}\ f^*$.

Pour montrer la seconde égalité, on utilise l'égalité précédente ainsi que la proposition 2.23 3) et la proposition 2.46 3) :
$$\mathrm{Im}\ f^* = \left((\mathrm{Im}\ f^*)^\perp\right)^\perp = \left(\mathrm{Ker}\ (f^*)^*\right)^\perp = (\mathrm{Ker}\ f)^\perp$$ □

Intéressons-nous à présent à la représentation matricielle des endomorphismes adjoints, plus précisément à leur représentation dans une base orthonormale de $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$:

PROPOSITION 2.50. *Soit* $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *une base orthonormale de* E. *Alors*
$$\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f^*) = {}^t\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f).$$

DÉMONSTRATION. Pour tous $v, w \in E$, on a, puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormale et d'après la définition de l'adjoint,
$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle \Leftrightarrow {}^t(\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f)\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(v))\,\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(w) = {}^t\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(v)\,(\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f^*)\,\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(w))$$
i.e.
$${}^t\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(v)\,{}^t\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f)\,\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(w) = {}^t\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(v)\,\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f^*)\,\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(w)$$
En prenant pour v et w les vecteurs de la base $\mathcal{B}$, on obtient, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ l'égalité
$${}^tE_i\,{}^t\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f)E_j = {}^tE_i\,\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f^*)\,E_j$$
(voir la démonstration de la proposition 2.39) et on a donc bien ${}^t\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f) = \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f^*)$. □

Deux conséquences directes de la représentation matricielle dans une base orthonormale de l'"adjonction" par la transposition sont les suivantes :

COROLLAIRE 2.51. *Le rang de l'adjoint f^* de f est égal au rang de f et le déterminant de f^* est égal au déterminant de f.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E alors

$$\mathrm{rg}\,(f^*) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(f^*)) = \mathrm{rg}\,\left({}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \mathrm{rg}\,(f)$$

et

$$\det\,(f^*) = \det\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(f^*)) = \det\,\left({}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right) = \det\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \det\,(f)\,. \qquad \square$$

La proposition 2.50 nous donne également une nouvelle interprétation vectorielle de la transposition matricielle : si A est une matrice carrée de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, représentant un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique, alors ${}^tA$ est la matrice représentative de l'endomorphisme f^* adjoint de f par rapport au produit scalaire canonique (pour lequel la base canonique est une base orthonormale).

10. Endomorphismes orthogonaux et matrices orthogonales

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit f un endomorphisme de E.

DÉFINITION 2.52. *On dit que f est un endomorphisme orthogonal de E si $f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$.*

EXEMPLE 2.53. L'identité Id_E de E est un endomorphisme orthogonal.

REMARQUE 2.54. Si f est orthogonal alors f est bijectif et $f^{-1} = f^*$. En effet, l'égalité $f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$ implique l'injectivité de f (si $v \in E$ vérifie $f(v) = 0_E$ alors $v = f^*\,(f(v)) = 0_E$) et donc sa bijectivité car f est une application linéaire de E dans E. L'égalité $f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$ est alors équivalente à $f^* = f^{-1}$. En particulier, on a également l'égalité $f \circ f^* = \mathrm{Id}_E$.

Remarquons que, réciproquement, l'égalité $f \circ f^* = (f^*)^* \circ f^* = \mathrm{Id}_E$ implique $f^* \circ (f^*)^* = f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$.

On déduit également de ces considérations que f est orthogonal ssi son adjoint f^* est orthogonal.

L'orthogonalité d'un endomorphisme se caractérise géométriquement :

PROPOSITION 2.55. *f est un endomorphisme orthogonal si et seulement si f conserve le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ si et seulement si f conserve la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée à $\langle\cdot,\cdot\rangle$ si et seulement si f conserve la distance euclidienne d associée à $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

DÉMONSTRATION. On montre que les assertions

(1) f est orthogonal,
(2) pour tous $v, w \in E$, $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$,
(3) pour tout $v \in E$, $\|f(v)\| = \|v\|$,
(4) pour tous $v, w \in E$, $d\,(f(v), f(w)) = d(v, w)$,

sont équivalentes.

Montrons tout d'abord $1 \Rightarrow 2$: supposons que f est orthogonal, alors, pour tous $v, w \in E$,

$$\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, f^* \circ f(w)\rangle = \langle v, w\rangle.$$

Montrons ensuite $2 \Rightarrow 3$: si f préserve le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, alors, pour tout $v \in E$,

$$\|f(v)\| = \sqrt{\langle f(v), f(v)\rangle} = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \|v\|.$$

Montrons également $3 \Rightarrow 4$: si f préserve la norme euclidienne associé à $\langle\cdot,\cdot\rangle$, alors, pour tous $v, w \in E$,

$$d\,(f(v), f(w)) = \|f(w) - f(v)\| = \|f(w - v)\| = \|w - v\| = d(v, w).$$

Montrons enfin $4 \Rightarrow 1$: Commençons par remarquer que $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ car f est linéaire et, pour tout $u \in E$, $d(u, 0) = \|u\|$ et, pour tous $v, w \in E$, $\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}\left(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)$

(Égalité de polarisation). Si f préserve la distance euclidienne, f préserve donc également le produit scalaire et, pour tous $v, w \in E$, on a alors

$$\langle f^* \circ f(v), w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$$

et donc $\langle f^* \circ f(v) - v, w\rangle = 0$. En particulier, pour tout $v \in E$, $\langle f^* \circ f(v) - v, f^* \circ f(v) - v\rangle = 0$ donc $f^* \circ f(v) - v = 0_E$ i.e. $f^* \circ f(v) = v$. Ainsi $f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$ et f est orthogonal. □

REMARQUE 2.56. Un endomorphisme orthogonal est également appelé isométrie.

Une autre caractérisation d'un endomorphisme orthogonal est qu'il transforme toute base orthonormale en une base orthonormale :

PROPOSITION 2.57. *L'endomorphisme f est orthogonal si et seulement si f associe à toute base orthonormale de E une base orthonormale de E.*

DÉMONSTRATION. Supposons que f est orthogonal et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormale de E. Comme f est orthogonal, on a, par la proposition précédente, $\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i\,j}$, donc la famille de n vecteurs $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est orthonormale : il s'agit donc d'une base orthonormale de E.

Réciproquement, soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormale de E et supposons que la famille $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est orthonormale. Soient alors $v, w \in E$, de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. On a

$$\langle f(v), f(w)\rangle = \left\langle f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right), f\left(\sum_{j=1}^n y_j e_j\right)\right\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j \langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle v, w\rangle.$$

Par la proposition précédente, f est donc orthogonal. □

REMARQUE 2.58. Remarquons que, d'après la démonstration ci-dessus, il suffit qu'il existe une base orthonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E telle que la famille $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ soit orthonormale pour que l'endomorphisme f soit orthogonal.

Passons maintenant à la caractérisation matricielle de l'orthogonalité.

PROPOSITION 2.59. *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Soit $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$. L'endomorphisme f de E est orthogonal si et seulement si ${}^tAA = I_n$.*

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 2.50, la matrice représentative de l'adjoint f^* de f dans $\mathcal{B}$ est ${}^tA$ et donc $f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$ ssi ${}^tAA = I_n$ □

Ce résultat motive la définition suivante :

DÉFINITION 2.60. *On dit qu'une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ${}^tAA = I_n$.*

REMARQUE 2.61. Une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale ssi l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par A dans la base canonique est orthogonal.

EXEMPLE 2.62.

(1) Les matrices de rotation
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
sont orthogonales.

(2) Si σ est une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$, la matrice $P = (\delta_{i\sigma(j)})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est appelée matrice de la permutation σ. Les matrices de permutations sont carrées avec uniquement des 0 sauf un coefficient sur chaque ligne et chaque colonne qui vaut 1. Elles sont donc orthogonales.

(3) La matrice
$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
est orthogonale.

(4) Une symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonal (remarque 2.31). Une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel strict n'est pas un endomorphisme orthogonal (remarque 2.25).

Un point de vue supplémentaire donné par l'égalité "${}^tAA = I_n$" est le suivant : une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si les vecteurs colonnes la composant forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Dans ce cas, la matrice A est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base orthonormale formée par ses vecteurs colonnes. On peut généraliser cela de la façon suivante :

PROPOSITION 2.63. *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ et $\mathcal{B}'$ une base de E. Alors $\mathcal{B}'$ est orthonormale si et seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale.*

DÉMONSTRATION. La matrice de passage $P := P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ de $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ à $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ est formée, dans l'ordre, des vecteurs coordonnées des vecteurs e'_i, $i = 1, \dots, n$, dans la base $\mathcal{B}$. On a alors, comme $\mathcal{B}$ est orthonormale,
$${}^tPP = \begin{pmatrix} \langle e'_1, e'_1\rangle & \cdots & \langle e'_1, e'_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e'_n, e'_1\rangle & \cdots & \langle e'_n, e'_n\rangle \end{pmatrix}$$
Ainsi, la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est orthogonale ssi la famille de vecteurs $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ est orthonormale. □

REMARQUE 2.64. En particulier, toute matrice de passage d'une base orthonormale à une autre est orthogonale.

Remarquons ensuite que l'égalité "${}^tAA = I_n$" permet le calcul du déterminant d'une matrice orthogonale et donc d'un endormorphisme orthogonal :

PROPOSITION ET DÉFINITION 2.65. *Soit A une matrice orthogonale de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. *Alors* $\det(A) = 1$ *ou* $\det(A) = -1$. *Ainsi, si f est orthogonal,* $\det(f) = 1$ *ou* $\det(f) = -1$.

Si $\det(A) = 1$, *resp.* $\det(f) = 1$, *on dit que A, resp. f, est une matrice orthogonale <u>directe</u>, resp. endomorphisme orthogonal <u>direct</u>. Si* $\det(A) = -1$, *resp.* $\det(f) = -1$, *on dit que A, resp. f, est une matrice orthogonale <u>indirecte</u>, resp. endomorphisme orthogonal <u>indirect</u>.*

DÉMONSTRATION. On a ${}^tAA = I_n$ donc $1 = \det\left({}^tAA\right) = \det\left({}^tA\right)\det(A) = (\det(A))^2$ d'où $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$

Ainsi, si f est orthogonal, comme sa matrice représentative dans une base orthonormale est orthogonale (proposition 2.59), on a $\det(f) = 1$ ou $\det(f) = -1$. □

EXEMPLE 2.66. (1) La matrice orthogonale A de l'exemple 2.62 1. est directe.

(2) Une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel F de E est directe ou indirecte suivant la parité de la "codimension" de F : le déterminant d'une telle symétrie orthogonale est $(-1)^{n-p}$ si p est la dimension de F (remarque 2.31).

Terminons cette section en remarquant que l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E muni de la composition forme un groupe. On a déjà vu plus haut que l'identité Id_E de E est orthogonale et que, si f est un endomorphisme orthogonal, il en est de même pour son adjoint. Enfin, la composition d'endomorphismes orthogonaux est également orthogonale :

PROPOSITION 2.67. *Soit g un endomorphisme de E et supposons que f et g sont orthogonaux. Alors la composition $f \circ g$ (ainsi que la composition $g \circ f$) est orthogonale.*

DÉMONSTRATION. On a $(f \circ g)^* \circ (f \circ g) = g^* \circ f^* \circ f \circ g = g^* \circ \mathrm{Id}_E \circ g = g^* \circ g = \mathrm{Id}_E$. □

COROLLAIRE ET DÉFINITION 2.68. *L'ensemble, noté $\mathcal{O}(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ou simplement $\mathcal{O}(E)$ lorsque le contexte est clair, des endomorphismes orthogonaux de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ des automorphismes linéaires de E muni de la composition (appelé groupe linéaire de E). On a appelle $(\mathcal{O}(E), \circ)$ le groupe orthogonal de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.*

De manière équivalente, l'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ des matrices réelles inversibles de taille n muni du produit matriciel. $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est appelé groupe orthogonal de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

REMARQUE 2.69. Le sous-ensemble de $\mathcal{O}(E)$ des endomorphismes orthogonaux directs est un sous-groupe de $(\mathcal{O}(E), \circ)$ appelé groupe spécial orthogonal de E et noté $\mathcal{SO}(E)$.

Le sous-ensemble de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales directes est un sous-groupe de $(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ appelé groupe spécial orthogonal de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et noté $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

11. Décomposition QR d'une matrice inversible

Soit à nouveau $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Nous allons étudier le pendant matriciel du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (théorème 2.18) qui permet notamment de construire, à partir d'une base quelconque $\{v_1, \dots, v_n\}$ de E, une base orthonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E.

THÉORÈME 2.70 (Décomposition QR d'une matrice inversible). *Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ et soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Il existe une unique matrice orthogonale $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et une unique matrice $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = QR$. On appelle cette écriture la décomposition QR de A.*

DÉMONSTRATION. Sot A une matrice inversible de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (i.e. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Notons $v_1, \dots, v_n$ les vecteurs colonnes qui, dans l'ordre, forment la matrice A. La famille $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_n\}$, considérée comme famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, est une base de $\mathbb{R}^n$: si $\mathcal{B}_0$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$, A est alors la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}$.

Notons ensuite $\mathcal{B}' = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (par rapport au produit scalaire canonique) obtenue à partir du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Si Q désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}'$ (i.e. Q est la matrice formée, dans l'ordre, par les vecteurs colonnes $e_1, \dots, e_n$), comme les vecteurs colonnes de la matrice Q forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (par rapport au produit scalaire canonique), Q est orthogonale.

Dans le procédé de Gram-Schmidt, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, les relations

$$\epsilon_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, \epsilon_i \rangle}{\|\epsilon_i\|^2} \epsilon_i \text{ et } e_i = \frac{\epsilon_i}{\|\epsilon_i\|}$$

permettent d'écrire

$$v_{k+1} = \|\epsilon_{k+1}\| e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, \epsilon_i \rangle}{\|\epsilon_i\|} e_i$$

et donc d'obtenir directement la matrice R de passage de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ à la base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Elle est triangulaire supérieure avec coefficients diagonaux strictement positifs. On peut aussi noter, puisque la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ est orthonormale que les coefficients de

R s'obtiennent par produit scalaire

$$R = \begin{pmatrix} < e_1, v_1 > & < e_1, v_2 > & \cdots & \cdots & < e_1, v_n > \\ 0 & < e_2, v_2 > & \cdots & \cdots & < e_2, v_n > \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & < e_3, v_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & < e_n, v_n > \end{pmatrix}$$

Maintenant, en considérant la composée d'endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ muni de différentes bases

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}) \xrightarrow{Id} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_0) = \Big((\mathbb{R}^n, \mathcal{B}) \xrightarrow{Id} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}') \xrightarrow{Id} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_0)\Big)$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} A &= P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}_0}(Id) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}_0}(Id)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(Id) \\ &= P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} = QR. \end{aligned}$$

Il nous reste à montrer l'unicité de la décomposition. Soient donc $Q_1, Q_2 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et R_1, R_2 deux matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$.

On a alors $R_1R_2^{-1} = Q_1^{-1}Q_2$ et $R_1R_2^{-1} = Q_1^{-1}Q_2$ est alors une matrice orthogonale $((\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ est un groupe) et triangulaire supérieure à coefficients strictement positifs (l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure à coefficients strictement positifs est une matrice triangulaire supérieure à coefficients strictement positifs). Il s'agit donc de la matrice I_n d'après le lemme qui suit cette preuve.

Ainsi, $R_1R_2^{-1} = Q_1^{-1}Q_2 = I_n$ et donc $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$. □

LEMME 2.71. *Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale et triangulaire supérieure à coefficients strictement positifs. Alors $A = I_n$.*

DÉMONSTRATION. Notons $v_1, \ldots, v_n$ les vecteurs colonnes qui, dans l'ordre, forment la matrice $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Le fait que A soit orthogonale signifie que, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i\,j}$. En particulier, $\langle v_1, v_1 \rangle = 1$. Mais, comme A est triangulaire supérieure, $\langle v_1, v_1 \rangle = a_{1\,1}^2$ et, comme $a_{1\,1}$ est strictement positif, on a nécessairement $a_{1\,1} = 1$. Pour tout $j \in \{2, \ldots, n\}$, on a alors $\langle v_1, v_j \rangle = a_{1\,j} = 0$ (autrement dit, la première ligne n'a que des coefficients nuls sauf le coefficient $a_{1\,1}$ qui est égal à 1).

Soit $k \in \{1, n-1\}$ et supposons que l'on a déjà montré que, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i\,j} = \delta_{i\,j}$ (autrement dit que pour les k premières lignes, tous les coefficients d'une ligne i donnée sont nuls sauf le coefficient $a_{i\,i}$ qui est égal à 1). On considère alors le vecteur colonne v_{k+1} dont, par hypothèse de récurrence, la seule coordonnée non nulle est $a_{k+1\,k+1} > 0$. Comme $\langle v_{k+1}, v_{k+1} \rangle = {a_{k+1\,k+1}}^2 = 1$, on a $a_{k+1\,k+1} = 1$ et, par suite, pour tout $j \in \{k+2, \ldots, n\}$, $\langle v_{k+1}, v_j \rangle = a_{k+1\,j} = 0$: la ligne $k+1$ n'a donc que des coefficients nuls sauf le coefficient $a_{k+1\,k+1}$ qui est égal à 1. □

EXEMPLE 2.72. Considérons la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de $M_3(\mathbb{R})$. On note $v_1 := (1,1,0)$, $v_2 := (1,2,0)$, $v_3 := (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ et on applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. On pose

$$\begin{array}{rcl}
\epsilon_1 & := & v_1 = (1,1,0) \\
\epsilon_2 & := & v_2 - \dfrac{\langle v_2, \epsilon_1 \rangle}{\|\epsilon_1\|^2}\epsilon_1 = v_2 - \dfrac{3}{2}\epsilon_1 = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right) = \dfrac{1}{2}(-1,1,0) \\
\epsilon_2' & := & (-1,1,0) \\
\epsilon_3 & := & v_3 - \dfrac{\langle v_3, \epsilon_1 \rangle}{\|\epsilon_1\|^2}\epsilon_1 - \dfrac{\langle v_3, \epsilon_2' \rangle}{\|\epsilon_2'\|^2}\epsilon_2' = v_3 = (0,0,1) \\
e_1 & := & \dfrac{1}{\|\epsilon_1\|}\epsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \\
e_2 & := & \dfrac{1}{\|\epsilon_2'\|}\epsilon_2' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \\
e_3 & := & \dfrac{1}{\|\epsilon_3\|}\epsilon_3 = (0,0,1)
\end{array}$$

On note Q la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ formée par les coordonnées (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) des vecteurs e_1, e_2, e_3.

Détermination de R, Première démarche : Comme

$$\begin{array}{rcl}
v_1 & = & \epsilon_1 = \sqrt{2}e_1 \\
v_2 & = & \dfrac{3}{2}\epsilon_1 + \epsilon_2 = \dfrac{3}{2}\epsilon_1 + \dfrac{1}{2}\epsilon_2' = \dfrac{3}{\sqrt{2}}e_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}e_2 \\
v_3 & = & \epsilon_3 = e_3
\end{array}$$

la matrice de passage de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ à la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ est $R := \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

L'égalité

$$A = QR = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est la décomposition QR de A.

Détermination de R, Seconde démarche : Pour éviter d'avoir à suivre les calculs entre les bases $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ et $\{e_1, e_2, e_3\}$ on peut

— d'abord écrire la matrice Q sour la forme $Q = Q'D$ où Q' est la matrice $Q' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ des vecteurs colonnes de la famille orthogonale et D la matrice diagonale de l'inverse des normes $D = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— puis déterminer la matrice R à l'aide de $R = Q^{-1}A = {}^tQA = {}^tD{}^tQ'A = D{}^tQ'A$.

$$R = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 2.73. Un exemple d'application est la résolution des systèmes linéaires carrés inversibles de la forme $AX = Y$ d'inconnue X. En écrivant $A = QR$, le système devient équivalent au système triangulaire $RX = {}^tQY$.

12. Introduction aux espaces hermitiens

Si le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on définit l'analogue d'un produit scalaire par

DÉFINITION 2.74. *Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ est appelée*
produit scalaire hermitien si

(1) *pour tous $v_1, v_2, w \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\langle \lambda v_1 + \mu v_2, w\rangle = \lambda\langle v_1, w\rangle + \mu\langle v_2, w\rangle$,*

(2) *pour tous $v, w \in E$, $\langle w, v\rangle = \overline{\langle v, w\rangle}$ (en particulier, pour tout $v \in E$, $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$),*

(3) *pour tout $v \in E$, $\langle v, v\rangle \geqslant 0$, et $\langle v, v\rangle = 0$ si et seulement si $v = 0_E$,*

et un $\mathbb{C}$ espace vectoriel $(E, <\ ,\ >)$ muni d'un produit scalaire hermitien est appelé espace hermitien.

REMARQUE 2.75. Il resulte des deux premiers axiomes que le produit scalaire hermitien est anti-linéaire par rapport au second argument, i.e. pour tous $v, w_1, w_2 \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\langle v, \lambda w_1 + \mu w_2\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w_1\rangle + \overline{\mu}\langle v, w_2\rangle$. La positivité requise dans l'axiome 3 montre que le produit scalaire hermitien vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle v, w\rangle| \leqslant \|v\|\|w\|,$$

(et $|\langle v, w\rangle| = \|v\|\|w\|$ si et seulement si les vecteurs v et w sont liés) et induit une norme $\|\cdot\| : E \to [0; +\infty[\ ;\ v \mapsto \sqrt{\langle v, v\rangle}$, appelée norme hermitienne.

EXEMPLE 2.76. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, pour tous $v = (x_1, \ldots, x_n)$ et $w = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{C}^n$, on définit

$$\langle v, w\rangle_{\text{can}} := x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n} \ = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}.$$

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{can}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C} \\ (v, w) & \mapsto & \langle v, w\rangle_{\text{can}} \end{array}$ est alors un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^n$, appelé produit scalaire hermitien canonique sur $\mathbb{C}^n$.

Les analogues complexes des matrices orthogonales sont les matrices qui conservent le produit scalaire canonique sur $\mathbb{C}^n$ i.e. telles que ${}^tM\overline{M} = Id$. Elles sont appelées unitaires. On note que le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt vu dans le contexte des espaces vectoriels euclidiens fonctionne aussi dans le contexte des espaces hermitiens (i.e. des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels munis de produits scalaires hermitiens). Ainsi, tous ses corollaires comme l'existence de bases orthonormées, les formules de dimension, les propriétés de l'orthogonalité, sont valides dans ce contexte.

Chapitre 3

Rappels et compléments sur la réduction des endomorphismes

Introduction

On donne dans ce chapitre des rappels sur la théorie de réduction des endomorphismes, c'est-à-dire la recherche de bases dans lesquelles un endomorphisme donné possède la représentation matricielle la plus "simple" possible (la plus "réduite" possible).

On étudiera notamment les critères nécessaires et suffisants classiques de diagonalisabilité, directs (via la recherche des espaces propres) ou via les polynômes d'endomorphismes. On étudiera également la triangularisabilité et la réduction la plus aboutie des endomorphismes triangularisables, à savoir la réduction de Jordan pour laquelle nous donnerons une méthode systématique de réduction.

La première partie de ce chapitre étant constituée de rappels, les assertions seront la plupart du temps données sans preuve (on renvoie au cours de l'année passée pour les démonstrations). Nous les illustrerons cependant, ainsi que les méthodes, par des exemples. La preuve de l'existence de la réduction de Jordan pour les endomorphismes triangularisables sera elle donnée, notamment afin de dégager une méthode systématique de réduction.

Tout au long de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif quelconque et E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie.

1. Arithmétique des polynômes et applications

DÉFINITION 3.1 (Polynômes d'endomorphismes). *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et*

$$P(X) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$$

un polynôme à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. On définit l'endomorphisme $P(f)$ par

$$P(f) := a_d f^d + a_{d-1} f^{d-1} + \ldots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}_E.$$

où, pour $k \in \{1, \ldots, d\}$, f^k désigne la composée $k^{\text{ème}}$ de l'endomorphisme f avec lui-même. Un endomorphisme de E de cette forme est appelé polynôme de l'endomorphisme f.

On peut définir de façon analogue la notion de polynôme de matrice : si l'on reprend les notations de la définition ci-dessus et si A est une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on définit

$$P(A) := a_d A^d + a_{d-1} A^{d-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),$$

où, pour $k \in \{1, \ldots, N\}$, A^k désigne la puissance $k^{\text{ème}}$ de A.

LEMME 3.2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et $P(X), Q(X)$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Alors, $(PQ)(f) = (QP)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$.*

Comme $\mathbb{K}$ est un corps, on a

THÉORÈME 3.3. *L'anneau $\mathbb{K}[X]$ possède une division euclidienne : si A et B sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec B non nul, alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$.*

Ce théorème permet d'obtenir dans l'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X]$ l'essentiel des propriétés arithmétiques de l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$.

DÉFINITION 3.4. *On dit qu'un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est irréductible s'il n'est pas constant et s'il ne peut pas s'écrire comme produit de deux polynômes non constants.*

On dit que deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux si leurs seuls diviseurs communs sont les polynômes constants non nuls.

On dit qu'un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est scindé s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1. On dit qu'il est scindé à racines simples s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 à racines deux à deux distinctes.

EXEMPLE 3.5. Les polynômes $(X - a)^m$ et $(X - b)^p$ avec a, b deux éléments distincts de $\mathbb{K}$ sont premiers entre eux.

Par l'algorithme d'Euclide, on peut montrer

THÉORÈME 3.6 (Identité de Bezout). *Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Alors A et B sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux polynômes U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.*

Comme conséquence sur les endomorphismes on obtient le

THÉORÈME 3.7 (Théorème des noyaux). *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, P_2, \dots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux. Alors*

$$\ker\left(\prod_{i=1}^{m} P_i(f)\right) = \bigoplus_{i=0}^{m} \ker\ P_i(f).$$

DÉMONSTRATION. L'inclusion $\sum_{i=1}^{m} \ker\ P_i(f) \subset \ker\left(\prod_{i=0}^{m} P_i(f)\right)$ résulte des définitions.

Dans le cas de deux polynômes P_1, P_2, par le théorème de Bezout, il existe des polynômes U, V tels que $P_1U + P_2V = 1$ et donc $P_1(f) \circ U(f) + P_2(f) \circ V(f) = \mathrm{Id}_E$. Si v est un vecteur de $\ker\left(P_1(f) \circ P_2(f)\right)$, alors $v = P_1(f) \circ U(f)(v) + P_2(f) \circ V(f)(v)$ avec $P_1(f) \circ U(f)(v) \in \ker P_2(f)$ et $P_2(f) \circ V(f)(v) \in \ker P_1(f)$. On obtient donc l'inclusion opposée $\ker\left(P_1(f) \circ P_2(f)\right) \subset \ker P_2(f) + \ker P_1(f)$.

Montrons que les sous-espaces $\ker[P_1(f)]$ et $\ker[P_2(f)]$ sont en somme directe. On constate que $\ker[P_1(f)] \subset \ker[(P_1U)(f)]$ et de même $\ker[P_2(f)] \subset \ker[(P_2V)(f)]$. Par conséquent,

$$\ker[P_1(f)] \cap \ker[P_2(f)] \subset \ker[(P_1U)(f)] \cap \ker[(P_2V)(f)] \subset \ker[(P_1U)(f) + (P_2V)(f)] = \ker[\mathrm{Id}_E] = \{0\}.$$

Dans le cas général, on raisonne par récurrence en notant que l'hypothèse implique que P_m est premier avec $\prod_{i=1}^{m-1} P_i$. $\square$

2. Diagonalisabilité et diagonalisation

On note $n := \dim(E)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. La forme "la plus simple" pour une matrice carrée est la forme diagonale. Son action sur un vecteur est alors simplement la multiplication de chaque coordonnée par le coefficient diagonal correspondant. Nous allons rappeler dans cette section des conditions suffisantes, voire nécessaires et suffisantes, sous lesquelles f possède une matrice représentative diagonale (diagonalisabilité) et, dans ce cas, chercher à déterminer une base de E dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale (diagonalisation).

2.1. Côté endomorphisme. On commence par donner la définition précise de la diagonalisabilité de f :

DÉFINITION 3.8. *Soit f un endomorphisme de E. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur non nul v de E tel que $f(v) = \lambda v$, autrement dit si l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.*

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f, on note $E_\lambda := \mathrm{Ker}\ (f - \lambda \mathrm{Id}_E)$: il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E stable par f appelé sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ. Tout vecteur non nul de E_λ est appelé vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. L'ensemble des valeurs propres de f dans $\mathbb{K}$ est appelé spectre de f, et noté $\mathrm{Sp}(f)$.

EXEMPLE 3.9. Le réel 2 est une valeur propre de l'endomorphisme

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y, -x+4y) \end{array}$$

car, par exemple, $f((2,1)) = (4,2) = 2(2,1)$, et on a

$$E_2 = \text{Ker } (f - 2\,\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\right\} = \text{Vect}\{(2,1)\}.$$

PROPOSITION 3.10. *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, des valeurs propres deux à deux distinctes de f. Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_k}$ correspondants sont en somme directe.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le théorème des noyaux aux polynômes deux à deux premiers entre $P_i := X - \lambda_i$ et donc $E_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i \text{Id}) = \ker P_i(f)$. □

DÉFINITION 3.11. *On dit que l'endomorphisme f est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que*

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

De façon équivalente, l'endomorphisme f est donc diagonalisable si et seulement si il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

Puisque les espaces propres sont de dimension au moins 1, on déduit de la proposition 3.10 le corollaire

COROLLAIRE 3.12. *Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n qui a n valeurs propres distinctes est diagonalisable.*

Plus généralement,

THÉORÈME 3.13. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si E est somme directe des espaces propres de f si et seulement si $\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}) = \dim(E)$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, désignent les valeurs propres deux à deux distinctes de f*

EXEMPLE 3.14. Reprenons l'endomorphisme f de l'exemple 3.9.On avait déterminé $E_2 = \text{Vect}\{(2,1)\}$. De la même façon, on obtient que $\text{Sp}(f) = \{2;3\}$ et

$$E_3 = \text{Ker } (f - 3\,\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\right\} = \text{Vect}\{(1,1)\}.$$

Ainsi, $\dim(E_1) + \dim(E_2) = 2 = \dim\left(\mathbb{R}^2\right)$: f est donc diagonalisable. De plus, la famille $\mathcal{B} := \{(2,1),(1,1)\}$ est une base de E formée de vecteurs propres de f et on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (on dit qu'on a diagonalisé f).

Diagonaliser un endomorphisme diagonalisable f de E, c'est déterminer une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale et exprimer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

2.2. Côté matrice. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit A une matrice carrée de $\text{M}_n(\mathbb{K})$. On peut, de façon analogue, définir une notion de valeur propre, d'espace propre et de vecteur propre pour A : un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur colonne non nul X de $\text{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda X$, autrement dit si le sous-espace vectoriel $E_\lambda := \text{Ker } (A - \lambda I_n)$ de $\text{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ n'est pas réduit au vecteur colonne nul, et, dans ce cas, E_λ est appelé sous-espace propre de A associé et tout vecteur colonne non nul de E_λ est appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Supposons que $\dim(E) = n$ et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $v \in E$. Si la matrice A est la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$ (i.e. $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$), alors λ est une valeur propre de f ssi λ est une valeur propre de A et, dans ce cas, v est un vecteur propre de f associé à λ ssi $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est un vecteur propre de A associé à λ.

La diagonalisation d'un endomorphisme correspond à un changement de base vers une base dans laquelle la matrice représentative de l'endomorphisme considéré est diagonale. L'analogue matriciel du changement de base est l'opération de "conjugaison" par une matrice inversible : en considérant la composée d'endomorphismes de E muni de différentes bases

$$(E,\mathcal{B}) \xrightarrow{f} (E,\mathcal{B}) = \Big((E,\mathcal{B}) \xrightarrow{Id} (E,\mathcal{B}') \xrightarrow{f} (E,\mathcal{B}') \xrightarrow{Id} (E,\mathcal{B})\Big)$$

on peut écrire

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)P^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}.$$

DÉFINITION 3.15. *Soit A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est semblable à B s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$ (la relation de similitude sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence).*

DÉFINITION 3.16. *On dit que A est diagonalisable s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale D de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Ainsi, A est diagonalisable si et seulement si A est semblable à une matrice diagonale.*

Diagonaliser une matrice diagonalisable A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, c'est déterminer une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale et exprimer $P^{-1}AP$. Diagonaliser une matrice diagonalisable permet entre autres de calculer ses puissances.

