UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Calcul Matriciel

Contrôle continu 4

Durée : 2 heures
12 décembre 2022

Nous recommandons de rédiger avec clarté et précision les questions que vous choisissez de traiter, plutôt que d'en traiter beaucoup. Toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration. On peut admettre explicitement le résultat d'une question pour l'utiliser ultérieurement.

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.

Exercice 1 (3 points)**.** Soit $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique. Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Rappeler la définition de la base duale $(a^\star, b^\star, c^\star, d^\star)$ d'une base (a, b, c, d) de $\mathbb{R}^4$.

(b) Décrire les étapes qui permettent, à l'aide de bases duales, de trouver un système d'équations linéaires pour définir le sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^4$ engendré par u et v.

(c) Trouver explicitement un système d'équations linéaires qui définit $V = vect(u, v)$. (Vérifier que u et v satisfont ce système).

Exercice 2 (3 points)**.**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer ses valeurs propres.

(b) Calculer ses espaces propres.

(c) Déterminer sa forme de Jordan (On ne demande pas d'expliciter une base dans laquelle l'endomorphisme associé a une matrice sous forme de Jordan.).

Exercice 3 (4 points)**.**

On considère la matrice $B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

(a) Rappeler les définitions de matrices symétriques et de matrices orthogonales. Vérifier que la matrice B est orthogonale et symétrique.

(b) Sans jamais calculer son polynôme caractéristique, justifier que B est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres avec multiplicités.

(c) Déterminer une base orthonormale de vecteurs propres de B.

Tourner s.v.p.

Exercice 4 (4 points)**.** Le but de l'exercice est de montrer que toutes les racines complexes du polynôme $P = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ de $\mathbb{C}[X]$ sont dans le disque de rayon $R = \max(|d|, 1 + |c|, 1 + |b|, 1 + |a|)$ du plan complexe.

(a) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -d \\ 1 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$.

(b) Calculer la norme subordonnée infinie $|||C|||_\infty$ de cette matrice.

(c) Conclure.

Exercice 5 (3 points)**.** Soit a et b deux nombres réels dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$. Déterminer la limite de la suite de matrice $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ où $M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (3 points)**.** On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que la matrice N admet une décomposition LU, c'est à dire que A s'écrit sous la forme $N = LU$ où L est une matrice triangulaire inférieure avec une diagonale composée de 1 uniquement et U est une matrice triangulaire supérieure inversible.

(b) Écrire la décomposition LU de N. (Vérifier l'égalité des déterminants de N et de LU.)