EXEMPLE 3.17. La matrice $A := \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ n'a que 5 comme valeur propre car les matrices $\begin{pmatrix} 5-x & 2 \\ 0 & 5-x \end{pmatrix}$ avec x différent de 5 sont toutes inversibles. Mais l'espace propre de valeur propre 5 est

$$E_5 = \mathrm{Ker}\ (A - 5\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ |y = 0\big\} = \mathrm{Vect}\{(1,0)\}$$

de dimension 1 : la matrice A n'est donc pas diagonalisable. On aurait aussi pu remarquer que si A était diagonalisable, comme sa seule valeur propre est 5, elle serait semblable à la matrice $5\mathrm{Id}$ et donc égale à la matrice $5\mathrm{Id}$.

3. Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

On va dans cette section présenter des conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité, exprimées à l'aide de la notion de polynôme d'endomorphisme. Tous les énoncés et notions présentés ci-après sur les polynômes d'endomorphismes ont leur analogues immédiats pour les polynômes de matrices.

DÉFINITION 3.18. *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f)$ est l'endomorphisme identiquement nul de E.*

EXEMPLE 3.19. Considérons la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et le polynôme $P := X(X-1)$ de $\mathbb{R}[X]$. On a

$$P(A) = A(A - I_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme P est donc un polynôme annulateur de A.

Un premier pas entre les polynômes annulateurs et la réduction des endomorphismes est donné par le résultat suivant :

LEMME 3.20. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Toutes les valeurs propres de f sont des racines de tout polynôme annulateur de f.*

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f et v un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Soit P un polynôme annulateur de f. Alors, comme $f(v) = \lambda v$, $P(f)(v) = P(\lambda)v$. Comme P est supposé annulateur de f et v non nul, on en déduit que $P(\lambda) = 0$. $\square$

EXEMPLE 3.21. — Reprenons la matrice A de l'exemple 3.19. Comme $P = X(X-1)$ est un polynôme annulateur de A, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0; 1\}$.

— Si l'endomorphisme f vérifie $f^3 = f$ i.e. le polynôme $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ annule f, alors $\mathrm{Sp}(f) \subset \{0; -1; 1\}$.

On en vient à un premier critère, nécessaire et suffisant, de diagonalisabilité d'un endomorphisme mettant en jeu la notion de polynôme annulateur, conséquence du théorème des noyaux

THÉORÈME 3.22. *L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur de f qui soit scindé à racines simples.*

Il est à noter que ce critère permet, si l'on trouve un tel polynôme annulateur de f scindé à racines simples, de montrer que f est diagonalisable sans avoir à calculer les dimensions des espaces propres de f.

EXEMPLE 3.23. Si f vérifie alors $f^3 = f$ alors f est diagonalisable car le polynôme $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$, annulateur de f, est scindé à racines simples.

Si un endomorphisme f d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel vérifie $f^3 = \mathrm{Id}_E$ alors f est diagonalisable, car $X^3 - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

COROLLAIRE 3.24. *La restriction à un sous-espace stable d'un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable.*

DÉMONSTRATION. Si f est diagonalisable et F un sous-espace de E stable par f, alors la restriction de f à F est bien définie comme endomorphisme $f_F : F \to F$. Par ailleurs, puisque f est diagonalisable, il admet un polynôme annulateur P scindé à racines simples. Mais P annule aussi f_F qui est donc diagonalisable. $\square$

4. Polynôme minimal

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Remarquons que l'ensemble I_f des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ qui annulent f est un idéal de l'anneau $\mathbb{K}[X]$: le polynôme nul annule f et, si P et Q sont deux polynômes annulant f et si R est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $(P-Q)(f) = P(f) - Q(f) = 0$ et $(RP)(f) = R(f)P(f) = 0$.

L'anneau $\mathbb{K}[X]$ étant muni d'une division euclidienne, l'idéal I_f peut être engendré par un seul élément de I_f, que l'on peut de plus supposer unitaire. En fait, il y a un seul générateur de ce type

PROPOSITION ET DÉFINITION 3.25. *Il existe un unique polynôme unitaire μ_f tel que $I_f = (\mu_f)$. On appelle μ_f le polynôme minimal de f.*

REMARQUE 3.26. — Par définition, les polynômes annulateurs de f sont les multiples de μ_f. En particulier, si l'on connaît μ_f, on connaît alors tous les polynômes annulateurs de f.

— μ_f est le polynôme annulateur de f unitaire de plus petit degré.

On donne un critère de diagonalisabilité en termes du polynôme minimal de f, encore conséquence du théorème des noyaux.

THÉORÈME 3.27. *L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal μ_f est scindé à racines simples.*

Ce théorème ajoute au théorème 3.22 une information utile pour démontrer qu'un endomorphisme n'est pas diagonalisable : il suffit de montrer que son polynôme minimal n'est pas scindé ou bien qu'une de ses racines n'est pas simple.

EXEMPLE 3.28. Si un endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel vérifie $f^3 = \mathrm{Id}_E$ mais $f \neq \mathrm{Id}_E$, alors f n'est pas diagonalisable, car $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$ et donc le polynôme minimal de f, diviseur de $X^3 - 1$ différent de $X - 1$ vaut $X^3 - 1$ ou $X^2 + X + 1$ et n'est donc pas scindé sur $\mathbb{R}$. Noter que $X^2 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$.

5. Polynôme caractéristique

5.1. Définition et premières propriétés. Comme E est de dimension finie, on a

DÉFINITION 3.29. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de f est le polynôme de $\mathbb{K}[X]$*

$$\chi_f(X) := \det(f - X\mathrm{Id}_E).$$

LEMME 3.30. *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le scalaire λ est une valeur propre de f ssi $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$ ssi λ est une racine (dans $\mathbb{K}$) de χ_f.*

Un exemple d'implications sur les endomorphismes de propriétés des polynômes est la

REMARQUE 3.31. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé. Ainsi, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie admet au moins une valeur propre.

EXEMPLE 3.32. Reprenons l'endomorphisme f de l'exemple 3.9. La matrice représentative de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ et donc

$$\chi_f(X) = \det(f - X\mathrm{Id}_E) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - XI_2\right) = \det\begin{pmatrix} 1-X & 2 \\ -1 & 4-X \end{pmatrix} = (3-X)(2-X)$$

d'où $\mathrm{Sp}(f) = \{2; 3\}$.

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on définit de façon analogue $\chi_A := \det(A - XI_n) \in \mathbb{K}[X]$ et le spectre de A est alors l'ensemble des racines de χ_A dans $\mathbb{K}$.

REMARQUE 3.33. Attention au corps de base : si l'on considère par exemple la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a

$$\chi_A(X) = \det\begin{pmatrix} -X & 1 \\ -1 & -X \end{pmatrix} = X^2 + 1.$$

Ainsi, si A est considérée comme une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i; i\}$, et si A est considérée comme une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$.

COROLLAIRE 3.34. *Si $n = \dim(E)$, le polynôme $\chi_f \in \mathbb{K}[X]$ est de degré n et f possède donc au plus n valeurs propres distinctes.*

5.2. Calcul du polynôme minimal à l'aide du polynôme caractéristique. Le polynôme minimal de f divise le polynôme caractéristique de f en vertu du théorème de Cayley-Hamilton :

THÉORÈME 3.35 (Théorème de Cayley-Hamilton). *Le polynôme caractéristique de f est un polynôme annulateur de f. Autrement dit $\chi_f \in I_f$ i.e. μ_f divise χ_f.*

Ce théorème nous donne en particulier des informations supplémentaires sur μ_f :

COROLLAIRE 3.36. — $1 \leqslant \deg(\mu_f) \leqslant n$.

- *On a vu que les valeurs propres de f dans $\mathbb{K}$ sont des racines du polynôme annulateur μ_f dans $\mathbb{K}$. Puisque μ_f divise χ_f, ces deux polynômes ont exactement les mêmes racines dans $\mathbb{K}$, avec des multiplicités différentes a priori.*
- *On peut même montrer que μ_f et χ_f ont exactement les mêmes diviseurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.*

Le théorème de Cayley-Hamilton nous donne ainsi un moyen de déterminer le polynôme minimal de f à partir de la donnée du polynôme caractéristique :

EXEMPLE 3.37. (1) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Son polynôme caractéristique est $\chi_A = -(X+1)(X+2)(X-3)$. Ainsi, nécessairement, $\mu_A = (X+1)(X+2)(X-3)$.

(2) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Son polynôme caractéristique est $\chi_A = -(X-1)(X+2)^2$. Ainsi, nécessairement, $\mu_A = (X-1)(X+2)$ ou $\mu_A = (X-1)(X+2)^2$. Comme $\deg\left((X-1)(X+2)\right) < \deg\left((X-1)(X+2)^2\right)$, on commence par tester si le polynôme $(X-1)(X+2)$ annule A. On a

$$(A - I_3)(A + 2I_3) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $(X-1)(X+2)$ est le polynôme minimal de A.

(3) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Son polynôme caractéristique est $\chi_A = -(X-1)(X-2)^2$. Ainsi, nécessairement, $\mu_A = (X-1)(X-2)$ ou $\mu_A = (X-1)(X-2)^2$. Or on constate que la matrice $(A - I_3)(A - 2I_3)$ n'est pas la matrice nulle de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ donc, $\mu_A = (X-1)(X-2)^2$.

Le théorème 3.27 permet donc de conclure que les matrices des exemples 1. et 2. sont diagonalisables, et que celle de l'exemple 3. ne l'est pas.

5.3. Dimension des espaces propres et multiplicité dans le polynôme caractéristique. On peut également exprimer la condition sur les dimensions du théorème 3.13 à l'aide du polynôme caractéristique et plus particulièrement à l'aide des multiplicités des valeurs propres en tant que racines du polynôme caractéristique :

DÉFINITION 3.38. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f. On note m_λ la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme $\chi_f \in \mathbb{K}[X]$.*

LEMME 3.39. *(1) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ désignent les valeurs propres de f, alors la somme $m_{\lambda_1} + \cdots + m_{\lambda_p}$ est inférieure ou égale à $\deg(\chi_f) = n = \dim(E)$,*

(2) il y a égalité ssi χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

De plus, en calculant le polynôme caractéristique de f dans une base dont les $\dim E_\lambda$ premiers vecteurs forment une base de E_λ, on obtient la

LEMME 3.40. *Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors*

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant m_\lambda.$$

Ainsi :

THÉORÈME 3.41. *f est diagonalisable ssi χ_f est scindé et, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$.*

EXEMPLE 3.42. Si f admet $n = \dim(E)$ valeurs propres deux à deux distinctes, alors f est diagonalisable.

Les résultats de diagonalisabilité d'un endomorphisme énoncés ci-dessus ont leurs analogues matriciels, à savoir :

THÉORÈME 3.43. *Soient* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $p \in \mathbb{N}$, *les valeurs propres deux à deux distinctes de* A *et, pour* $i \in \{1, \ldots, p\}$, *notons* m_{λ_i} *la multiplicité de* λ_i *en tant que racine de* χ_A. *Alors* A *est diagonalisable ssi* $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}) = n$ *ssi (*χ_A *est scindé et, pour tout* $i \in \{1, \ldots, p\}$, $\dim(E_{\lambda_i}) = m_{\lambda_i}$*).*

EXEMPLE 3.44. On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Son polynôme caractéristique $\chi_A = (X-2)(X-3)$ est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

Une base de E_2 est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, une base de E_3 est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ et on pose $P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. On a alors $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$ et, par associativité du produit matriciel, pour $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $A^k = P \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} P^{-1}$. Or $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ donc

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^{k+1} - 3^k & 2^k + 3^k \\ -2^{k+1} + 2 \cdot 3^k & -2^k - 2 \cdot 3^k \end{pmatrix}.$$

5.4. Diagonalisation par bloc.

DÉFINITION 3.45. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme de* E, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *les valeurs propres deux à deux distinctes de* f *et* m_i *la multiplicité de* λ_i *dans le polynôme caractéristique* χ_f. *Pour* $i \in \{1, \ldots, p\}$, *on appelle* <u>*sous-espace caractéristique de* f *associé à la valeur propre* λ_i</u> *le sous-espace vectoriel de* E,

$$N_{\lambda_i} := \mathrm{Ker}\ (f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_{\lambda_i}}.$$

Il contient le sous-espace propre associé et est stable par f

Une conséquence simple du théorème des noyaux et du théorème de Cayley-Hamilton est le

THÉORÈME 3.46. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme de* E. *On suppose que son polynôme caractéristique est scindé i.e.* $\chi_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$. *Alors,* E *est somme directe des sous-espaces caractéristiques*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} N_{\lambda_i}.$$

EXEMPLE 3.47. Reprenons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

de l'exemple 3.37. Son polynôme caractéristique est $\chi_A = -(X-1)(X-2)^2$. Le sous-espace caractéristique de A associé à la valeur propre 1 est $N_1 = \mathrm{Ker}\ (A - I_3) = E_1$ et le sous-espace caractéristique de A associé à la valeur propre 2 est $N_2 = \mathrm{Ker}\ (A - 2I_3)^2$. Or $(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $N_2 = \mathrm{Ker}\ (A - 2I_3)^2 = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

6. Forme réduite des endomorphismes nilpotents

DÉFINITION 3.48. *On dit qu'un endomorphisme f de E est nilpotent s'il existe une puissance $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ telle que la composée f^m soit nulle. La plus petite telle puissance est appelée l'indice de nilpotence de f.*

Soit u est un endomorphisme nilpotent de E. Comme il existe $l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tel que $u^l \equiv 0$, le polynôme X^l est un polynôme annulateur de u et donc le polynôme minimal de u est de la forme $\mu_u(X) = X^\nu$ avec $1 \leqslant \nu \leqslant l$. Alors 0 est une valeur propre de u et c'est la seule. De plus, le degré ν du polynôme minimal X^ν de u est l'indice de nilpotence de u. Par le théorème de Cayley-Hamilton, cet indice est inférieur à la dimension de l'espace ambiant.

On notera $(e_1, \dots e_m)$ la base canonique de $\mathbb{K}^m$ et, si $m, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$,

$$J_1^0 = \begin{pmatrix}0\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_1(\mathbb{K}),\ J_m^0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K}) \text{ et } J_{m_1,\dots,m_k}^0 := \begin{pmatrix} J_{m_1}^0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k}^0 \end{pmatrix}.$$

LEMME 3.49. *La matrice J_m^0 est nilpotente d'indice m, de rang $m-1$ et son noyau est donc de dimension 1 engendré par e_1 et, $\ker(J_m^0)^p = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. De façon générale, on retrouve le nombre k de blocs dans $J_{m_1,\dots,m_k}^0$ comme la dimension de l'espace propre de valeur propre 0 de $J_{m_1,\dots,m_k}^0$.*

Nous allons montrer, de façon algorithmique, que tout endomorphisme nilpotent peut être réduit à une forme (de Jordan) $J_{m_1,\dots,m_k}^0$ avec $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

THÉORÈME 3.50 (Réduction des endomorphismes nilpotents à la forme de Jordan). *Soit u un endomorphisme nilpotent de E. Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E et des entiers $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tels que*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_{m_1,\dots,m_k}^0.$$

DÉMONSTRATION. On prouve le résultat par récurrence sur la dimension. Précisément, on prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, pour tout espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ de dimension n, pour tout endomorphisme nilpotent u de E, il existe une base $\mathcal{B}$ de E et des entiers $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_{m_1,\dots,m_k}^0$.

Pour $n = 1$, le résultat est vrai. En effet, soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension 1 et soit u un endomorphisme nilpotent de E. Soit $v_0 \in E$ un vecteur engendrant E. Comme u est un endomorphisme de E, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $u(v_0) = \alpha v_0$. Soit maintenant $l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tel que u^l soit identiquement nul, alors $0 = u^l(v_0) = \alpha^l v_0$ et donc $\alpha = 0$ car v_0 engendre E qui est de dimension 1. Ainsi, si on note $\mathcal{B} := \{v_0\}$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (0) = J_1^0$.

Supposons maintenant le résultat vrai pour tout entier naturel non nul strictement inférieur à un entier $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ fixé, et soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n et u un endomorphisme nilpotent de E.

On note ν l'indice de nilpotence de u. Si $\nu = 1$, u est identiquement nul et, dans toute base $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_{1,\dots,1}^0$. Si $\nu > 1$, $\mathrm{Ker}\ u^{\nu-1} \neq E$ (ν est le plus petit entier naturel non plus tel que $u^\nu \equiv 0$ donc $u^{\nu-1}$ n'est pas identiquement nul).

Soit alors $v \in E\backslash\mathrm{Ker}\,u^{\nu-1}$: nous allons montrer que la famille $\{u^{\nu-1}(v), u^{\nu-2}(v), \dots, u(v), v\}$ est libre. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{\nu-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_0 v + \lambda_1 u(v) + \cdots + \lambda_{\nu-1} u^{\nu-1}(v) = 0_E.$$

En appliquant $u^{\nu-1}$ à cette égalité, on obtient, puisque $u^\nu \equiv 0$, l'annulation $\lambda_0 u^{\nu-1}(v) = 0_E$ et donc $\lambda_0 = 0$ car $u^{\nu-1}(v) \neq 0_E$ par hypothèse. On applique ensuite $u^{\nu-2}$ à l'égalité

$$\lambda_1 u(v) + \cdots + \lambda_{\nu-1} u^{\nu-1}(v) = 0_E$$

pour obtenir $\lambda_1 u^{\nu-1}(v) = 0_E$ et donc $\lambda_1 = 0$. De proche en proche, on obtient ainsi que $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{\nu-1} = 0$ et la famille $\mathcal{B}' := \left\{u^{\nu-1}(v), \ldots, u(v), v\right\}$ est donc libre. Il s'agit donc d'une base du sous-espace vectoriel $F := \mathrm{Vect}\left\{u^{\nu-1}(v), \ldots, u(v), v\right\}$ de E.

Remarquons ensuite que F est stable par u (i.e. $u(F) \subset F$) et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(u_{|F}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = J^0_\nu.$$

Si $\nu = n$, alors $F = E$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(u_{|F}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = J^0_\nu$. Supposons à présent que $\nu < n$. Nous allons construire un supplémentaire G de F dans E qui soit également stable par u. Comme $\dim(G) < \dim(E)$, on pourra alors appliquer l'hypothèse de récurrence à G et $u_{|G}$ et considérer une base $\mathcal{B}''$ de G et des entiers $\nu_1, \ldots, \nu_l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}\left(u_{|G}\right) = J^0_{\nu_1,\ldots,\nu_l}$. De sorte que, si $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}', \mathcal{B}''\}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(u_{|F}\right) & 0 \\ 0 & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}\left(u_{|G}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J^0_\nu & 0 \\ 0 & J^0_{\nu_1,\ldots,\nu_l} \end{pmatrix} = J^0_{\nu,\nu_1,\ldots,\nu_l}.$$

On construit un tel espace G en utilisant la dualité linéaire. Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi\left(u^{\nu-1}(v)\right) \neq 0$ (un tel φ existe car, sinon, $u^{\nu-1}(v)$ serait nécessairement le vecteur nul par la proposition 1.9 2., ce qui n'est pas le cas par hypothèse sur v) et montrons que la famille $\left\{\varphi, {}^t u(\varphi), \ldots, {}^t u^{\nu-1}(\varphi)\right\}$ de E^* est libre (${}^t u$ est la transposée de u : cf définition 1.28). Soient $\mu_0, \ldots, \mu_{\nu-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\mu_0\varphi + \mu_1 {}^t u(\varphi) + \cdots + \mu_{\nu-1} {}^t u^{\nu-1}(\varphi) \equiv 0.$$

On applique cette égalité d'endomorphismes au vecteur $u^{\nu-1}(v)$: on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_0\varphi\left(u^{\nu-1}(v)\right) + \mu_1 {}^t u(\varphi)\left(u^{\nu-1}(v)\right) + \cdots + \mu_{\nu-1} {}^t u^{\nu-1}(\varphi)\left(u^{\nu-1}(v)\right) \\ &= \mu_0\varphi\left(u^{\nu-1}(v)\right) + \mu_1\varphi \circ u\left(u^{\nu-1}(v)\right) + \cdots + \mu_{\nu-1}\varphi \circ u^{\nu-1}\left(u^{\nu-1}(v)\right) \\ &= \mu_0\varphi\left(u^{\nu-1}(v)\right) \end{aligned}$$

(car $u^\nu \equiv 0$). Comme $\varphi\left(u^{\nu-1}(v)\right) \neq 0$ par hypothèse, nécessairement $\mu_0 = 0$. En appliquant l'égalité

$$\mu_1 {}^t u(\varphi) + \cdots + \mu_{\nu-1} {}^t u^{\nu-1}(\varphi) \equiv 0.$$

à $u^{\nu-2}(v)$, on déduit ensuite que $\mu_1 = 0$. De proche en proche, on obtient ainsi que $\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_{\nu-1} = 0$ et la famille $\mathcal{C} := \left\{\varphi, {}^t u(\varphi), \ldots, {}^t u^{\nu-1}(\varphi)\right\}$ de E^* est donc libre. Il s'agit d'une base du sous-espace vectoriel $W := \mathrm{Vect}\left\{\varphi, {}^t u(\varphi), \ldots, {}^t u^{\nu-1}(\varphi)\right\}$ de E^*.

On considère ensuite l'annulateur W^0 de W (définition 1.20). Montrons que $F \cap W^0 = \{0_E\}$: soit $w = \lambda_0 v + \lambda_1 u(v) + \cdots + \lambda_{\nu-1} u^{\nu-1}(v)$, $\lambda_0, \ldots, \lambda_{\nu-1} \in \mathbb{K}$, un vecteur de F annulé par toutes les formes linéaires de W. En particulier,

$$\begin{aligned} 0 &= {}^t u^{\nu-1}(\varphi)(w) \\ &= \lambda_0 {}^t u^{\nu-1}(\varphi)(v) + \lambda_1 {}^t u^{\nu-1}(\varphi)(u(v)) + \cdots + \lambda_{\nu-1} {}^t u^{\nu-1}(\varphi)\left(u^{\nu-1}(v)\right) \\ &= \lambda_0\varphi\left(u^{\nu-1}(v)\right) \end{aligned}$$

($u^\nu \equiv 0$) et donc, comme $\varphi\left(u^{\nu-1}(v)\right) \neq 0$, $\lambda_0 = 0$ et $w = \lambda_1 u(v) + \cdots + \lambda_{\nu-1} u^{\nu-1}(v)$. Le vecteur w est également annulé par ${}^t u^{\nu-2}(\varphi)$ et on en déduit de façon analogue que $\lambda_1 = 0$. De proche en proche, on obtient ainsi que $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{\nu-1} = 0$ et donc $w = 0_E$. Les sous-espaces vectoriels F et W^0 de E sont donc en somme directe.

De plus, $\dim\left(W^0\right) = \dim(E) - \dim(W) = n - \nu$ (proposition 1.23) donc $\dim(F) + \dim\left(W^0\right) = \nu + n - \nu = n = \dim(E)$ et F et W^0 sont donc des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Montrons enfin que W^0 est stable par u : soit $w \in W^0$ et soit $\psi = \mu_0\varphi + \mu_1{}^t\!u(\varphi) + \cdots + \mu_{\nu-1}{}^t\!u^{\nu-1}(\varphi)$, $\mu_0, \ldots, \mu_{\nu-1} \in \mathbb{K}$, une forme linéaire de W. Alors

$$\begin{array}{rcl}\psi(u(w)) & = & \mu_0\varphi(u(w)) + \mu_1{}^t\!u(\varphi)(u(w)) + \cdots + \mu_{\nu-1}{}^t\!u^{\nu-1}(\varphi)(u(w)) \\ & = & \mu_0{}^t\!u(\varphi)(w) + \mu_1{}^t\!u^2(\varphi)(w) + \cdots + \mu_{\nu-2}{}^t\!u^{\nu-1}(\varphi)(w) + 0 \\ & = & 0\end{array}$$

car $w \in W^0$ et $W = \mathrm{Vect}\left\{\varphi, {}^t\!u(\varphi), \ldots, {}^t u^{\nu-1}(\varphi)\right\}$.

On pose alors $G := W^0$: G est un supplémentaire de F dans E de dimension $n - \nu < n$ et stable par u. La restriction de u à G reste nilpotente et, par hypothèse de récurrence, il existe donc une base $\mathcal{B}''$ de G et des entiers $\nu_1, \ldots, \nu_l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}\left(u_{|G}\right) = J^0_{\nu_1,\ldots,\nu_l}$. Ainsi, en posant $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}', \mathcal{B}''\}$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(u_{|F}\right) & 0 \\ 0 & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}\left(u_{|G}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}J^0_\nu & 0 \\ 0 & J^0_{\nu_1,\ldots,\nu_l}\end{pmatrix} = J^0_{\nu,\nu_1,\ldots,\nu_l}. \qquad \square$$

7. Triangularisabilité et triangularisation

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Après avoir cherché à diagonaliser, on peut chercher à déterminer si f peut être réduit sous forme triangulaire :

DÉFINITION 3.51. *On dit que l'endomorphisme f est triangularisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire (supérieure ou inférieure).*

De manière analogue, on dira qu'une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est triangularisable si A est semblable à une matrice triangulaire. Triangulariser un endomorphisme triangularisable f de E, c'est déterminer une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est triangulaire et exprimer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Triangulariser une matrice triangularisable A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, c'est déterminer une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit triangulaire et exprimer $P^{-1}AP$.

LEMME 3.52. *Si T est une matrice triangulaire représentant f, les coefficients de la diagonale de T sont les valeurs propres de f, apparaissant suivant leurs multiplicités dans χ_f.*

EXEMPLE 3.53. Reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix}3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ de l'exemple 3.37 3. On a vu que $\chi_A(X) = -(X-1)(X-2)^2$ est scindé sur $\mathbb{R}$. Cherchons une matrice triangulaire T de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ semblable à A.

Commençons par remarquer que chaque espace propre de A est de dimension 1. On a $A - I_3 = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ donc $E_1 = \left\{\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \mid \begin{cases}2x - y + z & = 0 \\ x - y + z & = 0\end{cases}\right\} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0 \\ 1 \\ 1\end{pmatrix}\right\}$ et $A - 2I_3 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ donc $E_2 = \left\{\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \mid \begin{cases}x - y + z & = 0 \\ x - y & = 0\end{cases}\right\} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}\right\}$.

Si on complétait la famille $\left\{\begin{pmatrix}0 \\ 1 \\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}\right\}$ de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ainsi obtenue en une base, i.e. de façon à ce que la matrice $P := \begin{pmatrix}0 & 1 & \star \\ 1 & 1 & \star \\ 1 & 0 & \star\end{pmatrix}$ soit inversible, on aurait alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & 0 & \star \\ 0 & 2 & \star \\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ (deux matrices semblables ont les mêmes polynômes caractéristiques).

Ainsi, si on note $X_1 := \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $X_2 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, n'importe quel vecteur colonne X_3 de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ n'appartenant à $\mathrm{Vect}\{X_1, X_2\}$ convient. On choisit, par exemple, $X_3 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, on pose alors $P := \begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ est bien inversible et on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$. Si on avait posé $X_3 := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $P := \begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, on aura eu $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$. En particulier, on peut donc triangulariser A de plusieurs façons.

On donne dès à présent le critère essentiel de triangularisabilité d'un endomorphisme, que on obtient comme conséquence de la diagonalisation par blocs et de la réduction des endomorphismes nilpotents.

THÉORÈME 3.54. *L'endomorphisme f est triangularisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ (ssi son polynôme minimal μ_f est scindé sur $\mathbb{K}$).*

COROLLAIRE 3.55. *Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est triangularisable.*
Toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire.

Mais on peut aller encore plus loin dans la simplification de la représentation triangulaire de l'endomorphisme triangularisable f : cette simplification "ultime" appelée réduction de Jordan est l'objet de la section suivante. En particulier, on décrira un algorithme systématique de triangularisation d'un endomorphisme triangularisable f sous "sa" forme dite de Jordan.

8. Réduction de Jordan

Soit f un endomorphisme triangularisable de E et soit $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$ son polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres deux à deux distinctes.

Nous allons construire, par un processus algorithmique, une base de f dans laquelle la matrice représentative de f est une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont des blocs de Jordan :

DÉFINITION 3.56. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on appelle λ-bloc de Jordan de taille m la matrice carrée*

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ (par convention, $J_1(\lambda) = (\lambda)$).

Pour $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on note $J_{m_1,\ldots,m_k}(\lambda)$ la matrice diagonale par blocs de $\mathrm{M}_{m_1+\cdots+m_k}(\mathbb{K})$:

$$\begin{pmatrix}J_{m_1}(\lambda) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k}(\lambda)\end{pmatrix}.$$

LEMME 3.57. *(1) La matrice $J_m(\lambda)$ a un espace propre de valeur propre λ de dimension 1 engendré par e_1 et, $\ker(J_m(\lambda) - \lambda\mathrm{Id})^p = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. La matrice $J_m(\lambda) - \lambda\mathrm{Id}$ est nilpotente d'indice égal à m.*

(2) *La matrice* $J_{m_1,\dots,m_k}(\lambda)$ *a un espace propre de valeur propre* λ *de dimension* k*. La matrice* $J_{m_1,\dots,m_k}(\lambda) - \lambda\mathrm{Id}$ *est nilpotente d'indice égal à au plus grand des entiers* m_i*.*

Dans cette section, nous allons précisément montrer le résultat de réduction suivant :

THÉORÈME 3.58. *Il existe une base* $\mathcal{B}$ *de* E *et, pour tout* $i \in \{1,\dots,p\}$*, des entiers* $m_1^i,\dots,m_{k_i}^i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *telle que*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_{m_1^1,\dots,m_{k_1}^1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_1^p,\dots,m_{k_p}^p}(\lambda_p) \end{pmatrix}.$$

De plus, à permutation près, les entiers m_j^i*,* $1 \leqslant i \leqslant p$*,* $1 \leqslant j \leqslant k_i$*, sont uniques et on appellent les blocs de Jordan* $J_{m_j^i}(\lambda_i)$*,* $1 \leqslant i \leqslant p$*,* $1 \leqslant j \leqslant k_i$*, les blocs de Jordan de l'endomorphisme triangularisable* f*. La matrice* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ *est appelée la forme de Jordan de* f *("la" forme de Jordan de* f *est unique à permutation près des blocs de Jordan).*

De façon générale, pour tout i on retrouve le nombre k_i de blocs associés à λ_i dans la décomposition de Jordan de f comme la dimension de l'espace propre de valeur propre λ_i de f, et la taille du plus grand bloc associé à λ_i comme l'indice de nilpotence de $(f-\lambda_i\mathrm{Id})_{|N_{\lambda_i}}$ la restriction de $f-\lambda_i\mathrm{Id}$ au sous espace caractéristique associé à λ_i.

EXEMPLE 3.59. Par unicité des blocs de Jordan, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ obtenue dans l'exemple 3.53 est donc la forme de Jordan de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Un résultat de "classification" découlant du théorème précédent est :

COROLLAIRE 3.60. *Deux matrices triangularisables de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *sont semblables si et seulement si elles ont les mêmes blocs de Jordan.*

La même démonstration fournira le résultat

THÉORÈME 3.61 (Décomposition de Dunford). *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme de* E*. On suppose que son polynôme caractéristique est scindé. Alors, il existe un unique couple* (d,n) *d'endomorphismes de* E *tel que* d *soit diagonalisable,* n *nilpotent et* $d \circ n = n \circ d$*.*

Dans le reste de cette section, nous allons montrer l'existence de la réduction de Jordan de f par un procédé constructif algorithmique. Nous ne montrerons pas l'unicité des blocs de Jordan de f.

8.1. Étape 1. La première étape de cette réduction est une réduction suivant les sous-espaces caractéristiques de f. Pour $i \in \{1,\dots,p\}$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de N_{λ_i} et notons $\mathcal{B}_0 := \{\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_p\}$. Comme $E = N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_p}$ (théorème 3.46) et comme chaque sous-espace caractéristique de f est stable par f,on trouve la forme diagonale par blocs

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix}$$

où, pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$, $A_i := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(f_{|N_{\lambda_i}}\right)$.

Remarquons à présent que si, pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$, on trouve une base $\mathcal{B}'_i$ de N_{λ_i} telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_i}\left(f_{|N_{\lambda_i}}\right) = J_{m_1^i,\dots,m_{k_i}^i}(\lambda_i)$ avec $m_1^i,\dots,m_{k_i}^i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, alors, en notant $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}'_1,\dots,\mathcal{B}'_p\}$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_{m_1^1,\dots,m_{k_1}^1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_1^p,\dots,m_{k_p}^p}(\lambda_p) \end{pmatrix}.$$

On va donc rechercher une telle base $\mathcal{B}'_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$.

8.2. Étape 2. Soit donc λ une valeur propre de f. Nous allons montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de N_λ et des entiers $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(f_{|N_\lambda}\right) = J_{m_1,\dots,m_k}(\lambda)$. Pour simplifier encore un peu plus les écritures, notons $N := N_\lambda$.

On écrit

$$f_{|N} = \lambda\mathrm{Id}_N + f_{|N} - \lambda\mathrm{Id}_N.$$

Pour montrer l'existence d'une telle base $\mathcal{B}'$, on commence par remarquer que l'endomorphisme $u := f_{|N} - \lambda\mathrm{Id}_N$ de N est nilpotent. En effet, si $v \in N = \mathrm{Ker}\ (f - \lambda\mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}$, alors

$$u^{m_\lambda}(v) = \left(f_{|N} - \lambda\mathrm{Id}_N\right)^{m_\lambda}(v) = (f - \lambda\mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}(v) = 0$$

(à noter que l'indice de nilpotence de u, i.e. le plus petit entier $l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tel que $u^l \equiv 0$, est donc inférieur ou égal à m_λ). Par le théorème 3.50 de réduction des endomorphismes nilpotents, il existe une base $\mathcal{B}'$ de N et des entiers $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(f_{|N_\lambda} - \lambda\mathrm{Id}_N\right) = J^0_{m_1,\dots,m_k}$. On a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(f_{|N}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\lambda\mathrm{Id}_N) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(f_{|N_\lambda} - \lambda\mathrm{Id}_N\right) = \lambda I_{m_\lambda} + J^0_{m_1,\dots,m_k} = J_{m_1,\dots,m_k}(\lambda)$$

(rappelons que $m_\lambda = \dim(N_\lambda)$).

8.3. Description matricielle de la méthode de réduction à la forme de Jordan. Résumons la méthode décrite ci-dessus en appliquant son pendant matriciel à une matrice triangularisable $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que l'on a déjà écrit le polynôme caractéristique χ_A de A comme un produit

$$\chi_A = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$$

dans $\mathbb{K}[X]$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres (deux à deux distinctes) de A.

Étape 1 : Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, calculer la matrice $(A - \lambda_i I_n)^{m_{\lambda_i}}$ et déterminer une base $\mathcal{B}_i$ de $N_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}\ (A - \lambda_i I_n)^{m_{\lambda_i}} \subset \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Considérer la base $\mathcal{B}_0 := \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p\}$ de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et la matrice P_0 dont les colonnes sont, dans l'ordre, les vecteurs colonnes de la base $\mathcal{B}_0$. Calculer la matrice $P_0^{-1}AP_0$: elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix}$$

où, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $A_i \in \mathrm{M}_{m_{\lambda_i}}(\mathbb{K})$ (et $\chi_{A_i} = (-1)^{m_{\lambda_i}}(X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$).

Étape 2 : Pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$, calculer la matrice $U_i := A_i - \lambda_i I_{m_{\lambda_i}}$ de $M_{m_{\lambda_i}}(\mathbb{K})$ puis appliquer à la matrice nilpotente U_i la méthode décrite ci-après de réduction des matrices nilpotentes à la forme de Jordan : on obtient des entiers $m_1^i, \dots, m_{k_i}^i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et une matrice inversible Q_i de taille m_{λ_i} tels que $Q_i^{-1}U_iQ_i = J^0_{m_1^i,\dots,m_{k_i}^i}$

Étape 3 : On note $\widetilde{P} := \begin{pmatrix} Q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q_p \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et alors

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix} \widetilde{P} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \, I_{m_{\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \, I_{m_{\lambda_p}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J^0_{m_1^1,\ldots,m_{k_1}^1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J^0_{m_1^p,\ldots,m_{k_p}^p} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J_{m_1^1,\ldots,m_{k_1}^1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_1^p,\ldots,m_{k_p}^p}(\lambda_p) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En posant $P := P_0\widetilde{P}$, on obtient donc

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{m_1^1,\ldots,m_{k_1}^1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_1^p,\ldots,m_{k_p}^p}(\lambda_p) \end{pmatrix}.$$

L'algorithme récursif permettant de réduire à la forme de Jordan une matrice nilpotente U quelconque de $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$, $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ (la matrice dans la base canonique d'un endomorphisme nilpotent u de $\mathbb{K}^m$), est le suivant :

Étape a : Déterminer l'indice de nilpotence de U : il s'agit de la plus petite puissance $\nu \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ telle que U^ν est la matrice nulle.

Étape b : Choisir un vecteur colonne $Y \in \mathrm{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ (le vecteur colonne des coordonnées dans la base canonique d'un vecteur v de $\mathbb{K}^m$) tel que le vecteur colonne $U^{\nu-1}Y$ n'est pas nul, et constituer la famille libre $\left\{U^{\nu-1}Y, \ldots, UY, Y\right\}$ de $\mathrm{M}_{m,1}(\mathbb{K})$.

Étape c : Si $\nu = m$, on note Q la matrice de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont, dans l'ordre, les coordonnées des vecteurs colonnes de la base $\left\{U^{\nu-1}Y, \ldots, UY, Y\right\}$ de $\mathrm{M}_{m,1}(\mathbb{K})$, et on a alors $Q^{-1}UQ = J^0_m$.

Si $\nu \neq m$, passer à l'étape d.

Étape d : Si $\nu \neq m$, choisir un vecteur colonne $Z \in \mathrm{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ (le vecteur colonne des coordonnées dans la base duale de la base canonique d'une forme linéaire φ de $(\mathbb{K}^m)^*$) tel que la quantité ${}^tZU^{\nu-1}Y$ (qui est la quantité $\varphi\left(u^{\nu-1}(v)\right)$) ne soit pas nulle, et constituer la famille libre $\{Z, {}^tUZ, \ldots, {}^tU^{\nu-1}Z\}$ de $\mathrm{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ (correspondant à la famille $\left\{\varphi, {}^tu(\varphi), \ldots, {}^tu^{\nu-1}(\varphi)\right\}$ de $(\mathbb{K}^m)^*$).

Étape e : Déterminer une famille libre $\{X_1, \ldots, X_{m-n}\}$ de $\mathrm{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, m-\nu\}$ et tout $j \in \{0, \ldots, \nu-1\}$, ${}^t\left({}^tU^jZ\right)X_i = {}^tZU^jX_i = 0$ (la famille libre $\{X_1, \ldots, X_{m-n}\}$ correspond à une base de l'annulateur de $\mathrm{Vect}\left\{\varphi, {}^tu(\varphi), \ldots, {}^tu^{\nu-1}(\varphi)\right\}$).

Étape f : On note Q_0 la matrice de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont, dans l'ordre, les coordonnées des vecteurs colonnes de la base $\{Y, UY, \ldots, U^{\nu-1}Y, X_1, \ldots, X_{m-n}\}$ de $\mathrm{M}_{m,1}(\mathbb{K})$. Calculer la matrice $Q_0^{-1}AQ_0$: elle est de la forme $\begin{pmatrix} J^0_\nu & 0 \\ 0 & \widetilde{U} \end{pmatrix}$ où $\widetilde{U}$ est une matrice nilpotente de $\mathrm{M}_{m-\nu,1}(\mathbb{K})$.

Étape g : Appliquer la méthode à la matrice nilpotente $\widetilde{U}$ (à partir de l'étape a). En appliquant ce procédé récursif, on obtient une matrice inversible $\widetilde{Q} \in \mathrm{GL}_{m-\nu}(\mathbb{K})$ et des entiers $\nu_1, \ldots, \nu_l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tels que $\widetilde{Q}^{-1}\widetilde{U}\widetilde{Q} = J^0_{\nu_1,\ldots,\nu_l}$.

Étape h : On note $Q := Q_0 \begin{pmatrix} I_\nu & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$, et on a $Q^{-1}\, UQ = J^0_{\nu,\nu_1,\ldots,\nu_l}$.

EXEMPLE 3.62. On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$.

Étape 0 : On calcule le polynôme caractéristique χ_A de A :

$$\begin{aligned}
\chi_A = \det(A - XI_4) \quad &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4-X & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2-X & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} 4-X & 1 & -2 \\ 1 & 2-X & -1 \\ 2 & 1 & -X \end{vmatrix} \\
&\underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=} (1-X) \begin{vmatrix} 2-X & 1 & -2 \\ 0 & 2-X & -1 \\ 2-X & 1 & -X \end{vmatrix} = (1-X)(2-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2-X & -1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} \\
&\underset{L3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} (1-X)(2-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2-X & -1 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)(2-X)^3.
\end{aligned}$$

Étape 1 : La multiplicité de la valeur propre 1 dans χ_A étant 1, $N_1 = E_1$, et

$$E_1 = \mathrm{Ker}\ (A - I_4) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La multiplicité de la valeur propre 2 dans χ_A est 3. Pour déterminer $N_2 = \mathrm{Ker}\ (A - 2I_4)^3$, on commence par calculer $(A - 2I_4)^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $N_2 = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

On note P_0 la matrice inversible $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on obtient $P_0^{-1} A P_0 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

Étape 2 : Le bloc $A_2 = (1) \in \mathrm{M}_1(\mathbb{R})$ est déjà un bloc de Jordan $J_1(1)$.

On note U_1 la matrice $A_1 - 2I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et on applique la méthode de réduction à la forme de Jordan des matrices nilpotentes à U_1 :

Étape a : Déterminons l'indice de nilpotence de U_1 : on a $U_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et U_1^3 est la matrice nulle de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Ainsi, l'indice de nilpotence de U_1 est 3.

Étape b : On choisit ensuite un vecteur colonne qui ne soit pas dans le noyau de U_1^2 : on prend par exemple le vecteur colonne $Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on calcule $U_1 Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $U_1^2 Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Étape c : Comme l'indice de nilpotence de U_1 est 3, la famille $\{U_1^2 Y, U_1 Y, Y\}$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et on pose $Q_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $Q_1^{-1} U_1 Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Étape 3 : On note $\widetilde{P} := \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P := P_0 \widetilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et on a $P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_3(2) & 0 \\ 0 & J_1(1) \end{pmatrix}$.

EXEMPLE 3.63. On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_5(\mathbb{R})$.

Étape 0 : Calculons le polynôme caractéristique χ_A de A :

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det(A - XI_5) = \begin{vmatrix} 5-X & 0 & 4 & -2 & -3 \\ -2 & 3-X & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3-X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-X & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= (3-X) \begin{vmatrix} 5-X & 0 & -2 & -3 \\ -2 & 3-X & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3-X & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix} = (3-X)^2 \begin{vmatrix} 5-X & -2 & -3 \\ 0 & 3-X & 1 \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&\underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} (3-X)^2 \begin{vmatrix} 3-X & -2 & -3 \\ 3-X & 3-X & 1 \\ 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix} = (3-X)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 3-X & 1 \\ 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} (3-X)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 5-X & 4 \\ 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix} = (3-X)^3 \begin{vmatrix} 5-X & 4 \\ -1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= (3-X)^3 \left[(5-X)(1-X) + 4\right] = (3-X)^3 (X^2 - 6X + 9) = (3-X)^5.
\end{aligned}$$

Le réel 3 est donc l'unique valeur propre de A.

Remarquons que $A - 3I_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et que l'espace propre $E_3 = \mathrm{Ker}\ (A - 3I_5)$ est de dimension 2.

Étape 1 : 3 étant l'unique valeur propre de A, le sous-espace caractéristique $N_3 = \mathrm{Ker}\ (A - 3I_5)^5$ est $\mathrm{M}_{5,1}(\mathbb{R})$ tout entier (on “pose” $P_0 = I_5$ et $A_1 := A$).

Étape 2 : On note $U := A - 3I_5$.

Étape a : On calcule l'indice de nilpotence de U. On a $U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et U^3 est la matrice nulle de $\mathrm{M}_5(\mathbb{R})$ donc l'indice de nilpotence de U est 3.

Étape b : On choisit à présent un vecteur colonne qui ne soit pas dans le noyau de U^2, par exemple $Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis on calcule $UY = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U^2Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Étape c : L'indice de nilpotence de U est strictement inférieur à 5.

Étape d : On choisit un vecteur colonne $Z \in \mathrm{M}_{5,1}(\mathbb{R})$ (correspondant à une forme linéaire) tel que ${}^tZU^2Y \neq 0$, par exemple $Z := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on calcule $Z_1 := {}^tUZ = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $Z_2 := {}^tU^2Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Étape e : On détermine une base du sous-espace de $\mathrm{M}_{5,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ qui vérifient ${}^tZX = {}^tZ_1X = {}^tZ_2X = 0$, i.e. $\begin{cases} x_1 & = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 & = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 & = 0 \end{cases}$ par exemple la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Étape f : On note $Q_0 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on a $Q_0^{-1}UQ_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J^0_{3,2}$.

Étape 3 : On note $P := Q_0$ et on a $P^{-1}\,AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = J_{3,2}(3)$.

REMARQUE 3.64. Le fait que, dans l'exemple 3.63 ci-dessus, la matrice $Q_0^{-1}UQ_0$ ait directement été de la forme voulue est un “heureux hasard”. Si l'on avait choisi, pour base du sous-espace vectoriel $\{X \in \mathrm{M}_{5,1}(\mathbb{R}) \mid {}^tZX = {}^tZ_1X = {}^tZ_2X\}$ de $\mathrm{M}_{5,1}(\mathbb{R})$, la famille $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$, on aurait posé $Q_0 := \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Pour cette matrice Q_0, on a $Q_0^{-1}UQ_0 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}J_3^0 & 0\\ 0 & \widetilde{U}\end{pmatrix}$.

Dans ce cas, on passe alors à l'étape g : on applique le procédé récursif à la matrice nilpotente $\widetilde{U} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$: l'ordre de nilpotence de $\widetilde{U}$ est 2, le vecteur $\widetilde{Y} := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ n'est pas dans son noyau et $\widetilde{U}\widetilde{Y} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Si l'on note $\widetilde{Q}$ la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, on a $\widetilde{Q}^{-1}\widetilde{U}\widetilde{Q} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = J_2^0$.

On passe ensuite à l'étape h : on note $Q := Q_0 \begin{pmatrix}I_3 & 0\\ 0 & \widetilde{Q}\end{pmatrix}$ et on a

$$Q^{-1}\,UQ \quad = \quad \begin{pmatrix}J_3^0 & 0\\ 0 & J_2^0\end{pmatrix} = J_{3,2}^0 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

A l'étape 3 de la méthode appliquée à A, on note alors $P := Q$ et on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

REMARQUE 3.65. La réduction de Jordan permet entre autres de calculer les puissances successives d'une matrice triangularisable. Précisément, soit A une matrice triangularisable de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de A et soient $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $m_1^i, \ldots, m_{k_i}^i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $i \in \{1, \ldots, p\}$, tels que $P^{-1}AP$ soit de forme de Jordan

$$\begin{pmatrix}J_{m_1^1,\ldots,m_{k_1}^1}(\lambda_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_1^p,\ldots,m_{k_p}^p}(\lambda_p)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_{m_{\lambda_1}} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & I_{m_{\lambda_p}}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}J^0_{m_1^1,\ldots,m_{k_1}^1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J^0_{m_1^p,\ldots,m_{k_p}^p}\end{pmatrix}.$$

Comme les deux matrices de cette dernière somme commutent, on peut calculer $\left(P^{-1}AP\right)^k = P^{-1}A^kP$ – et donc A^k – pour tout $k \in \mathbb{N}$ à l'aide du binôme de Newton. De plus, la nilpotence de la matrice de droite simplifie l'expression du développement.

EXEMPLE 3.66. Reprenons $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de l'exemple 3.53. Pour $P := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ commutent, on a

$$\begin{aligned} P^{-1}A^kP &= \sum_{i=0}^{k} \binom{i}{k} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{k-i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{i} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{k} + k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (car la matrice } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2} \text{ est nulle)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Enfin, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$A^k = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^k + k2^{k-1} & -k2^{k-1} & k2^{k-1} \\ 2^k + k2^{k-1} - 1 & -k2^{k-1} + 1 & k2^{k-1} \\ 2^k - 1 & -2^k + 1 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Chapitre 4

Exponentielle de matrices

Introduction

On introduit dans ce chapitre une généralisation de la fonction exponentielle aux espaces de matrices. Cette “exponentielle de matrices” permet notamment de résoudre les systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants, et peut se calculer à l'aide de la réduction de Jordan.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et m est un entier naturel non nul.

1. L'espace vectoriel normé $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$

1.1. Norme de matrices. On cherche d'abord à munir le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ d'une norme.

Si le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si $p, q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et si $M = (m_{i\,j})_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant q} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ la matrice $(\overline{m_{i\,j}})_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant q}$ de $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont les conjugués de ceux de M.

DÉFINITION ET PROPOSITION 4.1. *Pour tout* $A = (a_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$*, on définit*

$$\|A\| := \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^t\!A\overline{A}\right)} = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} |a_{i\,j}|^2} \in [0, +\infty[.$$

L'application $\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_m(\mathbb{K}) & \to & [0,+\infty[\\ A & \mapsto & \|A\| \end{array}$ *est une norme et le couple* $(\mathrm{M}_m(\mathbb{K}), \|\cdot\|)$ *est donc un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé.*

DÉMONSTRATION. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'application $\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_m(\mathbb{R}) & \to & [0,+\infty[\\ A & \mapsto & \|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}\,({}^t\!A\,A)} \end{array}$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_m(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_m(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (A,B) & \mapsto & \mathrm{Tr}\left({}^t\!AB\right) \end{array}$ défini dans l'exemple 2.2 3.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'application $\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_m(\mathbb{C}) & \to & [0,+\infty[\\ A & \mapsto & \|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^t\!A\overline{A}\right)} \end{array}$ est la norme induite de façon analogue par l'application $\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_m(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_m(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ (A,B) & \mapsto & \mathrm{Tr}\left({}^t\!A\overline{B}\right) \end{array}$ qui est un produit scalaire hermitien.

□

Cette norme $\|\cdot\|$ sur $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ possède une propriété de compatibilité avec la structure supplémentaire de produit dans $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$.

LEMME 4.2. *Soient* $A, B \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$*. On a* $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$*. Ainsi, si* $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ *et* $n \in \mathbb{N}$*,* $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$*.*

DÉMONSTRATION. On note $A = (a_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ et $B = (b_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$. Pour $i, j \in \{1,\ldots,m\}$, on note également $v_i := (a_{i\,1},\ldots,a_{i\,m})$, $w_j := (b_{1\,j},\ldots,b_{m\,j}) \in \mathbb{K}^m$ (il s'agit respectivement de la

$i^{\text{ème}}$ ligne de A et de la transposée de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B. On a alors

$$\begin{aligned}\|AB\|^2 &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m}\left|\sum_{k=1}^{m} a_{i\,k}b_{k\,j}\right|^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m}\left|\langle v_i, \overline{w_j}\rangle_{\text{can}}\right|^2\\
&\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m}\|v_i\|_{\text{can}}^2\,\|\overline{w_j}\|_{\text{can}}^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m}\left(\sum_{k=1}^{m}|a_{i\,k}|^2\right)\left(\sum_{l=1}^{m}|\overline{b_{l\,j}}|^2\right)\\
&\leqslant \left(\sum_{1\leqslant i,k\leqslant m}|a_{i\,k}|^2\right)\left(\sum_{1\leqslant j,l\leqslant m}|b_{l\,j}|^2\right) = \|A\|^2\|B\|^2.\end{aligned}$$

□

1.2. Propriétés des espaces vectoriels normés. En tant qu'espace vectoriel normé, on peut définir sur $(\mathrm{M}_m(\mathbb{K}), \|\cdot\|)$ une notion de limite. Par exemple, une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ converge vers un élément A de E si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \|A_n - A\| \leqslant \varepsilon.$$

On a également une notion de continuité. À titre d'exemples, si $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$, les applications $\mathrm{M}_m(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$; $M \mapsto AM$ et $\mathrm{M}_m(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$; $M \mapsto MA$ sont continues : en effet, si $M_0, M \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$,

$$\|AM - AM_0\| = \|A(M - M_0)\| \leqslant \|A\|\|M - M_0\|$$

et

$$\|MA - M_0A\| = \|(M - M_0)A\| \leqslant \|M - M_0\|\|A\|.$$

On rappelle que pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$, la notation $\sum_n A_n$ désigne la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^{k} A_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Une série $\sum_n A_n$ est dite convergente si sa suite des sommes partielles est convergente et, dans ce cas, on appelle somme de la série la limite de la suite des sommes partielles. On dit que la série $\sum_n A_n$ est absolument convergente si la série numérique $\sum_n \|A_n\|$ est convergente. Un théorème affirme qu'une série absolument convergente est en particulier convergente.

On rappelle un résultat relatif au produit de Cauchy de séries d'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ muni d'une multiplication compatible avec la norme, qui généralise la multiplication des polynômes : si $\sum_n A_n$ et $\sum_n B_n$ sont deux séries absolument convergentes de E, alors la série $\sum_n \left(\sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}\right)$ est absolument convergente et a pour somme $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$.

2. Définition et propriétés de base de l'exponentielle de matrices

Nous allons associer à toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ la somme d'une série absolument convergente de matrices, dont l'expression généralise le développement en série entière de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ (et $\mathbb{C}$).

PROPOSITION ET DÉFINITION 4.3. *Soit* $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$. *La série* $\displaystyle\sum_n \frac{A^n}{n!}$ *est absolument convergente (en particulier convergente) et on note* $\displaystyle\exp(A) := \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A^n}{n!}$ *sa somme.*

DÉMONSTRATION. Montrons que la série $\sum_n \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant \left\|\frac{A^n}{n!}\right\| \leqslant \frac{\|A\|^n}{n!}$ (par le lemme 4.2), or la série numérique $\sum_n \frac{\|A\|^n}{n!}$ est absolument convergente (sa somme est l'exponentielle de $\|A\|$). La série $\sum_n \left\|\frac{A^n}{n!}\right\|$ converge donc également. Ainsi, la série $\sum_n \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente. □

DÉFINITION 4.4. *On appelle* <u>*application exponentielle*</u> *de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$*, l'application*

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \exp(A) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \end{array}$$

REMARQUE 4.5. — Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on note également $e^A := \exp(A)$.

— Pour $m = 1$, on retrouve l'expression (du développement en série entière) de la fonction exponentielle $\exp : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.

EXEMPLE 4.6. (1) On calcule l'exponentielle d'une matrice diagonale quelconque de $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$: soient $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$, alors, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m^n \end{pmatrix}$, on a

$$\exp\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \frac{a_1^n}{n!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{a_m^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_1^n}{n!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_m^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{a_m} \end{pmatrix}$$

En particulier, si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\exp(\lambda I_m) = e^{\lambda} I_m$, $\exp(I_m) = eI_m$ et, si 0_m désigne la matrice nulle de $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$, $\exp(0_m) = I_m$.

(2) De manière analogue, si A est une matrice diagonale par blocs de la forme $A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} A_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r^n \end{pmatrix}$ et donc $e^A = \begin{pmatrix} e^{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{A_r} \end{pmatrix}$.

(3) Soit $J \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice de nilpotence $\nu \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant \nu$, $J^n = 0_m$ et on a donc

$$e^J = \sum_{n=0}^{\nu} \frac{J^n}{n!} = I_m + J + \frac{J^2}{2!} + \cdots + \frac{J^{\nu-1}}{(\nu-1)!}.$$

Par exemple, si J désigne la matrice nilpotente $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(= J_3^0)$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, on a $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^3 = 0_3$ et donc

$$e^J = I_3 + J + \frac{J^2}{2!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 4.7. *Soient* $A, B \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ *et* <u>*supposons que* $AB = BA$</u>*. Alors* $e^{A+B} = e^A e^B$.

DÉMONSTRATION. Comme A et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$ et donc

$$\begin{aligned}
e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n}{n!} \right) \text{ (les deux séries sont absolument convergentes)} \\
&= e^A e^B
\end{aligned}$$

□

REMARQUE 4.8. Si $A, B \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ commutent, on a $e^A e^B = e^{A+B} = e^{B+A} = e^B e^A$, en particulier les matrices e^A et e^B commutent également.

COROLLAIRE 4.9. *Soit* $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$. *La matrice* $e^A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ *est inversible et* $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.

DÉMONSTRATION. Les matrices A et $-A$ commutent : $A(-A) = A(-I_m)A = (-A)A$. On a donc, par la proposition précédente, $e^{-A}\, e^A = e^A e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^{0_m} = I_m$. □

PROPOSITION 4.10. *Soit* $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ *et soit* $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ *une matrice inversible. On a*

$$\exp\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}e^A P.$$

DÉMONSTRATION. $\exp\left(P^{-1}AP\right)$ est la somme de la série $\sum_n \frac{\left(P^{-1}AP\right)^n}{n!}$. Or, si $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{\left(P^{-1}AP\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{k} P^{-1} \frac{A^n}{n!} P = P^{-1} \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{A^n}{n!} \right) P,$$

donc

$$\begin{aligned}
\exp\left(P^{-1}AP\right) &= \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{\left(P^{-1}AP\right)^n}{n!} = \lim_{k\to+\infty} P^{-1} \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{A^n}{n!} \right) P \\
&= P^{-1} \left(\lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{A^n}{n!} \right) \right) P \text{ (car l'application } \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_m(\mathbb{K}) & \to & \mathrm{M}_m(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array} \text{ est continue)} \\
&= P^{-1}e^A P.
\end{aligned}$$

□

Cette compatibilité de l'exponentielle de matrices avec le changement de base permet de montrer :

COROLLAIRE 4.11. *Soit* $A \in M_m(\mathbb{K})$. *On a* $\det\left(e^A\right) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.

DÉMONSTRATION. Vérifions d'abord cette relation pour une matrice $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} \in$ $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ triangulaire : Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^n \end{pmatrix}$ (le produit de deux matrices triangulaires supérieures reste triangulaire supérieur) et donc

$$e^B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n}{n!} & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\lambda_m^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda_1^n}{n!} & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda_m^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_m} \end{pmatrix}.$$

$$\det\left(e^B\right) = \prod_{j=1}^{m} e^{\lambda_j} = e^{\sum_{j=1}^m \lambda_j} = e^{\mathrm{Tr}(B)}.$$

Considérons A comme une matrice de $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})$. En tant que telle, elle est triangularisable dans $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ (corollaire 3.55) : il existe une matrice $Q \in \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire B telles que $A = QBQ^{-1}$. Ainsi, par la proposition précédente on a $e^A = Qe^BQ^{-1}$ et donc

$$\det\left(e^A\right) = \det\left(e^B\right) = e^{\mathrm{Tr}(B)} = e^{\mathrm{Tr}(A)}$$

car la trace est invariante par changement de base. □

3. Calcul de l'exponentielle d'une matrice via la réduction de Jordan

Soit A une matrice de $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$. Nous allons détailler une méthode pour calculer l'exponentielle de A à partir de sa réduction de Jordan en tant que matrice de $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})$.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ les valeurs propres complexes deux à deux distinctes de A. D'après le théorème 3.58, il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, des entiers $m_1^i, \ldots, m_{k_i}^i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tels que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{m_1^1,\ldots,m_{k_1}^1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_1^p,\ldots,m_{k_p}^p}(\lambda_p) \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\exp(A) &= \exp\left(P \begin{pmatrix} J_{m_1^1,\ldots,m_{k_1}^1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_1^p,\ldots,m_{k_p}^p}(\lambda_p) \end{pmatrix} P^{-1}\right) \\
&= P \exp \begin{pmatrix} J_{m_1^1,\ldots,m_{k_1}^1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_1^p,\ldots,m_{k_p}^p}(\lambda_p) \end{pmatrix} P^{-1} \text{ (par proposition 4.10)} \\
&= P \begin{pmatrix} \exp\left(J_{m_1^1,\ldots,m_{k_1}^1}(\lambda_1)\right) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp\left(J_{m_1^p,\ldots,m_{k_p}^p}(\lambda_p)\right) \end{pmatrix} P^{-1} \text{ (exemple 4.6 3.).}
\end{aligned}$$

À son tour, chaque $\exp\left(J_{m_1^i,\ldots,m_{k_i}^i}(\lambda_1)\right)$ se calcule par bloc comme dans l'exemple 4.6 3.).

Ainsi, pour pouvoir calculer $\exp(A)$, il nous suffit de savoir calculer $\exp\left(J_m(\lambda)\right)$ pour tous $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $J_m(\lambda) = \lambda I_m + J_m^0$. Or les matrices λI_m et J_m^0 commutent et la matrice J_m^0 est nilpotente d'indice de nilpotence m.

$$\begin{aligned}
\exp\left(J_m(\lambda)\right) &= \exp\left(\lambda I_m + J_m^0\right) = \exp\left(\lambda I_{m_0}\right)\exp\left(J\right) = e^{\lambda} I_{m_0}\left(I_{m_0} + J + \frac{J^2}{2!} + \cdots + \frac{J^{m-1}}{(m-1)!}\right) \\
&= e^{\lambda}\left(I_{m_0} + J + \frac{J^2}{2!} + \cdots + \frac{J^{m-1}}{(m-1)!}\right) \\
&= e^{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & \ddots & \ddots & \frac{1}{(m-2)!} & \frac{1}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & \ddots & \ddots & \frac{1}{(m-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

REMARQUE 4.12. Si $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$, alors $e^A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$: même si l'on considère la réduction de Jordan "complexe" de A pour calculer e^A, la matrice que l'on obtient à la fin du calcul ne possède que des coefficients réels.

EXEMPLE 4.13. (1) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de la rotation d'un quart de tour dans le sens direct. Son polynôme caractéristique est $\chi_A = X^2 + 1$ qui est scindé à racines simples i et $-i$ sur $\mathbb{C}$: si on note $P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ (il s'agit de la réduction de Jordan de A) et pour tout réel t

$$\begin{aligned}
\exp(tA) &= P\exp\begin{pmatrix} -it & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{it} + e^{-it} & ie^{it} - ie^{-it} \\ -ie^{it} + ie^{-it} & e^{it} + e^{-it} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Or, $e^{it} + e^{-it} = 2\cos(t)$ et $ie^{it} - ie^{-it} = -2\sin(t)$. Ainsi, $\exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ est la matrice de rotation d'angle t.

(2) Reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de l'exemple 3.66. Pour $P := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(1) & 0 \\ 0 & J_2(2) \end{pmatrix}$ donc, pour tout réel t,

$$\exp(tA) = P\begin{pmatrix} \exp(tI_1) & 0 \\ 0 & \exp\left(tJ_2(2)\right) \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Or $J_2(2) = 2I_2 + J_2^0$ et, si on note $J := J_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^2 = 0_2$ donc

$$\exp\left(tJ_2(2)\right) = e^{2t}\left(I_2 + tJ\right) = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a enfin

$$\exp(tA) = P \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2t} + te^{2t} & -te^{2t} & te^{2t} \\ -e^t + e^{2t} + te^{2t} & e^t - te^{2t} & te^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & e^t - e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

REMARQUE 4.14. Dans le premier exemple, plutôt que de passer par la réduction de Jordan, on aurait pu remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n = 4q,\ q \in \mathbb{N}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n = 4q+1,\ q \in \mathbb{N}, \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{si } n = 4q+2,\ q \in \mathbb{N}, \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n = 4q+3,\ q \in \mathbb{N}, \end{cases} = \begin{cases} \begin{pmatrix} (-1)^p & 0 \\ 0 & (-1)^p \end{pmatrix} & \text{si } n = 2p,\ p \in \mathbb{N}, \\ \begin{pmatrix} 0 & (-1)^p \\ (-1)^{p+1} & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n = 2p+1,\ p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

4. Application à la résolution des systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

On s'intéresse dans cette section aux systèmes différentiels linéaires de la forme

$$X' = AX$$

où A est une matrice de $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ quelconque fixée et où la fonction inconnue X désigne une fonction vectorielle dérivable

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K}^m \cong \mathrm{M}_{m,1}(\mathbb{K}) \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix} \end{array},$$

autrement dit aux systèmes de la forme

$$\begin{cases} x_1' &= a_{1\,1}x_1 + \cdots + a_{1\,m}x_m \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_m' &= a_{m\,1}x_1 + \cdots + a_{m\,m}x_m \end{cases}$$

où $(a_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ et les fonctions inconnues $x_1, \dots, x_m$ sont dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Précisément, soit A une matrice de $\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$. On souhaite déterminer l'ensemble des fonctions vectorielles dérivables $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$.

Nous allons d'abord étudier la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathrm{M}_m(\mathbb{K}) \\ t & \mapsto & e^{tA} \end{array}$$

PROPOSITION 4.15. *La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = Ae^{tA}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $t \in \mathbb{R}$. On montre que l'expression $\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h}$ possède une limite finie quand h tend vers 0 et que cette limite est égale à Ae^{tA}. Soit donc $h \in \mathbb{R}^*$. Remarquons tout d'abord que, puisque les matrices tA et hA commutent,

$$\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \frac{e^{hA}\, e^{tA} - e^{tA}}{h} = \frac{e^{hA} - I_m}{h} e^{tA},$$

et nous allons en fait montrer que la quantité $\frac{e^{hA}-I_m}{h}$ tend vers A quand h tend vers 0, i.e. que la quantité $\left\|\frac{e^{hA}-I_m-hA}{h}\right\|$ tend vers 0 quand h tend vers 0.

Comme $e^{hA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(hA)^n}{n!} = I_m + hA + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(hA)^n}{n!}$, on a

$$\left\|e^{hA} - I_m - hA\right\| = \left\|\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(hA)^n}{n!}\right\| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\|hA\|^n}{n!} = e^{\|hA\|} - 1 - \|hA\| = e^{|h|\|A\|} - 1 - |h|\|A\|,$$

donc

$$\left\|\frac{e^{hA} - I_m - hA}{h}\right\| \leqslant \frac{e^{|h|\|A\|} - 1}{|h|} - \|A\|.$$

Or, quand h tend vers 0, $|h|$ tend vers 0 et la quantité $\frac{e^{|h|\|A\|}-1}{|h|}$ tend alors vers la dérivée de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $t \mapsto e^{t\|A\|}$ en 0, c'est-à-dire $\|A\|$. Ainsi, la quantité $\left\|\frac{e^{hA}-I_m-hA}{h}\right\|$ tend donc bien vers 0 quand h tend vers 0.

Au total, la quantité $\frac{e^{(t+h)A}-e^{tA}}{h} = \frac{e^{hA}-I_m}{h} e^{tA}$ tend donc bien vers Ae^{tA} quand h tend vers 0 : l'application φ est donc bien dérivable en t et $\varphi'(t) = Ae^{tA}$. □

On s'intéresse à présent à la résolution du système différentiel linéaire (S) $X' = AX$ de fonction vectorielle dérivable inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^m$. Les solutions de (S) sont données par l'exponentielle de matrices :

PROPOSITION 4.16. *Les solutions de* (S) *sont les fonctions vectorielles de la forme*

$$X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K}^m \\ t & \to & e^{tA}X_0 \end{array}$$

avec $X_0 \in \mathbb{K}^m$.

DÉMONSTRATION. On montre tout d'abord que, si $X_0 \in \mathbb{K}^m$, la fonction dérivable $X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^m$; $t \mapsto e^{tA}X_0$ est une solution de (S) : pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a, d'après la proposition précédente,

$$X'(t) = Ae^{tA}X_0 = AX(t).$$

Réciproquement, soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^m$ une solution de (S) et considérons la fonction dérivable $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^m$; $t \mapsto e^{-tA}\, X(t)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$Y'(t) = -Ae^{-tA}\, X(t) + e^{-tA}\, X'(t) = e^{-tA}\left(X'(t) - AX(t)\right) = 0$$

donc il existe un vecteur $X_0 \in \mathbb{R}^m$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y(t) = X_0 \Leftrightarrow X(t) = e^{tA}X_0$. □

REMARQUE 4.17. — Si $X_0 \in \mathbb{K}^m$, la fonction $X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^m$; $t \mapsto e^{tA}X_0$ est l'unique solution de (S) prenant pour valeur X_0 en 0 (on a $X(0) = e^{0_m}X_0 = I_mX_0 = X_0$). L'égalité $X(0) = X_0$ est appelée condition initiale en 0.

— Pour $m = 1$, on retrouve la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre $x'(t) = ax(t)$ avec $a \in \mathbb{K}$ et $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

EXEMPLE 4.18. On considère la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

de l'exemple 4.13 2. et le système différentiel linéaire (S) $X' = AX$, avec $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, dont on souhaite déterminer l'ensemble des solutions.

D'après la proposition précédente, les solutions de (S) sont les fonctions de la forme $X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^m\ ;\ t \mapsto e^{tA}X_0$ avec $X_0 \in \mathbb{R}^3$. Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après le calcul de l'exemple 4.13 2., les solutions du système différentiel (S) sont donc les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} e^{2t} + te^{2t} & -te^{2t} & te^{2t} \\ -e^t + e^{2t} + te^{2t} & e^t - te^{2t} & te^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & e^t - e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} X_0 \end{array}$$

avec $X_0 \in \mathbb{R}^3$.

Chapitre 5

Réduction des endomorphismes des espaces euclidiens

Introduction

Dans ce chapitre, on aborde la question de la réductibilité de certaines classes d'endomorphismes des espaces euclidiens. En particulier, on montre que tout endomorphisme auto-adjoint est diagonalisable dans une base orthonormale, et que tout endomorphisme orthogonal est diagonalisable par blocs, suivant des blocs identité ou symétrie de dimension 1 et des blocs de rotations vectorielles de dimension 2.

On abordera également la notion de positivité d'une matrice symétrique, montrant notamment qu'une matrice symétrique positive possède une “racine carrée”. Cela nous permettra d'établir l'existence d'une “décomposition polaire” pour toute matrice à coefficients réels inversible.

1. Compléments sur la diagonalisation

Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie admet une valeur propre, donc une droite stable. L'analogue réel est

LEMME 5.1. *Tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie admet une droite ou un plan stable.*

DÉMONSTRATION. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E. Notons $\mu(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ son polynôme minimal et $\mu_f(X) = \Pi_{k=1}^r P_k$ son écriture en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$. Par minimalité de μ_f, $\Pi_{k=2}^r P_k$ (ou 1 si $r = 1$) n'est pas un polynôme annulateur de f. Soit donc $x \in E$ tel que $y = \Pi_{k=2}^r P_k(f)(x)$ est non nul et donc $P_1(f)(y) = \mu(f)(x) = 0$. Comme P_1 est de degré au plus 2, $f^2(y) = f(f(y))$ s'écrit à l'aide de y et $f(y)$ et appartient donc à $\mathrm{Vect}(y, f(y))$. Ce sous-espace est donc stable par f. □

Il résulte de la démonstration que tout élément y du noyau d'un endomorphisme $P(f)$ où P est un facteur irréductible de μ_f (donc de χ_f) fournit un espace stable $\mathrm{Vect}((y, f(y))$ de dimension 1 ou 2.

Si $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace euclidien et f un endomorphisme de E, l'adjoint $f^\star$ de f est par définition l'unique endomorphisme de E tel que pour tous vecteurs v et w de E, $< f(v), w > = < v, f^\star(w) >$.

LEMME 5.2. *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme de E. Soit F un sous-espace de E stable par f. Alors l'orthogonal $F^\perp$ est stable $f^\star$.*

DÉMONSTRATION. Soit $x \in F^\perp$. Montrons que $f^\star(x)$ appartient à $F^\perp$. Soit donc $y \in F$. On a $< f^\star(x), y > = < x, f(y) > = 0$, car $f(y)$ appartient à F. Donc, $F^\perp$ est stable $f^\star$. □

On rappelle que f est dit symétrique (ou auto-adjoint) s'il est égal à son adjoint $f^\star$, i.e. si et seulement si, pour tous vecteurs v et w de E, $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$. L'endomorphisme f est symétrique si et seulement sa matrice dans une base orthonormale de $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est symétrique.

EXEMPLE 5.3. L'endomorphisme $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $(x, y) \mapsto (x+2y, 2x+y)$ de $\mathbb{R}^2$ est symétrique pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$.

L'endomorphisme f est dit orthogonal s'il est l'inverse $(f^\star)^{-1}$ de son adjoint, i.e. si et seulement si, pour tous vecteurs v et w de E, $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$. L'endomorphisme f est orthogonal si et seulement sa matrice dans une base orthonormale de $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est orthogonale.

Dans ces deux cas, le lemme 5.2 devient

LEMME 5.4. *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme de E symétrique ou orthogonal. Alors l'orthogonal $F^\perp$ d'un sous-espace F de E stable par f est aussi stable f.*

On note pour terminer que, par les caractérisations en termes de produit scalaire, la restriction à un sous-espace stable d'un endomorphisme symétrique (resp. orthogonal) est encore symétrique (resp. orthogonal).

2. Diagonalisabilité des endomorphismes symétriques

LEMME 5.5. *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit f un endomorphisme auto-adjoint de E. Alors, les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.*

DÉMONSTRATION. Soit λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distintes de f et v_1 et v_2 deux vecteurs propres respectifs. Alors, puisque f est symétrique, $\lambda_1 < v_1, v_2 >=< f(v_1), v_2 >=< v_1, f(v_2) >= \lambda_2 < v_1, v_2 >$. Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on en déduit que v_1 et v_2 sont orthogonaux. □

Un des principaux théorème de ce chapitre est

THÉORÈME 5.6 (Réduction des endomorphismes symétriques réels). *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit f un endomorphisme symétrique de E. Alors f est donc diagonalisable dans une base orthonormale de E.*

DÉMONSTRATION. On montre le résultat par récurrence sur la dimension n de E. Précisément, on montre par récurrence l'assertion suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, pour tout espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ de dimension n, tout endomorphisme symétrique f de E est diagonalisable dans une base orthonormale.

Toute matrice carrée de taille 1 étant diagonale, le résultat est vrai pour $n = 1$.

Soit maintenant f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension 2. Sa matrice A dans une base orthonormale est symétrique donc de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $\chi_f(X) = X^2 - (a+c)X + (ac - b^2)$. Son discriminant est $\Delta = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geqslant 0$. Par conséquent, f admet une valeur propre réelle λ et un vecteur propre v_1 unitaire. L'orthogonal de $\mathrm{Vect}(v)$ est une droite stable par f symétrique, donc propre avec un vecteur propre unitaire v_2. La base (v_1, v_2) est une base orthonormale de vecteurs propres de f.

Supposons à présent la propriété vraie au rang n pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$ fixé, et montrons-la pour un endomorphisme symétrique f de l'espace euclidien E de dimension $n + 1 \geqslant 3$. Comme tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, f admet une droite ou un plan stable. L'étude en dimension 2 montre même que f admet une droite F stable donc propre, engendrée par un vecteur unitaire v_1. Par le lemme 5.4, l'orthogonal $F^\perp$ de F est un sous-espace stable par f. L'hypothèse de récurrence appliquée à la restriction $f_{F^\perp}$ de f à $F^\perp$, qui est un endomorphisme symétrique de $F^\perp$, donne l'existence d'une base orthonormale $(v_2, \ldots, v_{n+1})$ de $F^\perp$ de vecteurs propres de f. La base $(v_1, v_2, \ldots, v_{n+1})$ de E est une base orthonormale de vecteurs propres de f. □

EXEMPLE 5.7. On considère l'endomorphisme

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (5x - y + 2z, -x + 5y + 2z, 2x + 2y + 2z) \end{array}$$

de $\mathbb{R}^3$. La matrice représentative de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (qui est une base orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$) est $A := \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice A

étant symétrique, l'endomorphisme f est symétrique. Le polynôme caractéristique de f est $\chi_f(X) = (6-X)^2(-X)$ et les valeurs propres de f sont donc 6 et 0.

On a $E_6 = \mathrm{Ker}\,(f - 6\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x-y+2z=0\big\}$. La famille $\{(2,0,1),(1,1,0)\}$ est une base de E_6. En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette famille libre de $\mathbb{R}^3$, on obtient la base orthonormale $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1), \frac{1}{\sqrt{30}}(1,-5,-2)\right\}$ de E_6. D'autre part, le vecteur unitaire normal à E_6, $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$ engendre E_0. La famille $\mathcal{B} := \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1), \frac{1}{\sqrt{30}}(1,-5,-2), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)\right\}$ est alors une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ et la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le pendant matriciel du théorème 5.6 est

COROLLAIRE 5.8 (Rédution des matrices symétriques réelles). *Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est symétrique i.e. ${}^tA = A$. Alors il existe une matrice orthogonale $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que*

$$D = O^{-1}AO = {}^tOAO.$$

DÉMONSTRATION. La matrice A représentate un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^n$, qui est orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme A est symétrique, h est auto-adjoint et, par le théorème précédent, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ et une matrice diagonale $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = D$. Les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ étant des bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$, la matrice de passage $O := P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}$ est une matrice orthogonale (proposition 2.63) et on a alors

$${}^tOAO = O^{-1}AO = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(h)\,P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = D. \qquad \square$$

EXEMPLE 5.9. Si l'on reprend la matrice $A := \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ définie dans l'exemple 5.7 précédent et si l'on note $O := \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, la matrice O est orthogonale et $O^{-1}AO = {}^tOAO = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Réduction des endomorphismes et matrices orthogonaux

LEMME 5.10. *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit f un endomorphisme orthogonal de E. Alors, les seules valeurs propres possibles de f sont -1 et 1. Les éventuels espaces propres E_{-1} et E_1 sont orthogonaux.*

DÉMONSTRATION. Soit λ une valeur propre de f orthogonal et v un vecteur propre unitaire. Alors, puisque f conserve la norme euclidienne, $1 = \|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| = |\lambda|$ et donc les seules valeurs propres possibles de f sont -1 et 1. Soit $v \in E_{-1}$ et $w \in E_1$. Puisque f conserve le produit scalaire, $< v, w > = < f(v), f(w) > = < -v, w > = - < v, w >$. Ainsi, v et w sont orthogonaux. $\square$

Nous allons montrer le théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux :

THÉORÈME 5.11. *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit f un endomorphisme orthogonal de E. Alors, l'espace E est somme directe orthogonale de droites propres pour la valeur propre 1, de droites propres pour la valeur propre -1 et de plans de rotation.*

Autrement dit, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \epsilon_r & & & \\ & & & R(\theta_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & R(\theta_s) \end{pmatrix}$$

où $r, s \in \mathbb{N}$*, pour tout* $i \in \{1, \ldots, r\}$*,* $\epsilon_i \in \{+1; -1\}$ *et, pour tout* $j \in \{1, \ldots, s\}$*,* $R(\theta_j) = \begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}$ *avec* $\theta_j \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

La version matricielle de ce résultat est le suivant : si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = {}^tPAP$ soit de la forme ci-dessus.

REMARQUE 5.12. En particulier, si l'on applique le théorème 5.11 en dimensions 2 et 3, on obtient que :

— Les isométries directes (i.e. les endomorphismes orthogonaux de déterminant 1) de $\mathbb{R}^2$ sont les rotations de $\mathbb{R}^2$, de matrice représentative $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Les isométries indirectes (i.e. les endomorphismes orthogonaux de déterminant -1) de $\mathbb{R}^2$ sont les symétries orthogonales par rapport à une droite vectorielle, de matrice représentative $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans une base bien choisie formée d'un vecteur engendrant la droite fixe et d'un vecteur orthogonal (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$) à la droite fixe.

— Les isométries directes de $\mathbb{R}^3$ sont les rotations autour d'un axe, de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$, dans une base orthonormale bien choisie (quand $\theta = \pi$, on parle de <u>retournement</u>).

Les isométries indirectes de $\mathbb{R}^3$ sont les compositions d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan (une telle transformation est également appelée <u>réflexion</u>) et d'une rotation autour de l'axe orthogonal à ce plan (par rapport au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$), de matrice représentative $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$, dans une base orthonormale correspondante. Noter que $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.11. On procède par récurrence sur la dimension n de E : on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, tout espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ de dimension n et tout endomorphisme orthogonal f de E, il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice représentative de f est de la forme voulue.

Pour $n = 1$, soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 1 et soit f un endomorphisme orthogonal de E. Par le lemme 5.10, f est soit Id_E, soit $-\mathrm{Id}_E$.

Pour $n = 2$, on a vu que tout endomorphisme orthogonal a dans toute base orthonormée une matrice de la forme $R(\theta_j) := \begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}$ avec $\theta_j \in \mathbb{R}$, si son déterminant est $+1$ et de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta_j & \sin\theta_j \\ \sin\theta_j & -\cos\theta_j \end{pmatrix}$, si son déterminant est -1. Cette description repose sur le fait que tous les couples de nombres réels (a, b) tels que $a^2 + b^2 = 1$ sont de la forme $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Reste à dire que dans le cas de déterminant -1, l'endomorphisme a 1 et -1 comme valeurs propres et est donc diagonalisable. Puisque les espaces propres sont orthogonaux par le lemme 5.10, il est diagonalisable dans une base orthonormée.

Supposons maintenant la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul plus petit ou égal à n avec $n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$ fixé et considérons l'endomorphisme orthogonal f de l'espace euclidien E de dimension $n + 1 \geqslant 3$.

Comme tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, f admet une droite ou un plan stable, noté F. L'étude en dimension 1 et 2 montre l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de F sur laquelle la matrice de la restriction f_F de f à F a la forme voulue. Par le lemme 5.4, l'orthogonal $F^\perp$ de F est un sous-espace stable par f. L'hypothèse de récurrence appliquée à la restriction $f_{F^\perp}$ de f à $F^\perp$, qui est un endomorphisme orthogonal de $F^\perp$, donne l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{B}''$ de $F^\perp$ sur laquelle $f_{F^\perp}$ à la forme voulue. La base $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ de E est une base orthonormale de $E = F \oplus^\perp F^\perp$ sur laquelle f a la forme voulue. $\square$

EXEMPLE 5.13. Considérons la matrice orthogonale $A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ de l'exemple 2.62 1. On a $\chi_A(X) = (1 - X)\left(X^2 - X + 1\right)$. On montre par calcul que le vecteur colonne $Y_1 := \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de norme 1 engendre E_1. De plus, $(E_1)^\perp = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\}$, dont une base orthonormale est formée des vecteurs $Y_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y_3 := \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. On a

$$AY_2 = A\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\,Y_2 + \sqrt{6}Y_3\right) = \frac{1}{2}Y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}Y_3$$

et

$$AY_3 = A\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\left(-3\sqrt{2}Y_2 + \sqrt{6}Y_3\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}Y_2 + \frac{1}{2}Y_3.$$

Ainsi, si on note $P := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, on a $P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$. La matrice A est donc la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 1, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

4. Matrices symétriques positives, racines carrées

Nous allons à présent exhiber une caractérisation du caractère positif, resp. défini positif, d'une matrice A de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ en termes de ses valeurs propres (voir les définitions 2.36)

PROPOSITION 5.14. *La matrice symétrique A est positive, resp. définie positive, si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles, resp. strictement positives.*

DÉMONSTRATION. Supposons que A est positive (resp. définie positive) et soit λ une valeur propre de A et $v = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur propre de A pour la valeur propre λ. Alors

$$(x_1, \ldots, x_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n)\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \sum_1^n x_i^2$$

est positif (resp. strictement positif). Donc, λ est positif (resp. strictement positif).

Réciproquement, supposons que toutes les valeurs propres λ_i de A sont positives (resp. strictement positive). Comme A est symétrique, d'après le corollaire 5.25 de diagonalisation des matrices symétriques réelles, il existe une base orthonormale $(V_1, \ldots, V_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A. Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On écrit $X = \sum x_i V_i$. Alors ${}^tXAX = \sum_{i,j} x_i x_j {}^tV_i A V_j = \sum_{i,j} x_i x_j \lambda_j {}^tV_i V_j = \sum_j \lambda_j x_j^2$ car la base $(V_1, \ldots, V_n)$ est orthonormale pour le produit scalaire standard et donc ${}^tV_i V_j$ vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$. La matrice A est donc positive (resp. définie positive). □

EXEMPLE 5.15. Reprenons les exemples de l'exemple 2.37.

(1) On a $\chi_A(X) = \left(X^2 - 3X + 1\right)(3 - X)$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, 3\right\}$, et on peut donc directement en déduire que la matrice symétrique A est définie positive.

(2) On a $\chi_B(X) = \left(X^2 - 13X + 13\right)(-X)$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \left\{\frac{13-\sqrt{117}}{2}, \frac{13+\sqrt{117}}{2}, 0\right\}$, et on peut donc directement en déduire que la matrice symétrique B est positive, non définie positive.

REMARQUE 5.16. Une matrice symétrique définie positive est en particulier inversible.

THÉORÈME ET DÉFINITION 5.17. *Soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive. Il existe une unique matrice $R \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ positive telle que $A = R^2 = RR$. De plus, si A est définie positive, R l'est également. On appelle R la racine carrée de A.*

DÉMONSTRATION. Montrons tout d'abord l'existence de cette décomposition. Comme A est une matrice symétrique positive, il existe une matrice orthogonale $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tOAO = D$ avec, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda_i \geqslant 0$ car A est positive (voir la proposition 5.14). Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, notons $\mu_i := \sqrt{\lambda_i} \geqslant 0$ et posons $R := O \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} {}^tO \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. C'est une matrice symétrique (${}^tR = R$) de valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$ positives ou nulles donc, positive par la proposition 5.14.

Enfin,

$$\begin{aligned}
R^2 = RR &= O\begin{pmatrix}\mu_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n\end{pmatrix}({}^tOO)\begin{pmatrix}\mu_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n\end{pmatrix}{}^tO\\
&= O\begin{pmatrix}\mu_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n\end{pmatrix}{}^tO \text{ (car } O \text{ est orthogonale)}\\
&= O\begin{pmatrix}\mu_1^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n^2\end{pmatrix}{}^tO = O\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}{}^tO = OD\,{}^tO = A.
\end{aligned}$$

Remarquons que si A est définie positive alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $\lambda_i > 0$ donc $\mu_i > 0$, et R est donc également définie positive.

Montrons ensuite l'unicité des racines carrées de A. On fixe un polynôme $L \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $L(\lambda_i) = \mu_i$ (par exemple le polynôme donné par l'interpolation de Lagrange). Montrons précisément que la seule racine carrée de A est $L(A)$.

Soit $\widetilde{R} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive telle que $\widetilde{R}^2 = A$. Il existe une matrice $\widetilde{O}$ orthogonale et une matrice diagonale $\widetilde{D}$ positive telles que $\widetilde{R} = {}^t\widetilde{O}\widetilde{D}\widetilde{O}$. En particulier, $A = \widetilde{R}^2 = \widetilde{O}^{-1}\widetilde{D}^2\widetilde{O}$. Le carré d'une valeur propre de $\widetilde{D}$ est donc l'un des λ_i. Comme $\widetilde{D}$ est positive, $L(\widetilde{D}^2) = \widetilde{D}$. Par conséquent, $\widetilde{R} = {}^t\widetilde{O}\widetilde{D}\widetilde{O} = {}^t\widetilde{O}L(\widetilde{D}^2)\widetilde{O} = L({}^t\widetilde{O}\widetilde{D}^2\widetilde{O}) = L(A)$. □

EXEMPLE 5.18. On considère la matrice symétrique $A := \begin{pmatrix}11 & -5 & 5\\ -5 & 3 & -3\\ 5 & -3 & 3\end{pmatrix} \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. On a $\chi_A(X) = (-X)(16-X)(1-X)$. En particulier, comme les valeurs propres de A sont positives ou nulles, A est positive (non définie positive car 0 est une valeur propre de A).

Par ailleurs, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \in E_0$ $(= \mathrm{Ker}\ A)$, $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \in E_{16}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \in E_1$ donc $\left\{\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\}$ est une base orthonormale de E_0, $\left\{\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\right\}$ est une base orthonormale de E_{16} et $\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\right\}$ est une base orthonormale de E_1. La matrice $P := \begin{pmatrix}0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ est alors une matrice orthogonale et on a $P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 16 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. La racine carrée de A est donc $R := P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}{}^tP = \begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

5. Décomposition polaire

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. L'existence d'une racine carrée pour toute matrice symétrique positive va nous permettre de montrer le théorème de décomposition suivant, analogue matriciel de l'écriture des nombres complexes non nuls sous la forme $z = e^{i\theta}r$ avec $|e^{i\theta}| = 1$ et $r > 0$.

THÉORÈME 5.19 (Décomposition polaire). *Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Il existe une matrice orthogonale $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice symétrique définie positive $S \in$*

$\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $A = OS$*. De plus, le couple* (O, S) *est unique, et l'égalité* $A = OS$ *est appelée* *la décomposition polaire de* A.

Pour démontrer ce résultat, nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 5.20. *Soit* $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$*. La matrice* ${}^tMM$ *de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *est symétrique positive. Si* M *est de plus inversible, la matrice symétrique* ${}^tMM$ *est alors définie positive.*

DÉMONSTRATION. La matrice ${}^tMM$ est symétrique car ${}^t({}^tMM) = {}^tM\,{}^t({}^tM) = {}^tMM$.

Soit $X \in \mathbb{R}^n$. Alors ${}^tX({}^tMM)X = {}^t(MX)(MX) =< MX, MX >_{\text{can}} = \|MX\|^2 \geqslant 0$. Donc ${}^tMM$ est positive. De plus, si M est inversible, ${}^tX({}^tMM)X$ est nul si et seulement si $MX = 0$, si et seulement si $X = 0$. $\square$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.19. On considère la matrice ${}^tAA \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, qui est symétrique définie positive par le lemme précédent. On note ensuite S la racine carrée de ${}^tAA$: S est également symétrique définie positive. On pose ensuite $O := AS^{-1}$. On a

$$\begin{aligned} {}^tOO &= {}^t\left(AS^{-1}\right) AS^{-1} = {}^tS^{-1}\,{}^tA\,A\,S^{-1} = {}^tS^{-1}\,S^2\,S^{-1} \ (S \text{ est la racine carrée de } {}^tAA) \\ &= {}^tS^{-1}\,S = S^{-1}\,S = I_n \ (S \text{ est symétrique donc } {}^tS = S) \end{aligned}$$

donc $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, et on a $A = OS$.

Montrons l'unicité de ce couple (O, S). Soient donc $\widetilde{O} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale et $\widetilde{S} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice définie positive telle que $A = \widetilde{O}\widetilde{S}$. Alors ${}^tAA = {}^t\left(\widetilde{O}\widetilde{S}\right)\widetilde{O}\widetilde{S} = {}^t\widetilde{S}\,{}^t\widetilde{O}\,\widetilde{O}\,\widetilde{S} = {}^t\widetilde{S}\,\widetilde{S} = \widetilde{S}^2$ donc $\widetilde{S}$ est la racine carrée de ${}^tAA$ donc $\widetilde{S} = S$. Enfin, $\widetilde{O} = AS^{-1} = O$. $\square$

EXEMPLE 5.21. On cherche la décomposition polaire de la matrice inversible $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. Pour déterminer la racine carrée de ${}^tAA$, on a ${}^tAA = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $\chi_{{}^tAA}(X) = (16-X)(1-X)^2$. Une base orthonormale de E_{16} est $\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\right\}$. Une base de E_1 est $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

En appliquant le procédé d'orthonormalisation à cette dernière famille libre de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on obtient la base orthonormale $\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\right\}$ de E_1. En posant $P := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, on a alors ${}^tAA = P\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}{}^tP$ et la racine carrée de ${}^tAA$ est donc $S := P\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}{}^tP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Enfin, $S^{-1} = P\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}{}^tP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et on calcule $O := AS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$. La décomposition polaire de A est ainsi $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Dans les espaces hermitiens

On décrit dans ce chapitre la réduction des endomorphismes auto-adjoints et unitaires des espaces hermitiens, sans donner de démonstration. Comme sur $\mathbb{C}$ les polynômes irréductibles sont de degré 1, les démonstrations ne nécessitent par l'étude des plans stables, et sont donc plus simples.

Soit $(E, < \, , \, >)$ un espace hermitien (voir la définition 2.74). L'adjoint $f^\star$ d'un endomorphisme f de E est par définition l'unique endomorphisme de E tel que pour tous vecteurs v et w de E, $< f(v), w >=< v, \overline{f^\star(w) >}$. Dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, la matrice de l'adjoint $f^\star$ est $Mat_{\mathcal{B}}(f^\star) = {}^t\overline{Mat_{\mathcal{B}}(f)}$ la transposée de la conjuguée de la matrice de f. Un endomorphisme f de E est dit normal s'il commute avec son adjoint $f^\star$. En particulier, les endomorphismes auto-adjoints (i.e. égaux à leur adjoints) et unitaires (i.e. égaux à l'inverse de leur adjoint ou de façon équivalente les endomorphismes qui conservent la norme hermitienne) sont normaux.

LEMME 5.22. *Si f est un endomorphime normal et v un vecteur propre de f de valeur propre λ alors v est aussi vecteur propre de $f^\star$ de valeur propre $\overline{\lambda}$. En particulier, les valeurs propres des endomorphismes auto-ajoints sont réels et celles des endomorphismes unitaires de module* 1.

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} 0 = \|(f - \lambda Id)(v)\|^2 &=< (f - \lambda Id)(v), (f - \lambda Id)(v) >=< v, (f^\star - \overline{\lambda} Id)(f - \lambda Id)(v) > \\ &=< v, (f - \lambda Id)(f^\star - \overline{\lambda} Id)(v) >= \|(f^\star - \overline{\lambda} Id)(v)\|^2 \end{aligned}$$ □

Avec la même démonstration que dans le cas euclidien, on obtient

LEMME 5.23. *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien et f un endomorphisme de E. Soit F un sous-espace de E stable par f. Alors l'orthogonal $F^\perp$ est stable $f^\star$.*

Deux ces deux lemmes, on déduit qu'une droite propre de f normal est une droite propre de $f^\star$ et que son orthogonal est donc stable par $((f)^\star)^\star = f$.

On obtient donc le théorème de réduction, avec la démarche de démonstration par récurrence, initiée par le fait que tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel admet une valeur propre.

THÉORÈME 5.24 (Réduction des endomorphismes normaux). *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien de dimension $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ et soit f un endomorphisme normal de E. Alors f est donc diagonalisable dans une base orthonormale de E.*

Le pendant matriciel du théorème 5.24 est

COROLLAIRE 5.25 (Rédution des matrices hermitiennes). *Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne (i.e. vérifiant ${}^t\overline{A} = A$). Alors il existe une matrice unitaire U (i.e. vérifiant ${}^t\overline{U} = U^{-1}$) et une matrice diagonale $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telles que*

$$A = UDU^{-1} = UD{}^t\overline{U}.$$

7. Réduction des coniques

DÉFINITION 5.26. *Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ et $q(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) := \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle$ la forme quadratique associée. La conique centrée $\mathcal{C}_q$ définie par la forme quadratique q est le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par*

$$\mathcal{C}_q := \{X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / q(X) = 1\}.$$

THÉORÈME 5.27. *Soit $\mathcal{C}_q$ une conique centrée définie par une forme quadratique q. Alors, il existe des nombres réels a et b et une base orthonormale $\mathcal{B} = (I, J)$ de $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{can})$ telle que pour $X = x'I + y'J$*

$$X \in \mathcal{C}_q \iff a(x')^2 + b(y')^2 = 1.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{B}_{\text{can}} = (i, j)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ et $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique associée. On note $A := \begin{pmatrix} \langle i, i \rangle & \langle i, j \rangle \\ \langle j, i \rangle & \langle j, j \rangle \end{pmatrix}$

la matrice de la forme bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Ainsi, $q(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}) = {}^t\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Par le théorème de réduction des matrices symétriques réelles (corollaire 5.25) il existe des nombres réels a et b et une base orthonormale une base orthonormale $\mathcal{B} = (I, J)$ de $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}})$ telle que $A = P_{\mathcal{B}_{\text{can}}\to\mathcal{B}} \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix} P^{-1}_{\mathcal{B}_{\text{can}}\to\mathcal{B}}$. On note $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = P^{-1}_{\mathcal{B}_{\text{can}}\to\mathcal{B}} \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = {}^tP_{\mathcal{B}_{\text{can}}\to\mathcal{B}} \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ les coordonnées de $X = xi + yj = x'I + y'J$ dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} q(X) &= {}^t\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} P_{\mathcal{B}_{\text{can}}\to\mathcal{B}} \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix} P^{-1}_{\mathcal{B}_{\text{can}}\to\mathcal{B}} \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \\ &= {}^t\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = a(x')^2 + b(y')^2. \end{aligned}$$ □

Les directions $\mathrm{Vect}(I)$ et $\mathrm{Vect}(J)$ sont appelées les directions propres de la conique. Dans la base orthonormale $\mathcal{B} = (I, J)$, il est facile de représenter la conique, en fonction des signes des valeurs propres a et b.

La démonstration précédente repose sur la correspondance suivante. On notera $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définies positives. On notera $BS(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^n$ et $PS(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$.

À toute matrice symétrique A de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ on associe l'application bilinéaire, symétrique (car A est symétrique)

$$\begin{array}{rccc} \langle\cdot,\cdot\rangle_A : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}) & \mapsto & < \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix} >_{\text{can}} = {}^t\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix} \end{array}$$

On obtient donc une application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & S_n(\mathbb{R}) & \to & BS(\mathbb{R}^n) \\ & A & \mapsto & \langle\cdot,\cdot\rangle_A \end{array}$$

Par la représentation matricielle des formes bilinéaires symétriques, cette application est une bijection.

La matrice A est positive si et seulement si l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ est positive et la matrice A est positive définie si et seulement si l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ car, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, ${}^tE_iAE_j = \langle e_i, e_j\rangle_A$ (cf preuve de la proposition 2.39). La restriction aux matrices symétriques définies positives

$$\begin{array}{rccc} \varphi^+ : & S_n^+(\mathbb{R}) & \to & PS(\mathbb{R}^n) \\ & A & \mapsto & \langle\cdot,\cdot\rangle_A \end{array}$$

est donc une bijection.

Chapitre 6

Normes matricielles subordonnées, rayon spectral, conditionnement

1. Introduction

Dans ce chapitre, on étudie des normes particulières sur les espaces de matrices carrées à coefficients réels ou complexes : les normes dites subordonnées. Ces normes possèdent des propriétés adaptées à l'étude des matrices dans différents aspects et utilisations.

On fait également le lien avec la notion de rayon spectral : il s'agit du plus grand module des valeurs propres complexes d'une matrice carrée complexe. On verra notamment que la donnée du rayon spectral d'une matrice permet de déterminer si la suite de ses puissances successives converge vers la matrice nulle ou non.

Enfin, on aborde la question de la sensibilité de la solution d'un système linéaire inversible aux erreurs d'approximations sur les données, des perturbations que l'on maîtrise à l'aide d'une quantité nommée conditionnement.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n est un entier naturel non nul.

2. Normes matricielles subordonnées

On rappelle la définition

DÉFINITION 6.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application* $\begin{array}{rccc} \|\cdot\| : & E & \to & [0,+\infty[\\ & v & \mapsto & \|v\| \end{array}$ *est une norme sur E, si*

(1) pour tous $v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$,

(2) pour tout $v \in E$, $\|v\| = 0$ si et seulement si $v = 0_E$,

(3) pour tous $v, w \in E$, $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$.

DÉFINITION 6.2. *On dit que la norme $\|\cdot\| : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to [0,+\infty[$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une norme matricielle si pour tous $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$,*

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|.$$

EXEMPLE 6.3. — Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Dans la définition et proposition 4.1, on avait défini la norme de A.

$$\|A\|_2 := \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i\,j}|^2} = \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^t\overline{A}\, A\right)} \in [0,+\infty[.$$

La norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, appelée norme de Frobenius sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, est induite, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, par le produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle :$ $\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (A,B) & \mapsto & \mathrm{Tr}\left({}^t AB\right) \end{array}$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, par le produit scalaire hermitien $\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ (A,B) & \mapsto & \mathrm{Tr}\left({}^t\overline{A}B\right) \end{array}$ (cf preuve de la définition et proposition 4.1), et nous avions montré qu'il s'agissait, dans les deux cas, d'une norme matricielle.

— La norme $\begin{array}{rccc} \|\cdot\|_1 : & \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) & \to & [0,+\infty[\\ & A & \mapsto & \|A\|_1 \end{array}$, avec, pour $A=(a_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\|A\|_1 := \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i\,j}|$$

est également une norme matricielle. En effet, si $A=(a_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $B=(b_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned} \|AB\|_1 &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^n a_{i\,k}b_{k\,j}\right| \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\sum_{k=1}^n |a_{i\,k}b_{k\,j}| = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\sum_{k=1}^n |a_{i\,k}|\,|b_{k\,j}| \\ &\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\sum_{k=1}^n |a_{i\,k}|\left(\sum_{l=1}^n |b_{l\,j}|\right) = \left(\sum_{1\leqslant i,k\leqslant n}|a_{i\,k}|\right)\left(\sum_{1\leqslant j,l\leqslant n}|b_{l\,j}|\right) = \|A\|_1\|B\|_1 \end{aligned}$$

— La norme

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|_\infty : & \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) & \to & [0,+\infty[\\ & A=(a_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} & \mapsto & \|A\|_\infty := \max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i\,j}| \end{array},$$

n'est pas une norme matricielle. En effet, avec les matrices $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})\subset\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, on a $\left\|\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\|_\infty = 2$ alors que $\left\|\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\|_\infty = 1$.

Remarquons que $\|I_n\|_2=\sqrt{n}$ et $\|I_n\|_1=n$. Pour différents usages, on aimerait construire des normes matricielles pour lesquelles la norme de la matrice identité est 1. Les normes dites “subordonnées” satisfont cette condition.

LEMME 6.4. *Soit* $\|\cdot\|:\mathbb{K}^n\to[0,+\infty[$ *une norme sur* $\mathbb{K}^n$*. Soit* $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$*. L'application*

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{K}^n\backslash\{(0,\dots,0)\} & \to & [0,+\infty[\\ & v & \mapsto & \frac{\|Av\|}{\|v\|} \end{array}$$

admet un maximum et on note $|||A||| := \max_{v\in\mathbb{K}^n\backslash\{(0,\dots,0)\}}\frac{\|Av\|}{\|v\|}$.

DÉMONSTRATION. Considérons l'application de la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}_{\|\cdot\|} := \{w\in\mathbb{K}^n \mid \|w\|=1\}$

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{S}^{n-1}_{\|\cdot\|} & \to & [0,+\infty[\\ & w & \mapsto & \|Aw\| \end{array}$$

f est une application continue (comme composée des applications continues $\|\cdot\|:\mathbb{K}^n\to[0,+\infty[$ et $\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$; $w\mapsto Aw$) sur le compact $\mathbb{S}^{n-1}_{\|\cdot\|}$ de $\mathbb{K}^n$ (la sphère $\mathbb{S}^{n-1}_{\|\cdot\|}$ est fermée bornée dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie $(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|)$) : f est donc bornée et atteint ses bornes.

Si $w\in\mathbb{S}^{n-1}_{\|\cdot\|}$, $f(w)=\psi(w)$ donc $\max\limits_{w\in\mathbb{S}^{n-1}_{\|\cdot\|}} f(w)\leqslant \sup\limits_{v\in\mathbb{K}^n\backslash\{(0,\dots,0)\}}\psi(v)$. Maintenant, si $v\in\mathbb{K}^n\backslash\{(0,\dots,0)\}$,

$$\psi(v)=\frac{\|Av\|}{\|v\|}=\left\|\frac{1}{\|v\|}Av\right\|=\left\|A\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right\|=f(\frac{v}{\|v\|})$$

car $\frac{v}{\|v\|}$ appartient à la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}_{\|\cdot\|}$. Ainsi, $\psi(v)=f\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\leqslant\max_{w\in\mathbb{S}^{n-1}_{\|\cdot\|}}f(w)$ et l'application ψ est bornée et $\sup\limits_{v\in\mathbb{K}^n\backslash\{(0,\dots,0)\}}\psi(v)\leqslant\max\limits_{w\in\mathbb{S}^{n-1}_{\|\cdot\|}}f(w)$. On conclut

$$\max_{w\in\mathbb{S}^{n-1}_{\|\cdot\|}}f(w)=\sup_{v\in\mathbb{K}^n\backslash\{(0,\dots,0)\}}\psi(v)=\max_{v\in\mathbb{K}^n\backslash\{(0,\dots,0)\}}\psi(v). \qquad\square$$

REMARQUE 6.5. Dans la démonstration précédente, on a montré au passage que
$$|||A||| = \max_{v\in\mathbb{K}^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \max_{v\in\mathbb{K}^n,\, \|v\|=1} \|Av\|\,.$$

PROPOSITION ET DÉFINITION 6.6. *Soit* $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \to [0,+\infty[$ *une norme sur* $\mathbb{K}^n$. *L'application*
$$\begin{array}{cccc} |||\cdot||| : & \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) & \to & [0,+\infty[\\ & A & \mapsto & |||A||| \end{array}$$
est une norme matricielle sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$*, appelée* *norme subordonnée à la norme* $\|\cdot\|$. *De plus,*
$$|||I_n||| = 1$$
et pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $v \in \mathbb{K}^n$*,*
$$\|Av\| \leqslant |||A|||\,\|v\|.$$

DÉMONSTRATION. On remarque d'abord que $|||I_n||| = \max_{v\in\mathbb{K}^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}} \frac{\|I_nv\|}{\|v\|} = \max_{v\in\mathbb{K}^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}} \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1$. Par construction de la norme matricielle, pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $v \in \mathbb{K}^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}$, $\frac{\|Av\|}{\|v\|} \leqslant |||A|||$ et donc et pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $v \in \mathbb{K}^n$, $\|Av\| \leqslant |||A|||\,\|v\|$.

Montrons ensuite que $|||\cdot||| : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to [0,+\infty[$ est une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$:

— soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a
$$|||\lambda A||| = \max_{v\in\mathbb{K}^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}} \frac{\|(\lambda A)v\|}{\|v\|} = \max_{v\in\mathbb{K}^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}} |\lambda|\frac{\|Av\|}{\|v\|} = |\lambda|\,|||A|||.$$

— soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $|||A||| = \max_{v\in\mathbb{K}^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = 0$, alors, pour tout $v \in \mathbb{K}^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}$, $\frac{\|Av\|}{\|v\|} = 0$ donc $\|Av\| = 0$ donc $Av = (0,\ldots,0)$ (car $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$). En particulier, si $\{e_1,\ldots,e_n\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $Ae_i = 0$ i.e. la $i^{\text{ème}}$ colonne de A est nulle, et donc $A = 0_n$.

— soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, alors, pour tout $v \in \mathbb{S}^{n-1}_{\|\cdot\|}$,
$$\begin{array}{rcl} \|(A+B)v\| & = & \|Av + Bv\| \\ & \leqslant & \|Av\| + \|Bv\| \text{ (car } \|\cdot\| \text{ est une norme sur } \mathbb{K}^n) \\ & \leqslant & |||A||| + |||B||| \end{array}$$
et donc
$$|||A+B||| = \max_{v\in\mathbb{S}^{n-1}_{\|\cdot\|}} \|(A+B)v\| \leqslant |||A||| + |||B|||.$$

Montrons enfin que la norme $|||\cdot|||$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une norme matricielle. Soient donc $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $v \in \mathbb{K}^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}$. Si $Bv = (0,\ldots,0)$, on a $\frac{\|(AB)v\|}{\|v\|} = \frac{\|A(Bv)\|}{\|v\|} = 0 \leqslant |||A|||\,|||B|||$. Si $Bv \neq (0,\ldots,0)$, on a
$$\frac{\|(AB)v\|}{\|v\|} = \frac{\|(AB)v\|}{\|Bv\|} \times \frac{\|Bv\|}{\|v\|} = \frac{\|A(Bv)\|}{\|Bv\|} \times \frac{\|Bv\|}{\|v\|} \leqslant |||A|||\,|||B|||.$$
Ainsi, $|||AB||| = \max_{v\in\mathbb{K}^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}} \frac{\|(AB)v\|}{\|v\|} \leqslant |||A|||\,|||B|||.$ $\square$

On rappelle que, si $v = (v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{K}^n$, $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$ et $\|v\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |v_i|$. Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On va donner les expressions de $|||A|||_1$ et $|||A|||_\infty$ en fonction des coefficients de A.

THÉORÈME 6.7. *On a*

— $|||A|||_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i\,j}|$,

— $|||A|||_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i\,j}|$.

REMARQUE 6.8. — Pour i et j dans $\{1,\dots,n\}$, si on note L_i la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de A et si on les considère comme des vecteurs de $\mathbb{K}^n$, on a

$$|||A|||_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|C_j\|_1 \quad \text{et} \quad |||A|||_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|L_i\|_1 .$$

— Si A est une matrice symétrique $|||A|||_1 = |||A|||_\infty$.

— Attention : en général $|||A|||_1 \neq \|A\|_1$ (resp. $|||A|||_\infty \neq \|A\|_\infty$).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6.7. Pour j dans $\{1,\dots,n\}$, on note C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de A et on la considère comme un vecteur de $\mathbb{K}^n$.

Montrons tout d'abord l'égalité $|||A|||_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|C_j\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i\,j}|$. Soit $v = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n\backslash\{(0,\dots,0)\}$. Alors,

$$\|Av\|_1 = \|\sum_{1}^{n} x_j C_j\| \leqslant \sum_{1}^{n} |x_j| \|C_j\|_1 \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|C_j\|_1 \|v\|_1.$$

Mais, si l'on note j_0 l'indice de $\{1,\dots,n\}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} |a_{i\,j_0}| = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i\,j}|$ et si $\{e_1,\dots,e_n\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a

$$\frac{\|Ae_{j_0}\|_1}{\|e_{j_0}\|_1} = \|Ae_{j_0}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{i\,j_0}| = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i\,j}| .$$

Puisque $\frac{\|Ae_{j_0}\|_1}{\|e_{j_0}\|_1} \leqslant |||A|||_1$, on obtient l'égalité $|||A|||_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i\,j}|$.

Montrons à présent l'égalité $|||A|||_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i\,j}|$. Avec les notations ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}\|Av\|_\infty &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} x_k\right| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i\,k} x_k| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i\,k}|\,|x_k| \\ &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i\,k}| \left(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |x_j|\right) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i\,k}|\,\|v\|_\infty = \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i\,k}|\right) \|v\|_\infty\end{aligned}$$

et ainsi $\frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i\,k}|$ et $|||A|||_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i\,k}|$.

Notons ensuite i_0 l'indice de $\{1,\dots,n\}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} |a_{i_0\,k}| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i\,k}|$ et notons v_0 le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont, pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, la $j^{\text{ème}}$ coordonnée notée y_j est

$$\begin{cases} e^{-i\,\mathrm{Arg}\left(a_{i_0\,j}\right)} & \text{si } a_{i_0\,j} \neq 0 \text{ (si } a_{i_0\,j} \in \mathbb{R},\ e^{-i\,\mathrm{Arg}\left(a_{i_0\,j}\right)} \in \{-1;1\}\text{)}, \\ 0 & \text{si } a_{i_0\,j} = 0, \end{cases}$$

alors $\sum_{k=1}^{n} a_{i_0\,k} y_k = \sum_{k=1}^{n} |a_{i_0\,k}|$.

Si v_0 est le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$, cela signifie que tous les coefficients de la matrice A sont nuls et, dans ce cas, on a bien l'égalité $|||A|||_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i\,j}|$. Si v_0 n'est pas le vecteur nul, alors, comme les coefficients non nuls de v_0 sont de module 1, v_0 appartient à la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}_{\|\cdot\|_\infty} = \{w \in \mathbb{K}^n \mid \|w\|_\infty = 1\}$ et on a

$$|||A|||_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i\,k}| = \sum_{k=1}^{n} |a_{i_0\,k}| = \sum_{k=1}^{n} a_{i_0\,k} y_k \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} a_{i_0\,k} y_k\right| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} y_k\right| = \|Av_0\|_\infty \leqslant |||A|||_\infty .$$

D'où l'égalité $|||A|||_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{i\,k}|$. $\square$

EXEMPLE 6.9. Pour $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & -4 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, on a $|||A|||_1 = \max\{1+2+1, 0+4+5, 6+3+2\} = 11$ et $|||A|||_\infty = \max\{1+0+6, 2+4+3, 1+5+2\} = 9$.

3. Rayon spectral

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On considère dans cette partie les valeurs propres complexes de A : on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ le spectre de A en tant que matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

DÉFINITION 6.10. *On appelle rayon spectral de A la quantité* $\rho(A) := \max\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda| \in [0, +\infty[$.

EXEMPLE 6.11.
— Le rayon spectral de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est 2.
— Le rayon spectral de la matrice $\begin{pmatrix} -3i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ est 3.
— Si $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2; 3\}$ (exemple 3.32) donc $\rho(A) = 3$.
— Si $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i; i\}$ (remarque 3.33) donc $\rho(A) = 1$.
— Si $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, $\chi_A = (1-X)(X^2+2) = (1-X)\left(\sqrt{2}\,i - X\right)\left(-\sqrt{2}\,i - X\right)$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \left\{1, \sqrt{2}\,i, -\sqrt{2}\,i\right\}$ donc $\rho(A) = \sqrt{2}$.

REMARQUE 6.12. Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et donc $\rho(A) = \max\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)} |\lambda|$.

LEMME 6.13. *Soit $\|\ \|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme matricielle subordonnée. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors,*

$$\rho(A) \leqslant |||A|||$$

DÉMONSTRATION. Soit v un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ de module $\rho(A)$. Alors, $\rho(A) = |\lambda| = \frac{\|Av\|}{\|v\|} \leqslant |||A|||$. $\square$

Dans cette section, nous allons établir deux résultats importants en relation avec le rayon spectral. Le premier consiste en une expression de la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ mettant en jeu le rayon spectral. Le second est un lien entre le rayon spectral d'une matrice complexe et la convergence de la suite de ses puissances successives.

Ci-dessous, la notation $|||\cdot|||_2$ désigne la norme matricielle sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$ i.e. l'application qui à tout vecteur v de $\mathbb{R}^n$ associe $\|v\|_2 := \sqrt{\langle v, v\rangle_{\mathrm{can}}} = \sqrt{{}^t v v}$ (ici et ci-dessous, on identifie un vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

THÉORÈME 6.14. *Supposons que* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. *Alors* $|||A|||_2 = \sqrt{\rho\,({}^tAA)}$.

La preuve de ce théorème reposera sur le lemme technique suivant :

LEMME 6.15. *Soit* $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ *une matrice symétrique positive. On considère l'application*

$$\begin{array}{rccc} R_S : & \mathbb{R}^n \backslash \{(0,\dots,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & \frac{{}^tvSv}{{}^tvv} \end{array}$$

(appelée quotient de Rayleigh). L'application R_S *est bornée et*

$$\sup_{v\in\mathbb{R}^n\backslash\{(0,\dots,0)\}} R_S(v) = \max_{v\in\mathbb{R}^n\backslash\{(0,\dots,0)\}} R_S(v) = \rho(S).$$

DÉMONSTRATION. Comme S est une matrice symétrique positive, d'après le corollaire 5.25 et la proposition 5.14, il existe une matrice orthogonale $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, +\infty[$ telles que ${}^tOSO = D$. On peut supposer, quitte à permuter les colonnes de la matrice O (ce qui modifie pas son caractère orthogonal), que $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$. En particulier, $\rho(S) = \lambda_n$.

Soit maintenant $v \in \mathbb{R}^n\backslash\{(0,\dots,0)\}$ et notons $w = (w_1, \dots, w_n) := {}^tOv \in \mathbb{R}^n\backslash\{(0,\dots,0)\}$ (les matrices O et ${}^tO$ sont inversibles). On a ${}^tw\,w = {}^tv\,O\,{}^tO\,v = {}^tv\,v$ et

$$R_S(v) = \frac{{}^tvSv}{{}^tvv} = \frac{{}^tv\,O\,D\,{}^tO\,v}{{}^tvv} = \frac{{}^twDw}{{}^tww} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i w_i^2}{\sum_{i=1}^n w_i^2} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_n w_i^2}{\sum_{i=1}^n w_i^2} = \lambda_n.$$

La fonction R_S est donc bornée. De plus, pour $v_0 := Oe_n$, avec e_n le $n^{\text{ème}}$ vecteur $(0,\dots,0,1)$ de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a ${}^tOv_0 = e_n$ et

$$R_S(v_0) = \frac{{}^tv_0Sv_0}{{}^tv_0v_0} = \frac{{}^te_n\,D\,e_n}{{}^te_ne_n} = {}^te_n\,D\,e_n = \lambda_n$$

donc la borne λ_n est atteinte et

$$\sup_{v\in\mathbb{R}^n\backslash\{(0,\dots,0)\}} R_S(v) = \max_{v\in\mathbb{R}^n\backslash\{(0,\dots,0)\}} R_S(v) = \lambda_n = \rho(S). \qquad \square$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6.14. Soit $v \in \mathbb{R}^n\backslash\{(0,\dots,0)\}$, on a

$$\left(\frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2}\right)^2 = \frac{{}^t(Av)(Av)}{{}^tvv} = \frac{{}^tv\,{}^tAA\,v}{{}^tvv} = R_{{}^tAA}(v).$$

Ainsi, comme la matrice ${}^tAA$ est symétrique positive (lemme 5.20),

$$|||A|||_2^2 = \left(\max_{v\in\mathbb{R}^n\backslash\{(0,\dots,0)\}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2}\right)^2 = \max_{v\in\mathbb{R}^n\backslash\{(0,\dots,0)\}} \left(\frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2}\right)^2 = \max_{v\in\mathbb{R}^n\backslash\{(0,\dots,0)\}} R_{{}^tAA}(v) = \rho\left({}^tAA\right).$$

$\square$

COROLLAIRE 6.16. *Si* $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, *alors* $|||A|||_2 = \rho(A)$.

DÉMONSTRATION. A étant une matrice symétrique, il existe $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tOSO = D$. En particulier, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) =$

$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Ainsi,

$$ {}^tAA = A^2 = \left(OD\,{}^tO\right)^2 = OD^2\,{}^tO = O\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2\end{pmatrix}{}^tO $$

et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\left(A^2\right) = \left\{\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2\right\}$. Finalement,

$$ |||A|||_2^2 = \rho\left({}^tAA\right) = \max_{\mu\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A^2)} |\mu| = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)} \left|\lambda^2\right| = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)} |\lambda|^2 = \left(\max_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)} |\lambda|\right)^2 = \rho(A)^2 $$

d'où le résultat ($|||A|||_2$ et $\rho(A)$ sont deux quantités positives). □

EXEMPLE 6.17. — On considère la matrice $A := \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -2\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de l'exemple 5.21. On a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\left({}^tAA\right) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\left({}^tAA\right) = \{1; 16\}$ donc $|||A|||_2 = \sqrt{\rho\left({}^tAA\right)} = \sqrt{16} = 4$.

— On considère la matrice $S := \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Comme S est symétrique, $|||S|||_2 = \rho(S)$. Or $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(S) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) = \{0; 3\}$ donc $|||S|||_2 = 3$.

Nous allons à présent expliciter un lien entre le rayon spectral $\rho(A)$ de la matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et la convergence éventuelle de la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

THÉORÈME 6.18. *Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\rho(A) > 1$, alors la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.*

DÉMONSTRATION. Soit $\|\ \|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$ et $|||\ |||$ la norme matricielle subordonnée sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Soit λ une valeur propre de module $\rho(A)$ et v un vecteur propre associé. Alors

$$ |||A^k||| \geqslant \frac{\|A^k v\|}{\|v\|} = \frac{|\lambda^k|\|v\|}{\|v\|} = |\lambda|^k = \rho(A)^k $$

qui tend vers $+\infty$ car $\rho(A) > 1$. Par conséquent, la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. □

THÉORÈME 6.19. *Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim_{k\to+\infty} A^k = 0_n$,

(2) $\rho(A) < 1$.

REMARQUE 6.20. Le cas $\rho(A) = 1$ est à étudier au cas par cas.

REMARQUE 6.21. Considérons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une matrice $A_k = \left(a_{i\,j}^{(k)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Alors la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ssi pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, la suite $\left(a_{i\,j}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $B = (b_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ ssi pour pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, la suite $\left(a_{i\,j}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $b_{i\,j}$.

Cette convergence matricielle est au sens de n'importe quelle norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (en effet $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie) et on peut par exemple montrer ces équivalences à l'aide de la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

DÉMONSTRATION. On peut travailler sur le corps $\mathbb{C}$. Par conséquent, A admet une forme de Jordan $A = PJP^{-1}$ et même une forme de Dunford $A = P(D+N)P^{-1}$. Si la suite (A^k) tend vers 0, alors la suite $((D+N)^k)$ tend vers 0. Par conséquent, ses termes diagonaux tendent vers 0, et donc (D^k) tend vers 0. Les valeurs propres de A sont donc toutes de module strictement inférieur à 1.

Réciproquement, si $\rho(A) < 1$, on utilise aussi la décomposition de Dunford. En particulier, N nilpotente vérifie $N^n = 0$. Alors la suite

$$A^k = P(D+N)^k P^{-1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} PD^{k-i}N^iP^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{k}{i} PD^{k-i}N^iP^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{k!}{(k-i)!i!} PD^{k-i}N^iP^{-1}$$

tend vers 0 comme somme de n suites $\frac{k!}{(k-i)!i!}PD^{k-i}N^iP^{-1}$ qui tendent vers 0. Noter que pour tout λ de module strictement plus petit que 1, $|\frac{k!}{(k-i)!i!}\lambda^{k-i}| \leqslant \frac{k^i|\lambda|^k}{|\lambda|^i i!}$ tend vers 0. □

EXEMPLE 6.22. — La suite des puissances successives de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, de spectre $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$ et de rayon spectral $\frac{1}{2}$, converge vers la matrice nulle de taille 2.

— Pour chacune des matrices de l'exemple 6.11, la suite de ses puissances successives ne converge pas vers la matrice nulle.

— La suite $\left(I_n^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, vers la matrice identité.

4. Conditionnement

Pour amener et motiver la notion de "conditionnement" d'une matrice carrée inversible, on étudie en préambule l'exemple suivant issu du livre cité précédemment de Philippe G. Ciarlet (section 2.2).

On considère la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$. Le déterminant de A est 1 et A est donc inversible. En particulier, pour tout vecteur colonne $B \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, le système

$$AX = B,\ X \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$$

possède une unique solution $X = A^{-1}B$. Considérons par exemple le vecteur colonne $B := \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$ et le système linéaire $AX = B$ de solution $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nous allons "perturber" le système $AX = B$: on considère le vecteur $B' := B + \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,1 \\ 0,1 \\ -0,1 \end{pmatrix}$ et la solution du système $AX' = B'$ est alors le vecteur $X' = \begin{pmatrix} 9,2 \\ -12,6 \\ 4,5 \\ -1,1 \end{pmatrix}$. On constate ainsi que, même si l'"erreur relative" $\frac{\|B-B'\|_\infty}{\|B\|_\infty}$ de B' par rapport à B n'est "que" de $\frac{0,1}{33} \simeq 0,003$, l'erreur relative de X' par rapport à X est elle de $\frac{\|X-X'\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \frac{13,6}{1} = 13,6$: le rapport d'"amplification" de l'erreur est de $\frac{13,6}{\frac{0,1}{33}} = 4488$!

Si l'on remplace à présent la matrice A par la matrice

$$A'' := A + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,08 & 0,04 & 0 & 0 \\ 0 & -0,02 & -0,11 & 0 \\ -0,01 & -0,01 & 0 & -0,02 \end{pmatrix},$$

le système $A''X'' = B$ a pour solution $X'' = \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}$. L'erreur relative de A'' par rapport à A est $\frac{\|A-A''\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{0,2}{10} = 0,02$ et l'erreur relative de X'' par rapport à X est $\frac{\|X-X''\|_\infty}{\|X\|_\infty} = 136$, d'où un rapport d'amplification de $\frac{136}{0,02} = 6800$!

Perturber même légèrement les données du système $AX = B$ peut donc entraîner des perturbations très importantes sur sa solution, alors même que la matrice A peut paraître "sympathique" (ici, la matrice est symétrique, son déterminant est 1, son inverse est $A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}$).

Nous allons définir une notion qui va permettre d'étudier et de maîtriser ce phénomène. Soit A une matrice <u>inversible</u> de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

DÉFINITION 6.23. *Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ associée. Le <u>conditionnement de A par rapport à la norme $\|\cdot\|$</u> est la quantité*

$$\mathrm{cond}(A) := |||A|||\,|||A^{-1}|||.$$

REMARQUE 6.24. Le conditionnement de la matrice A dépend de la norme choisie sur $\mathbb{K}^n$. Usuellement, on note cond_1, cond_2 et cond_∞ les conditionnements respectifs par rapport aux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.

EXEMPLE 6.25.
- Pour la matrice A ci-dessus, par le théorème 6.7 ainsi que la remarque 6.8, on a $\mathrm{cond}_1(A) = \mathrm{cond}_\infty(A) = |||A|||_\infty |||A^{-1}|||_\infty = 33 \times 136 = 4488$.
- Si $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc
$$\mathrm{cond}_\infty(A) = |||A|||_\infty |||A^{-1}|||_\infty = 2 \times 3 = 6$$
et
$$\mathrm{cond}_1(A) = |||A|||_1 |||A^{-1}|||_1 = 2 \times 3 = 6.$$
- On considère la matrice symétrique $A := \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})$. On a $\mathrm{Sp}_\mathbb{C}(A) = \mathrm{Sp}_\mathbb{R}(A) = \{1, 16\}$ (voir exemple 5.21) et $\mathrm{Sp}\left(A^{-1}\right) = \left\{\frac{1}{16}, 1\right\}$ donc
$$\mathrm{cond}_2(A) = |||A|||_2 |||A^{-1}|||_2 = 16 \times 1 = 16$$
(on a utilisé ici le corollaire 6.16).

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. Nous allons tout d'abord énoncer quelques propriétés de base du conditionnement cond associé :

PROPOSITION 6.26. *On a*

(1) $\mathrm{cond}(A) = \mathrm{cond}\left(A^{-1}\right)$,

(2) pour tout $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, $\mathrm{cond}(\lambda A) = \mathrm{cond}(A)$,

(3) $\operatorname{cond}(A) \geqslant 1$.

DÉMONSTRATION. (1) On a

$$\operatorname{cond}\left(A^{-1}\right) = |||A^{-1}||| \left|\left|\left|\left(A^{-1}\right)^{-1}\right|\right|\right| = |||A^{-1}|||\ |||A||| = \operatorname{cond}(A).$$

(2) Soit $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, on a

$$\operatorname{cond}(\lambda A) = |||\lambda A||| \, |||(\lambda A)^{-1}||| = |||\lambda A||| \left|\left|\left|\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right|\right|\right| = |\lambda| \left|\frac{1}{\lambda}\right| |||A||| \, |||A^{-1}||| = |||A||| \, |||A^{-1}||| = \operatorname{cond}(A).$$

(3) On a

$$1 = |||I_n||| = |||AA^{-1}||| \leqslant |||A||| \, |||A^{-1}||| = \operatorname{cond}(A)$$

($|||\cdot|||$ est une norme matricielle). □

Etant donné un système $AX = B$, on utilise le conditionnement de A pour estimer et maîtriser l'erreur induite sur la solution du système par une perturbation ou une erreur d'approximation sur les données A ou B :

THÉORÈME 6.27. *Soient $B, B' \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec B différent du vecteur colonne nul. On note X la solution du système linéaire $AX = B$ et X' la solution du système linéaire $AX' = B'$. On a*

$$\frac{\|X - X'\|}{\|X\|} \leqslant \operatorname{cond}(A)\frac{\|B - B'\|}{\|B\|}.$$

DÉMONSTRATION. On a d'une part $A\,(X - X') = B - B'$ i.e. $X - X' = A^{-1}\,(B - B')$ et donc $\|X - X'\| \leqslant \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right| \|B - B'\|$.

D'autre part, $B = AX$ donc $\|B\| \leqslant |||A||| \, \|X\|$ donc $\frac{1}{\|X\|} \leqslant \frac{|||A|||}{\|B\|}$.

Ainsi,

$$\frac{\|X - X'\|}{\|X\|} = \|X - X'\| \times \frac{1}{\|X\|} \leqslant \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right| \|B - B'\| \times \frac{|||A|||}{\|B\|} = \operatorname{cond}(A)\frac{\|B - B'\|}{\|B\|}.$$ □

En conséquence, l'erreur relative $\frac{\|X-X'\|}{\|X\|}$ sur la solution est d'autant plus petite que la conditionnement de la matrice A (ainsi que l'erreur relative sur la donnée du second membre $\frac{\|B-B'\|}{\|B\|}$) est petit.

Le résultat relatif à la perturbation du premier membre autrement dit de la matrice A est le suivant :

THÉORÈME 6.28. *Soit $B \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ différent du vecteur colonne nul. Soit $A' \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et notons X la solution du système linéaire $AX = B$ et X' la solution du système linéaire $A'X' = B$. On a*

$$\frac{\|X - X'\|}{\|X'\|} \leqslant \operatorname{cond}(A)\frac{|||A - A'|||}{|||A|||} \quad \text{\textit{et}} \quad \frac{\|X - X'\|}{\|X\|} \leqslant \operatorname{cond}(A)\frac{|||A - A'|||}{|||A|||}\frac{\left|\left|\left|A'^{-1}\right|\right|\right|}{|||A^{-1}|||}$$

DÉMONSTRATION. On a $AX = B = A'X'$ donc $0_n = AX - A'X' = AX - AX' + AX' - A'X' = A(X - X') + (A - A')X'$ d'où $X - X' = -A^{-1}\,(A - A')X'$ et donc

$$\begin{aligned}
\|X - X'\| = \left\|A^{-1}\,(A - A')X'\right\| &\leqslant \left|\left|\left|A^{-1}\,(A - A')\right|\right|\right| \|X'\| \\
&\leqslant \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right| \left|\left|\left|A - A'\right|\right|\right| \|X'\| = \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right| \, |||A||| \, \frac{|||A - A'|||}{|||A|||}\|X'\| \\
&= \operatorname{cond}(A)\frac{|||A - A'|||}{|||A|||}\|X'\|
\end{aligned}$$

Finalement, $\frac{\|X-X'\|}{\|X'\|} \leqslant \operatorname{cond}(A)\frac{|||A-A'|||}{|||A|||}$.

Pour établir l'autre inégalité, on considère l'égalité $0_n = AX - A'X' = AX - A'X + A'X - A'X' = (A - A')X + A'(X - X')$ d'où $X - X' = -A'^{-1}(A - A')X$ et donc

$$\begin{aligned}\|X - X'\| &= \left\|A'^{-1}(A - A')X\right\| \leqslant \left|\!\left|\!\left|A'^{-1}(A - A')\right|\!\right|\!\right| \|X\| \\ &\leqslant \left|\!\left|\!\left|A'^{-1}\right|\!\right|\!\right| |\!|\!|A - A'|\!|\!| \, \|X\| = \left|\!\left|\!\left|A'^{-1}\right|\!\right|\!\right| |\!|\!|A - A'|\!|\!| \, \|X\| \frac{\operatorname{cond}(A)}{|\!|\!|A|\!|\!| \, |\!|\!|A^{-1}|\!|\!|} \\ &= \operatorname{cond}(A) \frac{|\!|\!|A - A'|\!|\!|}{|\!|\!|A|\!|\!|} \frac{\left|\!\left|\!\left|A'^{-1}\right|\!\right|\!\right|}{|\!|\!|A^{-1}|\!|\!|} \|X\|\end{aligned}$$

Finalement, $\frac{\|X-X'\|}{\|X\|} \leqslant \operatorname{cond}(A) \frac{|\!|\!|A-A'|\!|\!|}{|\!|\!|A|\!|\!|} \frac{|\!|\!|A'^{-1}|\!|\!|}{|\!|\!|A^{-1}|\!|\!|}$. □

REMARQUE 6.29. Par continuité de l'application qui à une matrice inversible de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ associe son inverse, la quantité $\frac{|\!|\!|A'^{-1}|\!|\!|}{|\!|\!|A^{-1}|\!|\!|}$ tend vers 1 quand A' tend vers A (i.e. quand $|\!|\!|A - A'|\!|\!|$ tend vers 0).

Ainsi, le conditionnement de la matrice inversible A permet de majorer l'erreur (relative) sur la solution du système $AX = B$ quand il y a perturbations sur les données du premier ou du second membre du système. Si l'on maîtrise les erreurs d'approximations sur les données, on peut alors maîtriser les erreurs sur les solutions obtenues.

Un système $AX = B$ dont la matrice A possède un conditionnement petit (proche de 1) sera d'autant plus robuste face aux perturbations (i.e. sa solution sera peu sensible aux erreurs sur les données) et on dira qu'un tel système est <u>bien conditionné</u>. Dans le cas contraire (si le conditionnement de A est grand), on dira que le système est <u>mal conditionné</u>.

Chapitre 7

Matrices stochastiques et théorèmes de Perron-Frobenius

Introduction

On commence par un exemple de situation qui motive la progression du chapitre et les résultats qui y sont énoncés. Ces derniers sont appliqués dans d'autres situations plus générales et complexes, comme l'algorithme de classification des pages web utilisé (en tout cas à ses débuts) par des moteurs de recherche.

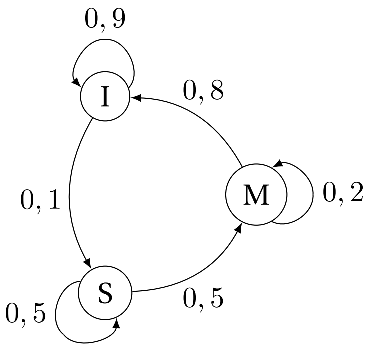
La situation que nous considérerons dans cet exemple introductif est celui de l'évolution d'une maladie au sein d'une population donnée. Pour la maladie considérée, chaque individu de la population peut être dans l'un des trois états suivants :

— I : Sain (i.e. pas malade) et Immunisé

— S : Sain mais non immunisé

— M : Malade

D'une semaine sur l'autre, un individu peut "passer" d'un état à un autre : on parle de transition d'un état à un autre. On modélise l'évolution de la maladie semaine après semaine par la probabilité pour un individu de passer d'un état donné à un autre. Les différentes transitions ainsi que leurs probabilités d'avènement sont représentées par le graphe suivant :



Par exemple, la probabilité de passer, d'une semaine sur l'autre,

— de l'état I à l'état S (i.e. de perdre son immunité) est de 0,1,

— de l'état S à l'état M (i.e. de tomber malade) est de 0,5,

— de l'état M à l'état M (i.e. de rester malade) est de 0,2.

On peut rassembler les probabilités d'avènement des différentes transitions dans une matrice

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} I & S & M \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ A := & \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow I \\ \leftarrow S \\ \leftarrow M \end{array}$$

appelée matrice de transition. Chaque colonne de la matrice de transition donne les probabilités de passer d'un état donné à l'un des trois états. Par exemple, la troisième colonne consiste en les probabilités de passer de l'état M à l'état I $(0,8)$, de passer de l'état M à l'état S (0) et de passer de l'état M à l'état M $(0,2)$, i.e. les probabilités de passer à l'un des états (I, S ou M) “sachant que” l’on est à l’état M (pour employer le langage des probabilités conditionnelles). Remarquons que les coefficients de la matrice de transition sont positifs ou nuls et que la somme des coefficients sur chaque colonne de la matrice de transition est égale à 1.

La matrice A va nous permettre de déterminer l’évolution semaine après semaine de l’état de la population que l’on considère. Notons x la proportion des individus qui sont immunisés (état I), y la proportion des individus sains (état S) et z la proportion des individus malades (état M). On note ensuite $V := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Remarquons que les coefficients de V sont positifs ou nuls et que leur somme est égale à 1. Le vecteur V représente l’“état” de la population à une semaine donnée (désignée semaine 0). L’état de la population à la semaine suivante est le vecteur

$$V_1 := AV = \begin{pmatrix} 0,9x + 0,8z \\ 0,1x + 0,5y \\ 0,5y + 0,2z \end{pmatrix}.$$

Par exemple, 90% des personnes immunisées sont restées immunisées et 80% des personnes malades sont devenues immunisées.

Si $k \in \mathbb{N}$, notons V_k le vecteur de l’“état” de la population après k semaines. On a la relation de récurrence $V_{k+1} = AV_k$, $k \in \mathbb{N}$, et donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$V_k = A^k V.$$

L’état après k semaines dépend donc de la puissance $k^{\text{ème}}$ de la matrice de transition A et de l’état initial V de la population. Considérons par exemple la matrice

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} I & S & M \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ A^2 = & \begin{pmatrix} 0,81 & 0,4 & 0,88 \\ 0,14 & 0,25 & 0,08 \\ 0,05 & 0,35 & 0,04 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow I \\ \leftarrow S \\ \leftarrow M \end{array}$$

— le coefficient situé 0, 14 sur la ligne 2 et la colonne 1 de A^2 est la probabilité de passer, au bout de <u>deux</u> semaines, à l’état S sachant que l’on était à l’état I à la semaine 0, i.e. la probabilité de perdre son immunité au bout de deux semaines,

— le coefficient 0, 05 situé sur la ligne 3 et la colonne 1 de A^2 est la probabilité de passer, au bout de <u>deux</u> semaines, à l’état M sachant que l’on était à l’état I à la semaine 0, i.e. la probabilité de tomber malade au bout de deux semaines alors que l’on était immunisé lors de la semaine 0.

L’intérêt de la matrice de transition A et de l’étude de ses puissances successives est ainsi de pouvoir modéliser, comprendre, anticiper l’évolution de l’état de la population semaine après semaine, et à long terme.

Ici, une étude numérique nous apprend que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ semble avoir une limite de la forme

$$\begin{pmatrix} 0,7547\dots & 0,7547\dots & 0,7547\dots \\ 0,1509\dots & 0,1509\dots & 0,1509\dots \\ 0,0943\dots & 0,0943\dots & 0,0943\dots \end{pmatrix}$$

où les trois colonnes de la matrice sont identiques. Ainsi, au bout d’un temps “suffisamment long”, i.e pour k assez grand, l’état de la population sera

$$\begin{pmatrix} 0,7547\dots & 0,7547\dots & 0,7547\dots \\ 0,1509\dots & 0,1509\dots & 0,1509\dots \\ 0,0943\dots & 0,0943\dots & 0,0943\dots \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 0,7547\dots & 0,7547\dots & 0,7547\dots \\ 0,1509\dots & 0,1509\dots & 0,1509\dots \\ 0,0943\dots & 0,0943\dots & 0,0943\dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7547\dots \\ 0,1509\dots \\ 0,0943\dots \end{pmatrix}$$

(car $x + y + z = 1$) et ce, <u>quel que soit l’état initial</u> de la population.

Ces constats soulèvent les questions suivantes :

— pourquoi la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite et pourquoi toutes les colonnes de cette limite sont-elles identiques ?

— peut-on déterminer l'"état limite" de la population a priori, i.e. sans passer par le calcul des puissances successives de A ?

Nous allons répondre au cours de ce chapitre. Dans la suite, n désignera un entier naturel non nul.

1. Matrices stochastiques et vecteurs stochastiques

La matrice A de l'introduction vérifie une propriété particulière : ses coefficients sont tous positifs ou nuls et la somme des coefficients de chaque colonne est égale à 1. Il s'agit de la transposée d'une matrice dite stochastique :

DÉFINITION 7.1. *Une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si tous ses coefficients sont positifs ou nuls et si, sur chaque ligne de A, la somme des coefficients est égale à* 1.

EXEMPLE 7.2. La transposée de la matrice A considérée dans l'introduction est stochastique (la matrice A ne l'est pas).

REMARQUE 7.3. Même si cela peut paraître moins "naturel", en théorie des probabilités, la matrice de transition est "traditionnellement" définie comme la transposée de la matrice que nous avions considérée. Le vecteur de l'état initial prend quant à lui la forme d'un vecteur ligne et on obtient l'état suivant en effectuant le produit à gauche de ce vecteur par la matrice de transition.

On commence par établir quelques propriétés des matrices stochastiques.

PROPOSITION 7.4. *Le produit AB de deux matrices stochastiques A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est également une matrice stochastique.*

DÉMONSTRATION. Notons $A = (a_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Comme les matrices A et B sont stochastiques, on a, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} = 1$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{i\,j} = 1$.

Soit maintenant $i \in \{1,\ldots,n\}$. Si $j \in \{1,\ldots,n\}$, le coefficient sur la ligne i et la colonne j de AB est la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i\,k}b_{k\,j}$, qui est positive ou nulle, et la somme des coefficients de la ligne i de AB est donc

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i\,k}b_{k\,j}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{k\,j}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} = 1 \qquad \square$$

PROPOSITION 7.5. *La limite d'une suite convergente de matrices stochastiques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique.*

DÉMONSTRATION. Les conditions d'inégalités larges $\forall i,j \in \{1,\ldots,n\}$, $a_{i\,j} \geqslant 0$, et d'égalité $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} = 1$ subsistent dans les limites. (On dit que l'ensemble des matrices stochastiques est un fermé de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$). $\square$

COROLLAIRE 7.6. *Soit A une matrice stochastique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Si la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ des puissances successives de A converge, alors sa limite est une matrice stochastique.*

DÉMONSTRATION. En utilisant la proposition 7.4, on montre par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est une matrice stochastique. La suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de matrices stochastiques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ convergente : la proposition 7.5 précédente permet de conclure. $\square$

DÉFINITION 7.7. *Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est dit stochastique si toutes ses coordonnées sont positives ou nulles et si leur somme est égale à* 1.

EXEMPLE 7.8. Le vecteur V considéré dans l'introduction est stochastique.

REMARQUE 7.9. Deux vecteurs stochastiques de $\mathbb{R}^n$ proportionnels sont égaux. En effet, soient $v = (v_1, \dots, v_n)$ et $w = (w_1, \dots, w_n)$ deux vecteurs stochastiques de $\mathbb{R}^n$ et supposons qu'ils sont proportionnels : il existe $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tel que $w = \lambda v$ (λ ne peut être nul car w est stochastique donc en particulier différent du vecteur nul). On a alors $1 = \sum_{j=1}^n w_j = \sum_{j=1}^n \lambda v_j = \lambda \sum_{j=1}^n v_j = \lambda$ (v et w sont stochastiques) et donc $w = v$.

2. Matrices positives, strictement positives, primitives, irréductibles

Afin de comprendre et expliquer les phénomènes constatés dans l'introduction, nous introduisons les notions suivantes :

DÉFINITION 7.10. *Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est :*

- <u>*positive*</u> *si pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{ij} \geqslant 0$,*
- <u>*strictement positive*</u> *si pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{ij} > 0$,*
- <u>*primitive*</u> *s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que la matrice A^k est strictement positive,*
- <u>*irréductible*</u> *si pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ (k dépend de i et j) tel que $\left(A^k\right)_{ij} > 0$ ($\left(A^k\right)_{ij}$ désigne le coefficient à la ligne i et la colonne j de la matrice A^k).*

Noter que

$$\begin{array}{ccc} & & \text{stochastique} \\ & & \Downarrow \\ \text{strictement positive} & \Longrightarrow & \text{positive} \\ \Downarrow & & \\ \text{primitive} & & \\ \Downarrow & & \\ \text{irréductible} & & \end{array}$$

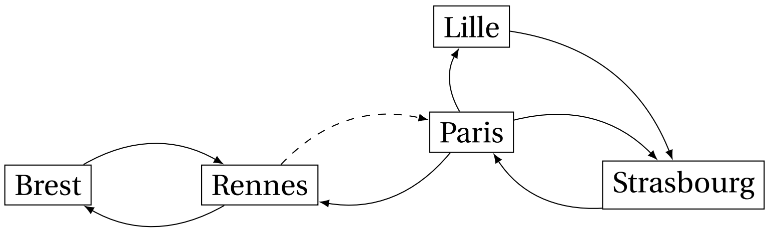
REMARQUE 7.11. Il ne faut pas confondre les notions de "positivité" de matrices introduites ci-dessus avec les notions de matrice <u>symétrique</u> positive ou définie positive. À titre d'exemple, la matrice $S := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique (définie) positive mais n'est pas une matrice positive.

EXEMPLE 7.12.

- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est positive mais non stochastique.
- La matrice nulle 0_n de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est positive mais non strictement positive.
- La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est primitive (car son carré est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$) mais non positive (et donc non strictement positive).
- La matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est irréductible. En effet, $(A)_{12} > 0$, $(A)_{21} > 0$. De plus, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et donc $\left(A^2\right)_{11} > 0$, $\left(A^2\right)_{22} > 0$. Mais A n'est pas primitive car, pour tout $p \in \mathbb{N}$, les matrices $A^{2p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas strictement positives.

— La matrice A de l'introduction est une matrice primitive (son carré A^2 est une matrice strictement positive) non strictement positive.

À tout graphe fini à n sommets numérotés de 1 à n, on peut associer une matrice carrée de taille n, positive avec un coefficient 1 en a_{ij} s'il existe une arête du sommet j au sommet i et 0 sinon. Les matrices des graphes



sont

$$A := \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B & R & P & L & S \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow B \\ \leftarrow R \\ \leftarrow P \\ \leftarrow L \\ \leftarrow S \end{array} \quad \text{et } C := \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B & R & P & L & S \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow B \\ \leftarrow R \\ \leftarrow P \\ \leftarrow L \\ \leftarrow S \end{array}$$

La matrice A n'est ni primitive, ni irréductible car de Rennes ou de Brest, on ne peut aller ni à Paris, ni à Lille, ni à Strasbourg ; autrement dit les 0 sur les deux premières colonnes subsistent dans les puissances. En ajoutant la liaison de Rennes vers Paris, on peut aller d'une ville à l'autre, par exemple en quatre étapes exactement. La matrice obtenue C est donc telle que C^4 soit strictement positive.

Réciproquement, à toute matrice positive carrée de taille n, on peut associer un graphe à n sommets numérotés de 1 à n avec une arête du sommet j au sommet i si a_{ij} est strictement positive.

La notion de matrice positive irréductible correspond à un graphe où toute paire d'états communique (On dit alors que le graphe est fortement connexe). La notion de matrice positive primitive correspond à un graphe pour lequel il existe k tel que deux états quelconques communiquent en k étapes.

3. Les théorèmes de Perron-Frobenius

Le théorème de Frobenius concerne les matrices positives et irreductibles.

THÉORÈME 7.13 (Théorème de Frobenius). *Soit A une matrice positive et irréductible de $M_n(\mathbb{R})$. Alors*

(1) le rayon spectral $\rho(A)$ de A est strictement positif.

(2) le rayon spectral $\rho(A)$ de A est une valeur propre réelle de A, de multiplicité 1 dans le polynôme caractéristique, (et donc $\dim\left(E_{\rho(A)}\right) = 1$)

(3) il existe un vecteur propre de A pour la valeur propre $\rho(A)$ stochastique et de coordonnées strictement positives.

Nous admettrons ce résultat (pour une preuve du théorème de Frobenius, on renvoie aux références citées dans le document de Bachir Bekka intitulé "Le théorème de Perron-Frobenius, les chaines de Markov et un célèbre moteur de recherche", disponible sur sa page web). Si de plus, on considère une matrice positive et primitive, on a

THÉORÈME 7.14 (Théorème de Perron). *Soit A une matrice positive et primitive de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Alors*

(1) les conclusions du théorème de Frobenius subsistent et

(2) pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\backslash\{\rho(A)\}$, $|\lambda| < \rho(A)$ *(on dit que la valeur propre* $\rho(A)$ *de* A *est* *dominante).*

REMARQUE 7.15. Les conclusions du théorème de Perron ne sont plus vraies si l'on retire l'hypothèse de positivité de la matrice A. Si l'on considère par exemple la matrice primitive $M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ de l'exemple 7.12, son polynôme caractéristique est $\chi_M = X^2 + X - 1 = \left(X - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ donc $\rho(M) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ n'est pas une valeur propre de M.

REMARQUE 7.16. Si A est une matrice positive et seulement irréductible, la valeur propre $\rho(A)$ de A n'est pas nécessairement dominante. Si on considère par exemple la matrice positive et irréductible $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(A) = \{-1; 1\}$ et la valeur propre $\rho(A) = 1$ de A n'est pas dominante.

Pour une preuve du théorème de Perron 7.14, on renvoie à nouveau au document de Bachir Bekka intitulé “Le théorème de Perron-Frobenius, les chaines de Markov et un célèbre moteur de recherche”. Nous allons établir certaines de ces conclusions sous des hypothèses plus fortes. Précisément, nous montrerons le résultat suivant et nous admettrons le cas général

PROPOSITION 7.17. *Soit* A *une matrice strictement positive. Alors*

(1) $\rho(A) > 0$

(2) $\rho(A)$ *est une valeur propre réelle de* A*,*

(3) il existe un vecteur propre de coordonnées *strictement positives* *pour la valeur propre* $\rho(A)$ *de* A*.*

Dans la preuve ci-dessous, nous utiliserons les notations suivantes :

— si $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note $v \geqslant 0$ (resp. $v > 0$) si, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \geqslant 0$ (resp. $x_i > 0$), et $v \geqslant w$ (resp. $v > w$) si $v - w \geqslant 0$ (resp. $v - w > 0$) i.e. si, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \geqslant y_i$ (resp. $x_i > y_i$),

— si $u = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ est un vecteur de $\mathbb{C}^n$, on note $|u|$ le vecteur $\begin{pmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_n| \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$: on a $|u| \geqslant 0$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 7.17. Comme A est une matrice strictement positive, $\rho(A) > 0$. En effet, si $\rho(A) = 0$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$ et donc $\chi_A = (-X)^n$, en particulier A est nilpotente, ce qui est en contradiction avec le fait que A et donc pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, A^k est strictement positive.

Quitte à remplacer A par la matrice $\frac{1}{\rho(A)}A$ dont le rayon spectral est $\rho\left(\frac{1}{\rho(A)}A\right) = \frac{1}{\rho(A)}\rho(A) = 1$, on peut supposer $\rho(A) = 1$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ telle que $|\lambda| = 1$ (existe car $\rho(A) = 1$) et soit $u \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre (complexe) de A pour la valeur propre λ.

On montre tout d'abord que $|u| \leqslant A|u|$. On a, d'une part, $Au = \lambda u$ donc, si $z_1, \dots, z_n$ sont les coordonnées de u dans $\mathbb{C}^n$, puisque $|\lambda| = 1$

$$|Au| = |\lambda u| = \begin{pmatrix} |\lambda z_1| \\ \vdots \\ |\lambda z_n| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda||z_1| \\ \vdots \\ |\lambda||z_n| \end{pmatrix} = |\lambda| \begin{pmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_n| \end{pmatrix} = |u|$$

D'autre part, si on note $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, la $i^{\text{ème}}$ coordonnée $(Au)_i$ du vecteur Au est $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j$ et on a

$$(|Au|)_i = |(Au)_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|z_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,|z_j| = (A|u|)_i$$

(les coefficients de A sont réels et positifs). Ainsi, $|u| = |Au| \leqslant A|u|$.

Nous allons maintenant montrer que, nécessairement, $|u| = A|u|$. Pour cela, on procède par l'absurde : on suppose qu'il existe $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $(A|u| - |u|)_i > 0$. Comme A est une matrice strictement positive, on a alors $A\,(A|u| - |u|) > 0$ (appliquer une matrice de coefficients tous strictement positifs à un vecteur de coordonnées positives ou nulles avec au moins une coordonnée strictement positive donne un vecteur de coordonnées strictement positives).

Il existe alors $\epsilon > 0$ tel que $A\,(A|u| - |u|) > \epsilon A|u|$ i.e. $\left(\frac{1}{1+\epsilon}A\right) A|u| > A|u|$ (on peut par exemple choisir ϵ de telle sorte que la plus grande coordonnée du vecteur $\epsilon A|u|$ soit strictement plus petite que la plus petite coordonnée du vecteur $A\,(A|u| - |u|)$). On a ensuite, puisque la matrice $\left(\frac{1}{1+\epsilon}A\right)$ est également à coefficients strictement positifs (et préserve donc la relation $\left(\frac{1}{1+\epsilon}A\right) A|u| > A|u|$),

$$\left(\frac{1}{1+\epsilon}A\right)^2 A|u| > \left(\frac{1}{1+\epsilon}A\right) A|u| > A|u|$$

puis, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{1}{1+\epsilon}A\right)^k A|u| > A|u|.$$

Or $\rho\left(\frac{1}{1+\epsilon}A\right) = \frac{1}{1+\epsilon}\rho(A) = \frac{1}{1+\epsilon} < 1$. D'après le théorème 6.19 du chapitre précédent, la suite $\left(\left(\frac{1}{1+\epsilon}A\right)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 0. Le vecteur $\left(\frac{1}{1+\epsilon}A\right)^k A|u|$ converge donc vers le vecteur nul et, en faisant tendre k vers $+\infty$ dans l'inégalité de vecteurs $\left(\frac{1}{1+\epsilon}A\right)^k A|u| > A|u|$, on obtient que les coordonnées du vecteur $A|u|$ sont négatives ou nulles, ce qui est impossible car $|u| \geqslant 0$, u n'est pas le vecteur nul (car vecteur propre), et la matrice A est strictement positive (i.e. tous ses coefficients sont strictement positifs).

Ainsi, nécessairement, $A|u| = |u|$ et, comme $|u|$ n'est pas le vecteur nul, $1 = \rho(A)$ est une valeur propre de A. De plus, $|u| = A|u| > 0$ car $|u| \geqslant 0$, u n'est pas le vecteur nul et A est strictement positive. Le vecteur $|u|$ de $\mathbb{R}^n$ est donc un vecteur propre pour la valeur propre $1 = \rho(A)$ de coordonnées strictement positives. En le normalisant, on peut le rendre stochastique. □

4. Le cas des matrices primitives stochastiques

Nous allons à présent appliquer le théorème de Perron au cas particulier des matrices primitives et stochastiques afin de répondre aux questions posées dans l'introduction.

PROPOSITION 7.18. *Le rayon spectral $\rho(A)$ de la matrice stochastique A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est 1.*

DÉMONSTRATION. On a $A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ (car la somme des coefficients sur chaque ligne de A vaut 1) donc 1 est une valeur propre de A. En particulier, $\rho(A) \geqslant 1$. D'autre part, $\rho(A) \leqslant |||A|||_\infty$, par le lemme 6.13 et $|||A|||_\infty$, qui est la plus grande somme des valeurs absolues des coefficients sur les lignes de A par le théorème 6.7, est égal à 1 (car les coefficients de A sont positifs ou nuls et, sur chaque ligne, la somme des coefficients est égale à 1). Ainsi, on a $1 \leqslant \rho(A) \leqslant 1$ i.e. $\rho(A) = 1$. $\square$

Nous allons à présent nous intéresser aux matrices stochastiques primitives, pour lesquelles on peut appliquer le théorème de Perron :

THÉORÈME 7.19. *Supposons que la matrice stochastique A soit primitive. Alors la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ des puissances successives de A converge, vers une matrice stochastique de la forme $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ où les réels $x_1, \ldots, x_n$ forment un vecteur stochastique $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.*

REMARQUE 7.20. — Avec les notations ci-dessus, le vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$, présenté sous la forme d'un vecteur ligne $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, est appelé <u>état limite associé à A</u>.

— Ce théorème répond à la première des deux questions de l'introduction.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 7.19. On commence par triangulariser la matrice A, considérée en tant que matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, sous forme de Jordan : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $s \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, $m_i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tels que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & J_{m_1}(\lambda_1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{m_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$. De plus, pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, $|\lambda_i| < 1$: en effet, comme A est stochastique, $\rho(A) = 1$ (par proposition 7.18) et, comme A est primitive, $\rho(A)$ est une valeur propre simple de A et cette valeur propre est dominante (par le théorème de Perron : théorème 7.14).

Afin de simplifier les écritures, notons, pour $i \in \{1, \ldots, s\}$, $J_i := J_{m_i}(\lambda_i)$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$A^k = P \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & J_1^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_s^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, comme $\rho\left(J_i\right) = |\lambda_i| < 1$, d'après le théorème 6.19, la suite $\left(J_i^k\right)_{k\geqslant 0}$ de $\mathrm{M}_{m_i}(\mathbb{R})$ converge vers la matrice nulle 0_{m_i}. Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & J_1^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_s^k \end{pmatrix} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0_{m_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0_{m_s} \end{pmatrix}$ et, par continuité de l'application $\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array}$, $A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} P \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0_{m_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0_{m_s} \end{pmatrix} P^{-1}$.

Déterminons enfin la forme de cette matrice limite. Comme la matrice A est stochastique, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre $1 = \rho(A)$. Comme A est de plus primitive, le sous-espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$ est de dimension 1 (par le théorème de Perron). Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ constitue donc une base de E_1 et on peut supposer que la première colonne de la matrice de passage P est le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. On a alors

$$P \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0_{m_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0_{m_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ et, si $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ est la première ligne de P^{-1},

$$P \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0_{m_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0_{m_s} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

Notons L cette matrice limite $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$. Comme $A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} L$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice limite L est dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, comme la matrice A est stochastique, L est également une matrice stochastique par le corollaire 7.6 : le vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ est donc un vecteur stochastique de $\mathbb{R}^n$. □

Avec les hypothèses et notations du théorème ci-dessus, on souhaiterait pouvoir déterminer l'état limite $l := \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ de la matrice stochastique primitive A sans passer par la réduction de Jordan de A. La solution de ce problème est donnée par la proposition suivante. Il s'agit de la réponse à la deuxième question de l'introduction.

PROPOSITION 7.21. *Supposons que la matrice stochastique A soit primitive et notons $l \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ son état limite. La matrice ${}^tA$ transposée de A possède un unique vecteur propre associé à la valeur propre 1 qui soit stochastique, et ce vecteur est le vecteur colonne ${}^tl$.*

DÉMONSTRATION. Comme la matrice A est primitive, sa transposée ${}^tA$ l'est aussi (pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left({}^tA\right)^k = {}^t\!\left(A^k\right)$). De plus, on a $\chi_{{}^tA} = \chi_A$ donc $1 = \rho(A) = \rho\left({}^tA\right)$ est une valeur propre simple (par le théorème de Perron 7.14) de ${}^tA$. L'espace propre E_1 de ${}^tA$ est donc de dimension 1. De plus, comme ${}^tA$ est primitive, d'après le théorème de Perron 7.14, il existe un vecteur propre v pour la valeur propre $\rho\left({}^tA\right) = 1$ de ${}^tA$ qui soient de coordonnées strictement positives. Si on note $v_1, \ldots, v_n$ les coordonnées du vecteur v, le vecteur normalisé $w := \frac{1}{\sum_{i=1}^n v_i} v$ est alors un vecteur stochastique de $\mathbb{R}^n$, qui est également un vecteur propre pour la valeur propre 1 de ${}^tA$.

Montrons à présent que $w = {}^tl$. On a ${}^tAw = w$ et donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left({}^tA\right)^k w = w \Leftrightarrow {}^t\!\left(A^k\right) w = w$. Comme la transposition est une application continue sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, si L désigne la matrice limite de la suite des puissances successives de A, on a alors, par passage à la limite, ${}^tLw = w$, autrement dit $w = {}^tLw$ et w est donc dans l'image de la matrice ${}^tL$. Or ${}^tL = \left({}^tl \mid \cdots \mid {}^tl\right)$ et donc $w \in \mathrm{Im}\, {}^tL = \mathrm{Vect}\left\{{}^tl\right\}$. Il existe donc un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $w = \alpha\, {}^tl$. Mais le vecteur ${}^tl = (l_1, \ldots, l_n)$ est, comme le vecteur w, un vecteur stochastique donc finalement $w = {}^tl$ par la remarque 7.9. □

Ainsi, si la matrice stochastique A est primitive, son état limite est l'unique vecteur ligne stochastique l tel que ${}^tA{}^tl = {}^tl$. Nous allons appliquer cette propriété à notre exemple introductif :

EXEMPLE 7.22 (Retour à l'exemple introductif). La matrice stochastique $A := \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$ (il s'agit de la transposée de la matrice que nous avions considérée dans l'exemple) est primitive car la matrice A^2 est strictement positive, et l'état limite de A est le vecteur ligne stochastique $l = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix}$ tel que

$$ {}^tA{}^tl = {}^tl \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,9l_1 \quad\quad + 0,8l_3 & = l_1, \\ 0,1l_1 + 0,5l_2 & = l_2 \\ \quad\quad 0,5l_2 + 0,2l_3 & = l_3 \end{cases} $$

$$ \Leftrightarrow \begin{cases} -0,1l_1 \quad\quad + 0,8l_3 & = 0 \\ 0,1l_1 - 0,5l_2 & = 0 \\ \quad\quad 0,5l_2 - 0,8l_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 & = 8l_3 \\ l_2 & = \frac{8}{5}l_3 \end{cases}, \quad l_3 \in \mathbb{R} $$

De plus,

$$ l_1 + l_2 + l_3 = 1 \Leftrightarrow 8l_3 + \frac{8}{5}l_3 + l_3 = 1 \Leftrightarrow \frac{53}{5}l_3 = 1 \Leftrightarrow l_3 = \frac{5}{53}, $$

donc l'état limite de A est le vecteur ligne $l = \begin{pmatrix} \frac{40}{53} & \frac{8}{53} & \frac{5}{53} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7547\ldots & 0,1509\ldots & 0,0943\ldots \end{pmatrix}$.

EXEMPLE 7.23. Le théorème de Perron a également été utilisé pour le classement des pages web : Notons $W := \{x_i, i \in I\}$ l'ensemble des pages web présentes sur le "World Wide Web", où $I := \{1, \ldots, N\}$ avec N entier supérieur à 13×10^{13}.

On forme un graphe avec ces pages webs : pour $i, j \in I$, on écrit $x_i \to x_j$ si la page x_i contient un lien vers la page x_j (on dit alors que x_i pointe vers x_j).

Si, pour $i \in I$, la page x_i contient au moins un lien, on fait l'hypothèse que chacun des liens présents sur la page x_i pointe vers une page différente et que, depuis la page x_i, la probabilité de cliquer sur l'un de ces liens est toujours la même : si on note d_i le nombre de liens présents sur une telle page x_i, cette probabilité est de $\frac{1}{d_i}$. Pour tous $i, j \in I$, on pose alors

$$ a_{i\,j} := \begin{cases} \frac{1}{d_i} & \text{si } x_i \text{ pointe vers } x_j, \\ 0 & \text{si } x_i \text{ ne pointe pas vers } x_j, \end{cases} $$

et on forme la matrice de transition $A := (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$ (par exemple, si $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, le coefficient $\left(A^2\right)_{i\,j} = \sum_{k=1}^{N} a_{i\,k} a_{k\,j}$ de A^2 est la probabilité, partant de la page x_i, d'aboutir à la page x_j en deux clics).

Soit $i \in I$. Remarquons que s'il y a au moins un lien sur la page x_i, alors la somme $\sum_{j=1}^{N} a_{i\,j}$ des coefficients de la ligne i de A est $\displaystyle\sum_{j \mid x_i \to x_j} \frac{1}{d_i} = d_i \times \frac{1}{d_i} = 1$ et que, s'il n'y a aucun lien sur la page x_i, tous les coefficients de la ligne i de A sont nuls. Afin de "rendre" cette matrice stochastique, on remplace tous les coefficients des lignes nulles de A, lignes qui correspondent à des pages sans lien, par $\frac{1}{N}$. On note $\widetilde{A}$ la matrice ainsi obtenue, qui est alors une matrice stochastique.

Cependant, la matrice $\widetilde{A}$ n'est pas nécessairement primitive. Pour remédier à cela, on considère la matrice $G_\alpha := \alpha\widetilde{A} + (1-\alpha)E$ où $\alpha \in]0;1[$ et E est la matrice de $\mathrm{M}_N(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont tous égaux à $\frac{1}{N}$. Alors la matrice G_α est stochastique et strictement positive (en particulier primitive) : on peut donc lui appliquer le théorème 7.19 et la proposition 7.21. En classant ensuite les coordonnées du vecteur d'état limite de cette matrice de la plus grande à la plus petite valeur, on obtient un classement des pages web, suivant "leur probabilité d'être visitée à la limite".

Dans la pratique, il faut choisir un nombre α qui soit "proche" de 1 pour que la matrice G_α soit "proche" de la matrice $\widetilde{A}$, mais "pas trop proche" pour que le calcul de l'état limite ne soit "pas trop difficile". Dans les derniers documents publics détaillant cette méthode de classement des pages web, α avait été choisi égal à $0,85$.

Chapitre 8

Résolution de systèmes linéaires, décompositions LU et décomposition de Cholesky

Introduction

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit n un entier naturel non nul.

On fixe une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et un vecteur colonne $B \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et on considère le système linéaire

$$\text{(S)} \qquad\qquad AX = B$$

de vecteur inconnu $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'objectif de ce chapitre est de présenter des méthodes de résolution d'un tel système qui soient "peu" coûteuses en calculs pour n "grand".

On suppose tout d'abord que A est une matrice inversible. Dans ce cas, le système (S) possède une unique solution $X = A^{-1}B$. En particulier, le calcul de l'inverse A^{-1} de A permet de résoudre le système (S). Une méthode de calcul de cet inverse consiste à déterminer les vecteurs colonnes de la matrice $A^{-1} = \left(Y_1|\cdots|Y_n\right)$ à l'aide de la résolution des n systèmes linéaires

$$\begin{cases} AY_1 & = X_1 \\ & \vdots \\ AY_n & = X_n \end{cases}$$

de vecteurs inconnus $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, où, pour $i \in \{1, \ldots, \}$, X_i désigne le vecteur colonne de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la $i^{\text{ème}}$ coordonnée qui est 1 : on a

$$AA^{-1} = I_n \text{ ssi } A\left(Y_1|\cdots|Y_n\right) = \left(X_1|\cdots|X_n\right) \text{ ssi } \forall i \in \{1, \ldots, n\}, AY_i = X_i.$$

Dans la visée de la résolution du seul système (S), cette méthode est bien trop coûteuse en calculs. Il faut donc recourir à d'autres méthodes plus "efficaces".

Par exemple, lorsque A, en plus d'être inversible, est une matrice triangulaire supérieure, il existe une méthode permettant de résoudre le système (S) avec un minimum de calculs : la méthode dite <u>de remontée</u>. Cette méthode consiste à partir de la dernière équation du système (S) et puis "remonter" les équations une à une pour déterminer successivement les coordonnées du vecteur solution. Précisément, on procède de la manière suivante. Notons

$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{n\,n} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{S})\ AX = B &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{n\,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{1\,1}x_1 + \ldots + a_{1\,n}x_n & = b_1 \\ \qquad \ddots & \vdots \\ \qquad\qquad a_{n\,n}x_n & = b_n \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a_{1\,1}x_1 + \ldots + a_{1\,n}x_n & = b_1 \\ \qquad \ddots & \vdots \\ \qquad\qquad x_n & = \frac{b_n}{a_{n\,n}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{1\,1}x_1 + \quad \ldots \quad + a_{1\,n}x_n & = b_1 \\ \qquad \ddots & \vdots \\ \qquad a_{n-1\,n-1}x_{n-1} + a_{n-1\,n}x_n & = b_{n-1} \\ \qquad\qquad x_n & = \frac{b_n}{a_{n\,n}} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a_{1\,1}x_1 + \ldots + a_{1\,n}x_n & = b_1 \\ \qquad \ddots & \vdots \\ \qquad\qquad x_{n-1} & = \frac{1}{a_{n-1\,n-1}}\left(b_{n-1} - (a_{n-1\,n}x_n)\right) \\ \qquad\qquad x_n & = \frac{1}{a_{n\,n}}b_n \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = \frac{1}{a_{1\,1}}\left(b_1 - (a_{1\,2}x_2 + \ldots + a_{1\,n}x_n)\right) \\ x_2 & = \frac{1}{a_{2\,2}}\left(b_2 - (a_{2\,3}x_3 + \ldots + a_{2\,n}x_n)\right) \\ & \vdots \\ x_{n-1} & = \frac{1}{a_{n-1\,n-1}}\left(b_{n-1} - a_{n-1\,n}x_n\right) \\ x_n & = \frac{b_n}{a_{n\,n}} \end{cases}
\end{aligned}
$$

(il est ici à noter que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i\,i} \neq 0$, car A est inversible). On dit que l'on a obtenu la solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ du système (S) par "remontées successives" : on obtient une coordonnée x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, à partir des coordonnées x_j, $j > i$ déterminées "plus bas". Les calculs mis en œuvre dans cette méthode sont en particulier simples et "peu" nombreux.

EXEMPLE 8.1. On considère le système

$$
(\mathrm{S}) \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 5z & = 2 \\ \quad -4y + 3z & = 0 \\ \qquad\quad -z & = 3 \end{cases}
$$

de vecteur inconnu $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$
(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 5z = 2 \\ -4y + 3z = 0 \\ z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 5z = 2 \\ y = \frac{-3\times(-3)}{-4} = -\frac{9}{4} \\ z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2 \times \left(-\frac{9}{4}\right) - 5 \times (-3) = \frac{25}{2} \\ y = -\frac{9}{4} \\ z = -3 \end{cases}
$$

REMARQUE 8.2. On peut adapter la méthode de remontée décrite ci-dessus dans le cas où A est une matrice triangulaire supérieure non inversible (i.e. au moins un coefficient diagonal de A est nul). Considérons par exemple les deux systèmes suivants.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors le système

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+7y=1 \\ 2z=7 \\ -5z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+7y=1 \\ 2z=7 \\ z=\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+7y=1 \\ 0=7-\frac{4}{5} \\ z=\frac{2}{5} \end{cases}$$

n'a pas de solution, et le système

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 4y+5z=1 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=5 \\ y=\frac{1-5z}{4} \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 5+2\left(\frac{1-5z}{4}\right)-3z = \frac{11-11z}{2} \\ y &= \frac{1-5z}{4} \end{cases}$$

a pour ensemble de solutions

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{11-11z}{2} \\ \frac{1-5z}{4} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} \frac{-11}{2} \\ -\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si la matrice A est triangulaire inférieure, il existe une méthode dite <u>de descente</u>, analogue de la méthode de remontée pour les systèmes triangulaires supérieurs. On illustre la méthode de descente avec le système triangulaire inférieur suivant : si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x &= 3 \\ -x+7y &= 2 \\ x+3y+4z &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{3}{2} \\ -x+7y &= 2 \\ x+3y+4z &= -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{3}{2} \\ y &= \frac{1}{7}\left(2+\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ x+3y+4z &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{3}{2} \\ y &= \frac{1}{2} \\ z &= \frac{1}{4}\left(-1-\frac{3}{2}-3\times\frac{1}{2}\right) = -1 \end{cases}$$

Les méthodes de résolution des systèmes linéaires que nous allons présenter dans ce chapitre vont consister en des “factorisations matricielles” permettant de se ramener à des systèmes triangulaires, systèmes triangulaires que l'on résout ensuite à l'aide des méthodes de remontée et/ou de descente décrites plus haut.

Nous allons étudier une méthode qui permet de ramener la résolution du système (S) à la résolution d'un système triangulaire supérieur.

1. Méthode du pivot de Gauss pour la résolution de systèmes linéaires

Considérons le système (S) $AX = B$ comme dans l'introduction, avec $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque. Une première méthode de résolution de ce système consiste à lui appliquer l'algorithme du pivot de Gauss : en utilisant des “pivots”, on effectue des opérations sur les lignes de A <u>et</u> sur les coordonnées du vecteur colonne B (<u>les mêmes</u>), de façon à se ramener à un système triangulaire supérieur, pour lequel on peut alors employer la méthode de remontée.

On introduit cette méthode avec l'exemple suivant. On suppose que A est la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et que B est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors, si $X =$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\text{(S) } AX = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x + 2y + z & = 12 \\ 5x - 6y + 2z & = -1 \\ -4x + 2y + z & = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{4}{5} L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5x + 2y + \ z & = 12 \\ \quad -8y + \ z & = -13 \\ \quad \frac{18}{5} y + \frac{9}{5} z & = \frac{63}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & \frac{18}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ \frac{63}{5} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{18}{5} \frac{1}{8} L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5x + 2y + z & = 12 \\ \quad -8y + z & = -13 \\ \quad \frac{9}{4} z & = \frac{27}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ \frac{27}{4} \end{pmatrix}$$

Ce dernier système étant triangulaire supérieure, on peut le résoudre par remontée et on a finalement

$$\text{(S)} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = \frac{1}{5}(12 - (2y + z)) = \frac{1}{5}(12 - (2 \times 2 + 3)) = 1 \\ y & = -\frac{1}{8}(-13 - z) = -\frac{1}{8}(-13 - 3) = 2 \\ z & = \frac{4}{9} \times \frac{27}{4} = 3 \end{cases}$$

et le système (S) possède donc une unique solution $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Les opérations sur les lignes du système effectuées ci-dessus à chaque étape de l'algorithme du pivot de Gauss reviennent à multiplier à gauche la matrice A et le vecteur B par certaines matrices particulières, appelées matrices d'élimination :

DÉFINITION 8.3. *Soit n et k deux entiers naturels non nuls avec $k \leqslant n$. On appelle matrice d'élimination toute matrice de la forme*

$$E_k(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) := \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \quad\quad k \\ \quad\quad \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \alpha_{k+1} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \alpha_n & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

où tous les coefficients non indiqués sont nuls et $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

LEMME 8.4. *Soient $k \in \{1, \dots, n\}$ et $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Soit une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $L_1, \dots, L_n$ ses lignes (dans l'ordre). Alors, la matrice $E_k(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)A$ est la matrice obtenue à partir de la matrice A en ajoutant, pour tout $l \in \{k+1, \dots, n\}$, $\alpha_l L_k$ à la ligne L_l.*

DÉMONSTRATION. Soit $l \in \{k+1, \dots, n\}$ alors, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, le coefficient situé à la ligne l et la colonne j de la matrice $E_k(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)A$ est $\alpha_l a_{kj} + a_{lj}$. □

Dans l'exemple ci-dessus, la première étape de l'algorithme consistait à multiplier à gauche A et B par la matrice d'élimination $E_1\left(-1, \frac{4}{5}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la deuxième à multiplier à gauche la matrice $E_1\left(-1, \frac{4}{5}\right) A$ et le vecteur $E_1\left(-1, \frac{4}{5}\right) B$ par la matrice d'élimination

$E_2\left(\frac{9}{20}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix}$. Autrement dit, pour passer du système initial (S) au système triangulaire de la fin de l'algorithme, nous avons multiplier à gauche la matrice A et le vecteur B par la matrice

$$M := E_2\left(\frac{9}{20}\right) E_1\left(-1, \frac{4}{5}\right) = E_2\left(\frac{9}{20}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{7}{20} & \frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix}$$

REMARQUE 8.5. — Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ et $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, la matrice d'élimination $E_k(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ est inversible d'inverse $E_k(-\alpha_{k+1}, \ldots, -\alpha_n)$.

— Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ et $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $\det\left(E_k(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)\right) = 1$.

— La matrice identité I_n est une matrice d'élimination : $I_n = E_1(0, \ldots, 0)$.

Lorsque l'on applique l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre un système linéaire, on peut également être amené à effectuer un échange de lignes pour "déplacer" un pivot à la "bonne place". Par exemple, dans le système

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

le coefficient situé à la ligne 1 et la colonne 1 de la matrice est nulle et on échange alors, par exemple, les deux premières lignes de la matrice, afin de se ramener au système équivalent

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

où le coefficient non nul situé à la ligne 1 et la colonne 1 peut être utilisé comme premier pivot.

Les échanges de deux lignes ainsi appliqués au cours de l'algorithme du pivot de Gauss correspondent à des multiplications à gauche par des matrices dites de transposition : Dans l'exemple considéré plus haut, on a multiplié à gauche la matrice et le vecteur considérés par la matrice de transposition $T_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

DÉFINITION 8.6. *On appelle matrice de transposition toute matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en échangeant deux lignes. Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, la matrice de transposition obtenue en échangeant les lignes i et j de I_n est notée $T_{i,j}$.*

REMARQUE 8.7. Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. On a

— $T_{i,j} = T_{j,i}$,

— la matrice $T_{i,j}$ est inversible et égale à son inverse,

— $\det(T_{i,j}) = -1$.

LEMME 8.8. *Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. La matrice $T_{i,j}A$ est la matrice obtenue à partir de la matrice A en échangeant les lignes i et j de A.*

DÉMONSTRATION. Soit $k, l \in \{1, \ldots, n\}$. Si $k \notin \{i, j\}$, le coefficient situé à la ligne k et la colonne l de la matrice $T_{i,j}A$ est $\sum_{m=1}^{n} \delta_{k,m} a_{m\,l} = a_{k\,l}$. Le coefficient situé à la ligne i et la colonne l de la matrice $T_{i,j}A$ est $a_{j\,l}$. Enfin, le coefficient situé à la ligne j et la colonne l de la matrice $T_{i,j}A$ est lui $a_{i\,l}$. □

Nous allons à présent montrer que la méthode du pivot de Gauss pour la résolution de systèmes linéaires fonctionne toujours, autrement dit qu'il est toujours possible, à partir d'un système (S) $AX = B$ quelconque, de se ramener à un système triangulaire supérieur à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, i.e. à l'aide de produits à gauche par des matrices d'éliminations et de transpositions :

THÉORÈME 8.9 (Méthode du pivot de Gauss). *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Il existe une matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, produit de matrices d'éliminations et de transpositions telle que MA soit une matrice triangulaire supérieure.*

REMARQUE 8.10. Si M est une telle matrice alors, en particulier, le système (S) $AX = B$ est équivalent au système $MAX = MB$, qui est triangulaire supérieur.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 8.9. On montre le résultat par récurrence sur n. Précisément, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, produit de matrices d'éliminations et de transpositions, telle que MA est une matrice triangulaire supérieure.

Le résultat est vrai pour $n = 1$ car toute matrice carrée de taille 1 est en particulier triangulaire supérieure.

Supposons à présent la propriété vérifiée au rang $n-1$ pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ fixé et reprenons notre matrice quelconque A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Si la première colonne de A est nulle, A est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ où $B \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$: d'après l'hypothèse de récurrence, il existe alors une matrice $N \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$, produit de matrices $N_1, \ldots, N_m$ où $m \in \mathbb{N}$ et, pour tout $s \in \{1, \ldots, m\}$, N_s est une matrice d'élimination ou une matrice de transposition de $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, telle que NB soit une matrice triangulaire supérieure de $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. On note alors pour tout $s \in \{1, \ldots, m\}$,

$$M_s := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & N_s & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

et $M = \prod_{s=1}^{m} M_s$. Pour tout $s \in \{1, \ldots, m\}$, si N_s est une matrice d'élimination, resp. de transition, de $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, alors M_s est une matrice d'élimination, resp. de transposition, de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Enfin, la matrice

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & NB & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

est triangulaire supérieure.

Supposons maintenant que la première colonne de A soit non nulle, et notons i_0 le plus petit indice $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $a_{i\,1} \neq 0$. Si $i_0 \neq 1$, on multiplie tout d'abord à gauche la matrice A par la matrice de transposition $T_{i_0,1}$ (afin d'échanger les lignes i_0 et 1 de A) et on considère alors la matrice $A' := T_{i_0,1}A$. Si $i_0 = 1$, on pose $A' := A$. Ainsi, si on note $A' = \left(a'_{i\,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a dans tous les cas $a'_{1\,1} \neq 0$ et on peut alors multiplier, à gauche, la matrice A'par la matrice d'élimination $E := E_1\left(-\frac{a'_{2\,1}}{a'_{1\,1}}, \ldots, -\frac{a'_{n\,1}}{a'_{1\,1}}\right)$ afin d'éliminer les autres coefficients de la première colonne de A' : on a

$$EA' = \begin{pmatrix} a'_{11} & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $B \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. On applique ensuite l'hypothèse de récurrence à B comme dans le cas précédent : reprenant les mêmes notations, le produit

$$METi_{i_0,1}A = MEA' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & NB & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

est une matrice triangulaire supérieure, et la matrice $MET_{i_0,1}$ est bien une matrice inversible produit de matrices d'éliminations et de transpositions. □

2. La décomposition LU

La décomposition dite LU consiste en la “factorisation” de matrices vérifiant une certaine condition de “régularité” en le produit d'une matrice triangulaire inférieure (L pour “Lower”) par une matrice triangulaire supérieure (U pour “Upper”). Cela permet de ramener la résolution de systèmes linéaires mettant en jeu ces matrices particulières à la résolution de deux systèmes triangulaires.

Précisément, la décomposition LU existe pour les matrices dont toutes les sous-matrices principales sont inversibles :

DÉFINITION 8.11. *Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. La sous-matrice principale de taille i de A est la sous-matrice de A obtenue en en supprimant les $n-i$ dernières lignes et $n-i$ dernières colonnes. On appelle également mineur principal d'ordre i de A le déterminant de la sous-matrice principale de taille i de A.*

EXEMPLE 8.12. Les sous-matrices principales de $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont (5), $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, et ses mineurs principaux sont donc 5, -40 et -90.

THÉORÈME 8.13 (Décomposition LU). *Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que tous les mineurs principaux de A sont non nuls (i.e. toutes les sous-matrices principales de A sont inversibles). Alors il existe des matrices L (comme lower) et U (comme upper) de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ uniques telles que*

- *L est une matrice triangulaire inférieure dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1,*
- *U est une matrice triangulaire supérieure,*
- *$A = LU$.*

REMARQUE 8.14. Si tous les mineurs principaux de la matrice A sont non nuls, alors A est en particulier inversible (car la sous-matrice principale d'ordre n de A est A elle-même). La réciproque est fausse : par exemple, le mineur principal d'ordre 1 de la matrice inversible $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est égal à 0.

La démonstration de l'existence de la décomposition LU va consister à appliquer l'algorithme du pivot de Gauss. Dans la preuve du théorème 8.13, nous aurons également besoin du lemme suivant :

LEMME 8.15. *Supposons que tous les mineurs principaux de A sont non nuls, et soit $E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice d'élimination. Alors tous les mineurs principaux de la matrice produit EA sont non nuls.*

DÉMONSTRATION. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Notons A_i la sous-matrice principale de taille i de A. Alors $A = \begin{pmatrix} A_i & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathrm{M}_{i,n-i}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{n-i,i}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathrm{M}_{n-i}(\mathbb{K})$. Quant à la matrice d'élimination E, elle est de la forme $\begin{pmatrix} E' & 0_{i,n-i} \\ C' & D' \end{pmatrix}$ où $E' \in M_i(\mathbb{K})$ et $D' \in \mathrm{M}_{n-i}(\mathbb{K})$ sont également des matrices d'éliminations, et $C' \in \mathrm{M}_{n-i,i}(\mathbb{K})$. On a alors

$$EA = \begin{pmatrix} E' & 0_{i,n-i} \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'A_i + 0_{i,n-i}C & E'B + 0_{i,n-i}D \\ C'A_i + D'C & C'B + D'D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'A_i & E'B \\ C'A_i + D'C & C'B + D'D \end{pmatrix}$$

et la matrice principale de taille i de EA est donc la matrice $E'A_i$. Or

$$\det(E'A_i) = \det(E')\det(A_i) = 1 \times \det(A_i) \neq 0. \qquad \square$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 8.13. On montre tout d'abord l'existence de la décomposition LU de A, par récurrence sur n : on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dont les mineurs principaux sont tous non nuls admet une décomposition $A = LU$ telle que $L \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire inférieure dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1, $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure et $A = LU$.

Pour $n = 1$, si $(a) \in \mathrm{M}_1(\mathbb{K})$ est inversible (i.e. $a \neq 0$), alors $(a) = (1)\,(a)$ est une décomposition LU.

Maintenant, supposons la propriété vérifiée au rang $n-1$ pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ fixé, et reprenons notre matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les mineurs principaux sont supposés non nuls.

Notons $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On applique la première étape de l'algorithme du pivot de Gauss à A en choisissant le coefficient $a_{1\,1}$ comme pivot : $a_{1\,1}$ est le mineur principal d'ordre 1 de A et est donc non nul. Si l'on note $E_1 := E_1\left(-\frac{a_{2\,1}}{a_{1\,1}}, \dots, -\frac{a_{n\,1}}{a_{1\,1}}\right)$, on a alors

$$E_1 A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $A' \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Soit $i \in \{1, \dots, n-1\}$ et notons A'_i la matrice principale d'ordre i de A' et $(E_1A)_{i+1}$ la matrice principale d'ordre $i+1$ de E_1A. On a

$$(E_1A)_{i+1} = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,i+1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'_i & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

et $\det\left((E_1A)_{i+1}\right) = a_{1\,1}\det\left(A'_i\right)$. D'après le lemme 8.15, $\det\left((E_1A)_{i+1}\right) \neq 0$ et donc $\det\left(A'_i\right) \neq 0$.

On a ainsi montré que tous les mineurs principaux de la matrice A' de $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ étaient non nuls. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence l'hypothèse de récurrence à A' : il existe une matrice triangulaire inférieure $L' \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ de coefficients diagonaux tous égaux à 1 et une matrice triangulaire supérieure $U' \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ telles que $A' = L'U'$. On a alors

$$E_1 A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & L'U' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & L' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & U' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

et on pose

$$L := (E_1)^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & L' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = E_1\left(\frac{a_{2\,1}}{a_{1\,1}},\dots,\frac{a_{n\,1}}{a_{1\,1}}\right)\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & L' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ et } U := \begin{pmatrix}a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n}\\ 0 & & & \\ \vdots & & U' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

La matrice L est une matrice triangulaire inférieure de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 (car $L' \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $(E_1)^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sont des matrices triangulaires inférieures de coefficients diagonaux tous égaux à 1) et U est une matrice triangulaire supérieure inversible de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (car U' est une matrice triangulaire supérieure inversible de $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $a_{1\,1} \neq 0$).

On montre maintenant l'unicité de la décomposition LU de A : soit $\widetilde{L} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et soit $\widetilde{U} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure telles que $A = \widetilde{L}\widetilde{U}$. On va montrer que $\widetilde{L} = L$ et $\widetilde{U} = U$.

On a $LU = \widetilde{L}\widetilde{U}$ et donc $\widetilde{L}^{-1}L = \widetilde{U}U^{-1}$. Or le produit $\widetilde{L}^{-1}L$ est une matrice triangulaire inférieure dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 (car L, $\widetilde{L}$ et donc $\widetilde{L}^{-1}$ sont toutes de telles matrices) et le produit $\widetilde{U}U^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure (car $\widetilde{U}$, U et U^{-1} sont toutes de telles matrices). Ainsi, nécessairement, $\widetilde{L}^{-1}L = \widetilde{U}U^{-1} = I_n$, et donc $L = \widetilde{L}$ et $U = \widetilde{U}$. $\square$

EXEMPLE 8.16. On calcule la décomposition LU de la matrice $A := \begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 5 & -6 & 2\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les mineurs principaux sont non nuls (exemple 8.12).

Nous savons qu'il existe $L := \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ b & c & 1\end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $U := \begin{pmatrix}d & e & f\\ 0 & g & h\\ 0 & 0 & k\end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$A = \begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 5 & -6 & 2\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ b & c & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d & e & f\\ 0 & g & h\\ 0 & 0 & k\end{pmatrix}.$$

On a alors

(1) $d = 5, e = 2, f = 1$, ainsi

$$\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 5 & -6 & 2\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ b & c & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 0 & g & h\\ 0 & 0 & k\end{pmatrix}$$

(2) $5 = a \times 5$ donc $a = 1$, et $-4 = b \times 5$ donc $b = -\frac{4}{5}$, ainsi

$$\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 5 & -6 & 2\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -\frac{4}{5} & c & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 0 & g & h\\ 0 & 0 & k\end{pmatrix}$$

(3) $-6 = 1 \times 2 + 1 \times g$ donc $g = -8$, et $2 = 1 \times 1 + 1 \times h$ donc $h = 1$, ainsi

$$\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 5 & -6 & 2\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -\frac{4}{5} & c & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 0 & -8 & 1\\ 0 & 0 & k\end{pmatrix}$$

(4) $2 = \left(-\frac{4}{5}\right) \times 2 + c \times (-8)$ donc $c = -\frac{9}{20}$, ainsi

$$\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 5 & -6 & 2\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{20} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 0 & -8 & 1\\ 0 & 0 & k\end{pmatrix}$$

(5) $1 = \left(-\frac{4}{5}\right) \times 1 + \left(-\frac{9}{20}\right) \times 1 + 1 \times k$ donc $k = \frac{9}{4}$, ainsi

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

et cette dernière expression est la décomposition LU de A.

EXEMPLE 8.17. On va maintenant utiliser une présentation plus proche de l'algorithme de Gauss. On rappelle d'abord la propriété suivante : soient $k \in \{1, \ldots, n\}$ et $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Soit une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $C_1, \ldots, C_n$ ses lignes (dans l'ordre). Alors, la matrice $AE_k(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ est la matrice obtenue à partir de la matrice A en ajoutant à la colonne C_k la combinaison linéaires $\sum_{l=k+1}^{n} \alpha_l C_l$ de colonnes.

On reprend la matrice $A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les mineurs principaux sont non nuls. Alors, en appliquant l'algorithme de Gauss

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= I_3 E_1(1, -\frac{4}{5}) E_1(-1, \frac{4}{5}) \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & \frac{18}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} E_2(-\frac{9}{20}) E_2(\frac{9}{20}) \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & \frac{18}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Supposons que tous les mineurs principaux de la matrice A soient non nuls. Comme illustré par l'exemple ci-dessus, le calcul de la décomposition LU de A est peu coûteux en calculs. De plus, si B est un vecteur colonne de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, cette factorisation nous permet de résoudre le système (S) $AX = B$, de vecteur inconnu $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de manière particulièrement efficace. En effet,

$$AX = B \iff L(UX) = B \iff \exists Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / \begin{cases} UX = Y \\ LY = B \end{cases}.$$

Résoudre le système (S) revient donc à résoudre successivement le système $LY = B$ puis le système $UX = Y$ (U est également inversible), qui sont tous deux des systèmes triangulaires que l'on peut donc résoudre à l'aide des méthodes de remontée et de descente.

EXEMPLE 8.18. On reprend la matrice $A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de l'exemple 8.16 précédent et on résout le système $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ de vecteur inconnu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La décomposition LU de A est $A = LU$ avec $L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix}$ et $U := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$.

Pour résoudre le système $AX = B$, on commence par résoudre le système $LY = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ de vecteur inconnu $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: on a

$$LY = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = 1 \\ a + b & = 2 \\ -\frac{4}{5}a - \frac{9}{20}b + c & = 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & = 1 \\ b & = 2 - 1 = 1 \\ -\frac{4}{5}a - \frac{9}{20}b + c & = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = 1 \\ b & = 1 \\ c & = 3 + \frac{4}{5} \times 1 + \frac{9}{20} \times 1 = \frac{17}{4} \end{cases}$$

Puis on résout le système $UX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{17}{4} \end{pmatrix}$: on a

$$UX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{17}{4} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{17}{4} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y + z & = 1 \\ \quad -8y + z & = 1 \\ \qquad \frac{9}{4}z & = \frac{17}{4} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y + z & = 1 \\ \quad -8y + z & = 1 \\ \qquad z & = \frac{17}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y + z & = 1 \\ \qquad y & = -\frac{1}{8}\left(1 - \frac{17}{9}\right) = \frac{1}{9} \\ \qquad z & = \frac{17}{9} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = \frac{1}{5}\left(1 - 2 \times \frac{1}{9} - \frac{17}{9}\right) = -\frac{10}{45} = -\frac{2}{9} \\ y & = \frac{1}{9} \\ z & = \frac{17}{9} \end{cases}$$

et le vecteur $X = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix}$ est l'unique solution du système $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. La décomposition PLU

Une généralisation de la décomposition LU existe pour toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Cette décomposition fait apparaître, en plus d'une matrice triangulaire inférieure de coefficients diagonaux tous égaux à 1 et d'une matrice triangulaire supérieure, une matrice dite de permutation, due aux éventuels échanges de lignes dans l'application de l'algorithme du pivot de Gauss.

DÉFINITION 8.19. *Une matrice de permutation de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *est une matrice dans laquelle chaque ligne et chaque colonne ne contient qu'un seul coefficient non nul, égal à* 1.

REMARQUE 8.20.

— Une matrice de permutation est obtenue par permutation (au sens du groupe symétrique) des lignes de la matrice identité I_n i.e. en appliquant une permutation du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ à l'ensemble des lignes de la matrice I_n. Il est à noter que, une permutation de $\mathfrak{S}_n$ étant une composition de transpositions et une matrice de transposition (définition 8.6) étant obtenue en appliquant une transposition (au sens du groupe symétrique) à l'ensemble des lignes de la matrice I_n, une matrice de permutation est un produit de matrices de transpositions.
— Si $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice de permutation obtenue en appliquant une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ aux lignes de la matrice identité I_n, $\det(P) = \epsilon(\sigma)$ où $\epsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ. En particulier, P est inversible.

— $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice de permutation obtenue en appliquant une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ aux lignes de I_n, et si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice produit PM est la matrice obtenue à partir de M en appliquant la même permutation σ aux lignes de M.

THÉORÈME 8.21 (Décomposition PLU). *Soit A une matrice quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe des matrices P, L et U de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que*

— *P est une matrice de permutation,*

— *L est une matrice triangulaire inférieure dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1,*

— *U est une matrice triangulaire supérieure,*

— *$A = PLU$.*

Dans la preuve de ce théorème, on utilisera, comme dans la preuve du théorème 8.13 de décomposition LU, l'algorithme du pivot de Gauss mais en faisant, ici, également intervenir des échanges de lignes. On emploiera également le lemme suivant :

LEMME 8.22. *Soient $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $k < i < j$. Soient $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ et considérons les matrices de transposition $T_{i,j}$ et d'élimination $E_k(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Alors*

$$E_k(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n)\, T_{i,j} = T_{i,j} E_k(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$$

DÉMONSTRATION. Commençons par remarquer que multiplier à droite une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ par une matrice de transposition $T_{r,s}$, $r, s \in \{1, \ldots, n\}$, $r \neq s$, échange les colonnes r et s de la matrice M.

Considérons ensuite la matrice $E_k(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$. Il s'agit de la matrice

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} k \\ \downarrow \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \alpha_{k+1} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \alpha_n & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

La matrice $E_k(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)\, T_{i,j}$, obtenue en échangeant les colonnes i et j de $E_k(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$, est la matrice obtenue en échangeant les lignes i et j de la matrice $E_k(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$, i.e. la matrice $T_{i,j} E_k(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$ ($k < i < j$). □

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 8.21. Nous allons montrer le résultat suivant, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: pour tout $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, pour toute matrice A dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice triangulaire supérieure $U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, il existe $r, s \in \mathbb{N}$ et des matrices de transposition $T_1, \ldots, T_r \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ainsi que des matrices d'élimination $E_1, \ldots, E_s \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$A = \left(\prod_{i=1}^{r} T_i\right)\left(\prod_{j=1}^{s} E_j\right) U :$$

un tel produit $\left(\prod_{i=1}^{r} T_i\right)$ forme une matrice de permutation et le produit $\left(\prod_{j=1}^{s} E_j\right)$ forme une matrice triangulaire inférieure de coefficients diagonaux tous égaux à 1.

Le résultat est vrai pour $n = 1$ pour la même raison que celle évoquée dans la preuve du théorème 8.13. Supposons donc maintenant le résultat vrai au rang $n - 1$ pour $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$ fixé, et considérons notre matrice quelconque A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Si la première colonne de A est nulle, A est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ où $B \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$: d'après l'hypothèse de récurrence, il existe alors une matrice triangulaire supérieure $U' \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, il existe des entiers naturels r et s, il existe des matrices de transposition $T'_1, \ldots, T'_r \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et des matrices d'élimination $E'_1, \ldots, E'_s \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ telles que $B = \left(\prod_{i=1}^{r} T'_i\right)\left(\prod_{j=1}^{s} E'_j\right) U'$.

On pose alors $U := \begin{pmatrix} 0 & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & U' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, s\}$, $T_i := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T'_i & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et $E_j := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & E'_j & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. Pour $i \in \{1, \ldots, r'\}$, la matrice T_i est une matrice de transposition de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et, pour $j \in \{1, \ldots, s'\}$, la matrice E_j est une matrice d'élimination de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Enfin,

$$A = \left(\prod_{i=1}^{r} T_i\right)\left(\prod_{j=1}^{s} E_j\right) U.$$

Si la première colonne de A est non nulle, notons i_0 le plus petit indice $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $a_{i\,1} \neq 0$: si $i_0 \neq 1$, on commence par multiplier à gauche la matrice A par la matrice de transposition $T := T_{i_0,1}$ et on considère la matrice $A' := TA$, et, si $i_0 = 1$, on pose $A' := A$. Ainsi, si on note $A' = \left(a'_{i\,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $a'_{1\,1} \neq 0$, on peut ensuite multiplier à gauche la matrice A' par la matrice d'élimination $E := E_1\left(-\frac{a'_{2\,1}}{a'_{1\,1}}, \ldots, -\frac{a'_{n\,1}}{a'_{1\,1}}\right)$ afin d'éliminer les autres coefficients de la première colonne de A' : on a

$$EA' = \begin{pmatrix} a'_{1\,1} & a'_{1\,2} & \cdots & a'_{1\,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $B \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. En procédant de la même manière que dans le cas précédent (i.e. en appliquant l'hypothèse de récurrence à B) et en conservant les mêmes notations, on obtient alors l'égalité

$$EA' = \left(\prod_{i=1}^{r} T_i\right)\left(\prod_{j=1}^{s} E_j\right) U$$

i.e.

$$A' = E^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r} T_i\right)\left(\prod_{j=1}^{s} E_j\right) U.$$

Maintenant, $E^{-1} = \left(E_1\left(-\frac{a'_{2\,1}}{a'_{1\,1}}, \ldots, -\frac{a'_{n\,1}}{a'_{1\,1}}\right)\right)^{-1} = E_1\left(\frac{a'_{2\,1}}{a'_{1\,1}}, \ldots, \frac{a'_{n\,1}}{a'_{1\,1}}\right)$. Comme les matrices de transposition T_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$, échangent des lignes d'indices strictement plus grands que 1, il existe d'après le lemme 8.22, une matrice d'élimination $\widetilde{E} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $E^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r} T_i\right) = \left(\prod_{i=1}^{r} T_i\right)\widetilde{E}$.

Ainsi, on peut écrire $A' = TA = (\prod_{i=1}^r T_i)\, \widetilde{E} \left(\prod_{j=1}^s E_j\right) U$ et comme $T^{-1} = T$,

$$A = T\left(\prod_{i=1}^r T_i\right) \widetilde{E} \left(\prod_{j=1}^s E_j\right) U. \qquad \square$$

REMARQUE 8.23. Il n'y a pas unicité de la décomposition PLU. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 8.24. Considérons la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. On applique l'algorithme du pivot de Gauss pour déterminer une décomposition PLU de A.

On commence par échanger les deux premières lignes :

$$T_{2,1}\, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis on élimine le coefficient non nul de la première colonne de cette dernière matrice :

$$E_1(0,-1)\, T_{2,1}\, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on utilise le coefficient situé sur la ligne 2 et la colonne 2 de cette dernière matrice comme pivot et on a :

$$E_2(-1)\, E_1(0,-1)\, T_{2,1}\, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose alors $U := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (la matrice $U \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure) et on a :

$$\begin{aligned} A &= (T_{2,1})^{-1} (E_1(0,-1))^{-1} (E_2(-1))^{-1}\, U \\ &= T_{2,1}\, E_1(0,1)\, E_2(1)\, U. \end{aligned}$$

Si on pose $P := T_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $L := E_1(0,1)\, E_2(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, P est une matrice de permutation de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, L est une matrice triangulaire inférieure de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de coefficients diagonaux tous égaux à 1, et on a :

$$A = PLU.$$

Une décomposition PLU d'une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ permet notamment de résoudre efficacement tout système $AX = B$ de vecteur inconnu $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, où B est un vecteur colonne de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$AX = B \iff PLUX = B \iff \exists (Y,Z) \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2 / \begin{cases} UX = Y \\ LY = Z \\ PZ = B \end{cases}$$

La résolution d'un tel système revient à la résolution successive des trois systèmes

(1) $PZ = B$, de vecteur inconnu $Z \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, système possédant une unique solution Z rapide à calculer car P est une matrice de permutation (les coordonnées de $Z = P^{-1}B$ sont obtenues par permutation des coordonnées de B),

(2) $LY = Z$, de vecteur inconnu $Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, système possédant une unique solution Y (L est inversible) et résoluble par la méthode de descente (L est triangulaire inférieure),

(3) $UX = Y$, de vecteur inconnu $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, qui est un système triangulaire supérieur et donc résoluble par la méthode de remontée.

EXEMPLE 8.25. Reprenons la matrice A de l'exemple précédent 8.24. Nous allons utiliser la décomposition PLU calculée alors pour déterminer la solution du système $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ de vecteur inconnu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On commence par résoudre le système $PZ = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ de vecteur inconnu $Z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: on a

$$PZ = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta & = 0 \\ \alpha & = -1 \\ \gamma & = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = -1 \\ \beta & = 0 \\ \gamma & = 5 \end{cases}$$

Puis on résout le système $LY = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ de vecteur inconnu $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: on a

$$LY = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = -1 \\ b & = 0 \\ a+b+c & = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = -1 \\ b & = 0 \\ c & = 5-(-1)-0 = 6 \end{cases}$$

Enfin, on résout le système $UX = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$: on a

$$UX = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad + z & = -1 \\ \quad y + z & = 0 \\ \quad\ -z & = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad + z & = -1 \\ \quad y + z & = 0 \\ \qquad z & = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \quad + z & = -1 \\ \quad y & = -(-6) = 6 \\ \quad z & = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = -1-(-6) = 5 \\ y & = 6 \\ z & = -6 \end{cases}$$

et le vecteur $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ est l'unique solution du système $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

4. La décomposition de Cholesky

La décomposition de Cholesky est une factorisation des matrices symétriques définies positives (définition 2.36). Elle est construite à partir de la décomposition LU de ces matrices : les matrices symétriques définies positives vérifient en effet l'hypothèse de “régularité” du théorème 8.13.

PROPOSITION 8.26. *Soit $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Alors tous les mineurs principaux de S sont strictement positifs.*

DÉMONSTRATION. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ et notons S_i la sous-matrice principale de taille i de S. Remarquons tout d'abord que $S_i \in \mathrm{S}_i(\mathbb{R})$. Soit $\widetilde{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{i,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ et notons $X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. On a alors ${}^t\widetilde{X} A_i \widetilde{X} = {}^tXAX > 0$ et la matrice symétrique S_i est donc définie positive. En particulier, la matrice $S_i \in \mathrm{S}_i(\mathbb{R})$ est diagonalisable (théorème 5.6) et ses valeurs propres sont strictement positives (proposition 5.14) : le déterminant de S_i est alors égal au produit de ses valeurs propres (avec multiplicités) et est donc strictement positif. □

COROLLAIRE 8.27. *Soit $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Alors S admet une décomposition LU. De plus, les coefficients diagonaux de U sont strictement positifs.*

DÉMONSTRATION. D'après la proposition précédente, tous les mineurs principaux de S sont strictement positifs, en particulier non nuls : on peut donc appliquer le théorème 8.13 à la matrice S qui possède alors une décomposition $S = LU$ avec $L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \star & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $U = \begin{pmatrix} u_{11} & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ et notons S_i, L_i et U_i les sous-matrices principales de taille i respectives de S, L et U : on a $L_i = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \star & & 1 \end{pmatrix}, U_i = \begin{pmatrix} u_{11} & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{ii} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_i(\mathbb{R})$ et

$$S = \begin{pmatrix} S_i & A \\ B & C \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} L_i & 0_{i,n-i} \\ D & E \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} U_i & F \\ 0_{n-i,i} & G \end{pmatrix}$$

avec $A, F \in \mathrm{M}_{i,n-i}(\mathbb{R})$, $B, D \in \mathrm{M}_{n-i,i}(\mathbb{R})$ et $C, E, G \in \mathrm{M}_{n-i}(\mathbb{R})$. Alors

$$S = LU = \begin{pmatrix} L_iU_i & L_iF \\ DU_i & DF + EG \end{pmatrix}$$

et, en particulier, $S_i = L_iU_i$ et donc $\det(S_i) = \det(L_i)\det(U_i) = \prod_{j=1}^{i} u_{jj}$. Or $\det(S_i) > 0$ (par la proposition précédente) donc $\prod_{j=1}^{i} u_{jj} > 0$. On a ainsi montré que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\prod_{j=1}^{i} u_{jj} > 0$. En particulier $u_{11} > 0$ et, si $i \in \{2, \ldots, n\}$, $\prod_{j=1}^{i} u_{jj} > 0$ et $\prod_{j=1}^{i-1} u_{jj} > 0$ donc, $u_{ii} = \frac{\prod_{j=1}^{i} u_{jj}}{\prod_{j=1}^{i-1} u_{jj}} > 0$. □

THÉORÈME 8.28 (Décomposition de Cholesky). *Soit $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Il existe une unique matrice $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure à coefficients* *diagonaux strictement positifs (en particulier T est inversible) telle que*

$$S = T\,{}^tT.$$

DÉMONSTRATION. On considère la décomposition $S = LU$ de S. D'après le corollaire 8.27 ci-dessus, les coefficients diagonaux $u_{1\,1},\dots,u_{n\,n}$ de U sont tous strictement positifs et on pose alors

$$D := \begin{pmatrix} \sqrt{u_{1\,1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{u_{n\,n}} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Remarquons que l'on a

$$S = LU = LDD^{-1}U = T\,{}^t\widetilde{T}$$

où $T := LD = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{1\,1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ \star & & \sqrt{u_{n\,n}} \end{pmatrix}$ et $\widetilde{T} = {}^t(D^{-1}U) = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{1\,1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ \star & & \sqrt{u_{n\,n}} \end{pmatrix}$ car $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{u_{1\,1}}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{u_{n\,n}}} \end{pmatrix}$. Notons que T et $\widetilde{T}$ sont des matrices triangulaires inférieures et que leurs coefficients diagonaux sont tous strictement positifs.

Nous allons montrer que $\widetilde{T} = T$. Comme S est une matrice symétrique, on a $T\,{}^t\widetilde{T} = S = {}^tS = \widetilde{T}\,{}^tT$ et donc, comme la matrice $\widetilde{T}$ est inversible, $\widetilde{T}^{-1}T = {}^tT\,{}^t\widetilde{T}^{-1}$. À présent, comme $\widetilde{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{u_{1\,1}}} & & 0 \\ & \ddots & \\ \star & & \frac{1}{\sqrt{u_{n\,n}}} \end{pmatrix}$, on a $\widetilde{T}^{-1}T = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \star & & 1 \end{pmatrix}$ et ${}^tT\,{}^t\widetilde{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, d'où $\widetilde{T}^{-1}T = I_n$ et donc $\widetilde{T} = T$.

Montrons enfin que la décomposition $S = T\,{}^tT$, avec $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs, est unique. Soit donc $T' = \begin{pmatrix} t_{1\,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ \star & & t_{n\,n} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs tels que $S = T'\,{}^tT'$ et montrons que $T' = T$. Commençons par noter D' la matrice diagonale inversible $\begin{pmatrix} t_{1\,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{n\,n} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On a $S = T'\,{}^tT' = T'D'^{-1}D'\,{}^tT'$. Comme $T'D'^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire inférieure de coefficients diagonaux tous égaux à 1 et $D'\,{}^tT' \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure, l'égalité $S = \left(T'D'^{-1}\right)\left(D'\,{}^tT'\right)$ est <u>la</u> décomposition LU de S. On obtient ainsi les égalités $L = TD^{-1} = T'D'^{-1}$ et $U = D\,{}^tT = D'\,{}^tT'$. Or $D\,{}^tT = \begin{pmatrix} u_{1\,1} & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{n\,n} \end{pmatrix}$ et $D'\,{}^tT' = \begin{pmatrix} t_{1\,1}^2 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{n\,n}^2 \end{pmatrix}$ donc, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $t_{i\,i}^2 = u_{i\,i}$ i.e. $t_{i\,i} = \sqrt{u_{i\,i}}$ (car $t_{i\,i} > 0$), et donc $D' = D$. D'où, comme $TD^{-1} = T'D'^{-1}$, l'égalité $T = T'$. □

EXEMPLE 8.29. Considérons la matrice symétrique

$$S := \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix} \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R}).$$

Son polynôme caractéristique est $\chi_S = (6-X)(4-X)(12-X)$ donc la matrice symétrique S est définie positive. On cherche $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure de coefficients diagonaux strictement positifs telle que

$$S = T\,{}^tT = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}.$$

On a alors

(1) $a^2 = 6$ donc $a = \sqrt{6}$ (car $a > 0$),

(2) $ba = 2$ donc $b = \frac{2}{\sqrt{6}}$,

(3) $da = -2$ donc $d = -\frac{2}{\sqrt{6}}$,

(4) $b^2 + c^2 = 6$ donc $c = \sqrt{6-b^2} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ ($c > 0$),

(5) $db + ec = -2$ donc $e = \frac{1}{c}\left(-2 - db\right) = \sqrt{\frac{3}{16}}\left(-2 + \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

(6) $d^2 + e^2 + f^2 = 10$ donc $f = \sqrt{10 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = 3$ ($f > 0$).

Ainsi

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{6} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est la décomposition de Cholesky de la matrice symétrique définie positive S.

REMARQUE 8.30. — Comme illustré dans l'exemple ci-dessus, le calcul de la décomposition de Cholesky de S est plus avantageux que le calcul de la décomposition LU de S (il y a moins de coefficients à déterminer).

— Si B est un vecteur colonne de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la décomposition de Cholesky de la matrice S permet de résoudre efficacement le système $SX = B$ de vecteur inconnu $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: résoudre ce système revient à résoudre successivement les deux systèmes triangulaires inversibles $TY = B$, de vecteur inconnu $Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et ${}^tTX = Y$.

5. Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $A = M - N$ une écriture dans $M_n(\mathbb{K})$ avec M inversible. Soit $B \in \mathbb{K}^n$ fixé. Soit $X \in \mathbb{K}^n$

$$AX = B \iff (M-N)X = B \iff X = M^{-1}NX + M^{-1}B.$$

On transforme ainsi un système linéaire en la recherche de point fixe.

THÉORÈME 8.31. *Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $A = M - N$ une écriture dans $M_n(\mathbb{K})$ avec M inversible. Soit $B \in \mathbb{K}^n$. On suppose que le rayon spectral $\rho(M^{-1}N)$ de $M^{-1}N$ est strictement plus petit que 1. Alors, la suite définie par $X_0 \in \mathbb{K}^n$ fixé quelconque et pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$X_{k+1} = M^{-1}NX_k + M^{-1}B$$

converge et tend vers l'unique solution de $AX = B$.

DÉMONSTRATION. Soit Y l'unique solution de $AX = B$. On peut donc écrire $B = AY = MY - NY$ Alors $MX_{k+1} - MY = NX_k + B - MY = N(X_k - Y)$ et donc $X_{k+1} - Y = M^{-1}N(X_k - Y)$. Par récurrence, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$X_k - Y = (M^{-1}N)^k(X_0 - Y).$$

Comme le rayon spectral de $M^{-1}N$ est supposé strictement inférieur à 1, la suite de matrices $((M^{-1}N)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et par continuité $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers Y. □

REMARQUE 8.32. Si on dispose d'une norme $\| \ \|$ sur $\mathbb{K}^n$ dont la norme matricielle subordonnée $\||\ \||$ sur $M_n(\mathbb{K})$ vérifie $\||M^{-1}N\|| < 1$, alors on dispose d'une majoration de l'erreur

$$\|X_k - Y\| = \|(M^{-1}N)^k(X_0 - Y)\| \leqslant \||(M^{-1}N)^k\||\|X_0 - Y\| \leqslant \||M^{-1}N\||^k\|X_0 - Y\|.$$

DÉFINITION 8.33. *On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ est à diagonale strictement dominante si sur toute ligne i de A, $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n |a_{ij}|$.*

EXEMPLE 8.34. La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est à diagonale strictement dominante.

LEMME 8.35. *Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice à diagonale strictement dominante.*

— *Alors A est inversible.*
— *Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ la diagonale de A et $N := M - A$. Alors la norme $\rho(M^{-1}N) \leqslant \||M^{-1}N\||_\infty < 1$.*

DÉMONSTRATION. Soit λ une valeur propre de A et $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé de norme $\|v\|_\infty = 1$. Soit i tel que $|x_i| = 1$. Alors

$$|\lambda - a_{ii}| = |(\lambda - a_{ii})x_i| = \left|\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n a_{ij}x_j\right| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n |a_{ij}x_j| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n |a_{ij}|.$$

On en déduit que λ est non nulle et que A est donc inversible.

Par le lemme 6.13, on a $\rho(M^{-1}N) \leqslant \||M^{-1}N\||_\infty$. Par calcul de la norme matricielle subordonnée à la norme infinie, $\||M^{-1}N\||_\infty = \max_j \{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|\} < 1$. □

Comme conséquence du lemme, on obtient la

PROPOSITION 8.36 (Méthode de Jacobi). *Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ à diagonale strictement dominante. Soit $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$. Alors, la suite définie par $X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ fixé quelconque et pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n a_{ij}x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

converge et tend vers l'unique solution de $AX = B$.

DÉMONSTRATION. La matrice A à diagonale strictement dominante est inversible. On écrit $A = M - N$ avec $M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ 0 & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ la diagonale de A et $N := M - A =$

$\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & & \\ & & \ddots & \\ -a_{n1} & & & 0 \end{pmatrix}$. La formule de récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = M^{-1}NX_k + M^{-1}B$, s'exprime alors en coordonnées par la formule de la proposition. Par le lemme 8.35, le rayon spectral de $M^{-1}N$ est strictement plus petit que 1. Le théorème 8.31 permet alors de conclure. □

Chapitre 9

Résolution de systèmes linéaires surdéterminés

Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution de systèmes linéaires non nécessairement carrés.

1. Méthode des moindres carrés

Soit A une matrice de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ (i.e. avec m lignes et n colonnes). Soit B un vecteur de $\mathbb{K}^m$. L'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ n'a de solution que si B appartient à l'image de A, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$ de dimension au plus n. Pour un vecteur B général, si m est strictement plus grand que n, il n'y a donc pas de solution.

On cherche plutôt un vecteur X tel que la distance entre AX et B soit minimale. On note $p(B)$ la projection orthogonale de B sur l'image de A. Alors, par le théorème de Pythagore, puisque $AX - p(B) \in \mathrm{Im}\,(A)$ et $p(B) - B \in (\mathrm{Im}\,A)^{\perp}$,

$$\|AX - B\|^2 = \|AX - p(B) + p(B) - B\|^2 = \|AX - p(B)\|^2 + \|p(B) - B\|^2 \geqslant \|p(B) - B\|^2$$

est minimale exactement quand $AX = p(B)$. Or,

$$\begin{aligned} AX = p(B) &\iff AX \in \mathrm{Im}\,(A) \text{ et } AX - B \perp \mathrm{Im}\,(A) \iff \forall Y \in \mathbb{K}^n, \langle AY, AX - B\rangle = 0 \\ &\iff \forall Y \in \mathbb{K}^n, {}^tY{}^tA(AX - B) = 0 \iff \forall Y \in \mathbb{K}^n, \langle Y, {}^tA(AX - B)\rangle = 0 \\ &\iff {}^tAAX = {}^tAB. \end{aligned}$$

On est donc conduit à résoudre l'équation ${}^tAAX = {}^tAB$, dite des moindres carrés, avec la matrice carrée ${}^tAA \in M_n(\mathbb{K})$. Le lemme suivant assure l'existence d'une solution à cette équation.

LEMME 9.1. *Soit A une matrice de $M_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors l'équation des moindres carrés ${}^tAAX = {}^tAB$ admet une solution. Si de plus, A est de rang n, alors ${}^tAA$ est inversible et il y a une unique solution $({}^tAA)^{-1}{}^tAB$.*

DÉMONSTRATION. On va montrer $\mathrm{Im}\,({}^tAA) = \mathrm{Im}\,({}^tA)$. On a d'abord par définition, l'inclusion $\mathrm{Im}\,({}^tAA) \subset \mathrm{Im}\,({}^tA)$. D'autre part, $\mathrm{Ker}\,({}^tAA) \supset \mathrm{Ker}\,(A)$. Soit $X \in \mathrm{Ker}\,({}^tAA)$. Alors $\|AX\|^2 = {}^t(AX)(AX) = {}^tX{}^tAAX = 0$ et donc $AX = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\,({}^tAA) = \mathrm{Ker}\,(A)$. Par le théorème du rang, on en déduit $\dim \mathrm{Im}\,({}^tAA) = \dim \mathrm{Im}\,(A) = \dim \mathrm{Im}\,({}^tA)$ puis $\mathrm{Im}\,({}^tAA) = \mathrm{Im}\,({}^tA)$ □

EXEMPLE 9.2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 3, la matrice A est de rang 2 et B n'est pas dans l'image de A. Comme ${}^tAA = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$ et ${}^tAB = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, la solution de l'équation $AX = B$ au sens des moindres carrés est la solution de $\begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, c'est à dire $X = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/3 \end{pmatrix}$. L'erreur commise est $\|A \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/3 \end{pmatrix} - B\| = \| \begin{pmatrix} 0 \\ 1-1/6 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{pmatrix} \| = \sqrt{7/6}$.

2. Droite de régression

Étant donné un nuage de points $((x_i, y_i))_{i=1,\cdots,m}$ dans le plan $\mathbb{K}^2$ on cherche une droite qui l'approche au mieux. Idéalement, on cherche a et b dans $\mathbb{K}$ tels que pour tout $i = 1, \cdots, m$, $y_i = ax_i + b$ autrement dit

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Comme les points ne sont en général pas alignés, on cherche plutôt à minimiser la distance (au carré) $\sum_{i=1}^m (ax_i + b - y_i)^2$. On calcule avec les moyennes $\overline{x} := \sum_i x_i/m$ et $\overline{y} := \sum_i y_i/m$. La matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i x_i^2 & m\overline{x} \\ m\overline{x} & m \end{pmatrix}$$

est de rang 2 comme $\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{pmatrix}$ si les x_i ne sont pas tous égaux et a pour inverse

$$\frac{1}{m\sum_i x_i^2 - m^2\overline{x}^2} \begin{pmatrix} m & -m\overline{x} \\ -m\overline{x} & \sum_i x_i^2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i y_i \\ m\overline{y} \end{pmatrix}$, on trouve

$$a = \frac{\sum_i x_i y_i - m\overline{x}\overline{y}}{\sum_i x_i^2 - m\overline{x}^2} \text{ et } b = \frac{(\sum_i x_i^2)\overline{y} - \overline{x}(\sum_i x_i y_i)}{\sum_i x_i^2 - m\overline{x}^2}.$$

3. Décomposition en valeurs singulières

On cherche une forme de diagonalisation des matrices non nécessairement carrées.

DÉFINITION 9.3. *On dit qu'une matrice* $D = (d_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ *est diagonale si ses seuls termes non nuls sont parmi les* d_{ii}.

LEMME 9.4. *Soit* $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. *Alors* ${}^t\!AA \in M_n(\mathbb{R})$ *est symétrique réelle positive.*

DÉMONSTRATION. La démonstration est formellement la même que pour les matrices carrées. D'abord ${}^t({}^t\!AA) = {}^tA({}^t({}^t\!A)) = {}^t\!AA$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a ${}^tX{}^t\!AAX = \|AX\|^2 \geqslant 0$. $\square$

DÉFINITION 9.5. *Soit* $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. *Les valeurs singulières de* A *sont les racines carrées positives des valeurs propres de la matrice symétrique réelle positive* ${}^t\!AA$.

THÉORÈME 9.6 (Décomposition en valeurs singulières). *Toute matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ se décompose en $A = U\Sigma {}^tV$ où $U \in M_m(\mathbb{R})$ et $V \in M_n(\mathbb{R})$ sont orthogonales et $\Sigma \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est diagonale avec les valeurs singulières de A sur la diagonale.*

DÉMONSTRATION. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ de leur produit scalaire standard noté $\langle\ ,\ \rangle$. Comme ${}^tAA$ est symétrique réelle, il existe une matrice orthogonale V de $M_n(\mathbb{R})$ de passage entre la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et une base orthonormale de vecteurs propres V_i de ${}^tAA$ telle que ${}^tAA = V \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^tV$. Quitte à ordonner les espaces propres, on peut supposer que pour tout $i = 1, \cdots, r$, $\lambda_i > 0$ et pour tout $j = r+1, \cdots, n$, $\lambda_j = 0$. Comme

$$\langle AV_i, AV_j\rangle = {}^t(AV_i)AV_j = {}^tV_i{}^tAAV_j = \lambda_j {}^tV_iV_j = \begin{cases} \lambda_j \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

la famille $\mathcal{F} = \{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}AV_1, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}AV_2, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}AV_r\}$ est orthonormale de $\mathbb{R}^m$. On complète cette famille libre, d'abord en une base de $\mathbb{R}^m$ puis, par orthonormalisation, en une base orthonormée (U_j) de $\mathbb{R}^m$. On note U la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^m$ à cette base. On va montrer que ${}^tUAV = \Sigma$ où $\Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_r & \\ & & & & 0 \\ & & & & \end{pmatrix}$ est la matrice diagonale de $M_{mn}(\mathbb{R})$ avec les valeurs singulières $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i}$ de A. Le coefficient $({}^tUAV)_{ij}$ se calcule par

$$({}^tUAV)_{ij} = \text{ligne}_i({}^tU)A\ \text{colonne}_j(V) = {}^tU_iAV_j.$$

Si $i \leqslant r$, il vaut

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} {}^t(AV_i)AV_j = \begin{cases} \sqrt{\lambda_j} \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

Si $i \geqslant r+1$ et si $j \leqslant r$, U_i est orthogonal à AV_j et le coefficient est donc nul. Si $i \geqslant r+1$ et si $j \geqslant r+1$, $\|AV_j\|^2 = {}^tV_j{}^tAAV_j = {}^tV_j({}^tAAV_j) = {}^tV_j\lambda_jV_j = 0$ et donc $AV_j = 0$ et le coefficient est encore nul. On a donc obtenu ${}^tUAV = \Sigma$ et puis $A = U\Sigma{}^tV$. $\square$

EXEMPLE 9.7. On reprend l'exemple 9.2. On vérifie que ${}^tAA\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et ${}^tAA\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 24\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. On peut donc prendre $V := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$ orthogonale et $\Sigma := \begin{pmatrix}\sqrt{4} & 0\\0 & \sqrt{24}\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\sqrt{6}\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.

Ensuite,

$$U_1 := \frac{1}{\sqrt{4}}A\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ et } U_2 := \frac{1}{\sqrt{24}}A\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

qu'on peut compléter en une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ avec $U_3 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $U_4 := \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}$

On obtient $U := \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ orthogonale et on peut vérifier que $A = U\Sigma {}^tV$.

4. Pseudo-inverse

DÉFINITION 9.8. *Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et une décomposition en valeurs singulières $A = U\Sigma^tV$ où $U \in M_m(\mathbb{R})$ et $V \in M_n(\mathbb{R})$ sont orthogonales et $\Sigma \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est diagonale avec les valeurs singulières de A sur la diagonale. La matrice pseudo-inverse de A associée à cette décomposition est la matrice $A' := V\Sigma'^tU$ avec $\Sigma' := \begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1} & & & & \\ & \frac{1}{\sigma_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ & & & & 0\end{pmatrix}$ de $M_{n,m}(\mathbb{R})$.*

(Elle dépend a priori du choix de la décomposition en valeurs singulières.)

LEMME 9.9. *Avec les notations précédentes, si $r = rang(A)$*

— *AA' est le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^m$ sur l'image de A*

— *$A'A$ est le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur l'image de ${}^tA$.*

— *$AA'A = A$ et $A'AA' = A'$*

— *si $r = n \leqslant m$ alors $A'A = I_n$*

— *et si $r = m =\leqslant n$ alors $AA' = I_m$.*

DÉMONSTRATION. Comme $A = U\Sigma^tV$ et $A' = V\Sigma'^tU$,

$$AA' = U\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \\ & & & & \end{pmatrix}{}^tU \in M_m(\mathbb{R}) \text{ et } A'A = V\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0\end{pmatrix}{}^tV \in M_n(\mathbb{R})$$

où les matrices diagonales ont exactement r coefficients égaux à 1. Toutes les propriétés en découlent. □

THÉORÈME 9.10. *Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $r = n \leqslant m$ et A' une pseudo-inverse. Soit $B \in \mathbb{R}^m$. Alors, la solution de $AX = B$ au sens des moindres carrés est $A'B$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier que $A'B$ est solution de l'équation ${}^tAAX = {}^tAB$. Or,

$${}^tAAA'B = (V^t\Sigma^tU)(U\Sigma^tV)(V\Sigma'^tU)B = V({}^t\Sigma\Sigma\Sigma')^tUB = V({}^t\Sigma)^tUB = {}^tAB. \qquad \square$$

EXEMPLE 9.11. On reprend l'exemple 9.2. Une pseudo inverse de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est

$$A' = V\Sigma'{}^tU = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{6}} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $A'A = I_2$ et on retrouve que la solution au sens des moindres carrés de $AX = B$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $A'B = A'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Version du 2 décembre 2022