Calcul Matriciel

Contrôle continu 4- Correction

Durée : 2 heures
12 décembre 2022

Exercice 1 (3 points)**.** Soit $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique. Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Rappeler la définition de la base duale $(a^\star, b^\star, c^\star, d^\star)$ d'une base (a, b, c, d) de $\mathbb{R}^4$.
Réponse : Voir le cours

(b) Décrire les étapes qui permettent, à l'aide de bases duales, de trouver un système d'équations linéaires pour définir le sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^4$ engendré par u et v.
Réponse :
- *On commence par vérifier si (u, v) forme une famille libre.*
- *On complète cette famille en une base (u, v, w, l) de $\mathbb{R}^4$.*
- *On en calcule la base duale $(u^\star, v^\star, w^\star, t^\star)$, composée de formes linéaires.*
- *Un système d'équations linéaires pour $vect(u, v)$ est donné par l'annulation des formes linéaires $w^\star(x, y, z, t) = l^\star(x, y, z, t) = 0$.*

(c) Trouver explicitement un système d'équations linéaires qui définit $V = vect(u, v)$. (Vérifier que u et v satisfont ce système).
Réponse :
- *Le mineur $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ des premières coordonnées de (u, v) est non nul : la famille (u, v) est donc libre.*
- *La famille (u, v, e_3, e_4) a une matrice de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ triangulaire inversible : c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.*
- *La matrice de passage de la base canonique à la base duale de (u, v, e_3, e_4) est la transposée de l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En particulier, $e_3^\star(x, y, z, t) = x - 2y + z$ et $e_4^\star(x, y, z, t) = 6x - 3y + t$.*
- *Un système d'équation pour $vect(u, v)$ est*

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 0 \\ 6x - 3y + t &= 0 \end{cases}$$

Exercice 2 (3 points)**.**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer ses valeurs propres.

Réponse : Le polynôme caractéristique de A est $(P(x) = (1+x)^2(1-x)$. Les valeurs propres de A sont donc 1 est -1.

(b) Calculer ses espaces propres.

Réponse : On vérifie que $vect(e_1 - e_3)$ est l'espace propre de valeur propre 1 et que $vect(e_2)$ est l'espace propre de valeur -1.

(c) Déterminer sa forme de Jordan (On ne demande pas d'expliciter une base dans laquelle l'endomorphisme associé a une matrice sous forme de Jordan.).

Réponse : Comme $\dim E_{-1}$ est strictement inférieure à la multiplicité de -1 dans le polynôme caractéristique, la matrice A n'est pas diagonalisable. Son polynôme minimal est donc $(P(x) = (1+x)^2(1-x)$ et sa forme de Jordan $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Exercice 3 (4 points)**.**

On considère la matrice $B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

(a) Rappeler les définitions de matrices symétriques et de matrices orthogonales. Vérifier que la matrice B est orthogonale et symétrique.

Réponse : voir le cours pour la première partie. Comme ${}^tB = B$ la matrice B est symétrique. Comme ${}^tBB = Id_3$ la matrice B est orthogonale.

(b) Sans jamais calculer son polynôme caractéristique, justifier que B est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres avec multiplicités.

Réponse : Comme B est symétrique réelle, elle est diagonalisble dans une base orthonormale. Comme B est orthogonale, ses seules valeurs propres possibles sont 1 et -1. Comme il y a trois valeurs propres et que leur somme vaut la trace 1, 1 est valeur propre double et -1 valeur propre simple.

(c) Déterminer une base orthonormale de vecteurs propres de B.

Réponse : On remarque que $e_1 + e_2$ et $e_1 - 2e_3$ sont vecteurs propres pour la valeur propre 1. L'orthogonal $2e_1 - 2e_2 + e_3$ est donc vecteur propre pour la valeur propre -1. Reste à orthonormer la base de E_1 par le procédé de Gram-Schmidt. On trouve que $(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2), \frac{1}{\sqrt{18}}(e_1 - e_2 - 4e_3, \frac{1}{3}(2e_1 - 2e_2 + e_3))$ est une base orthonormale de vecteurs propres de B.

Exercice 4 (4 points)**.** Le but de l'exercice est de montrer que toutes les racines complexes du polynôme $P = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ de $\mathbb{C}[X]$ sont dans le disque de rayon $R = \max(|d|, 1 + |c|, 1 + |b|, 1 + |a|)$ du plan complexe.

(a) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -d \\ 1 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$.

Réponse : En développant suivant la dernière colonne, on trouve que

$$\begin{vmatrix} -X & 0 & 0 & -d \\ 1 & -X & 0 & -c \\ 0 & 1 & -X & -b \\ 0 & 0 & 1 & -X-a \end{vmatrix} = d + cX + bX^2 + X^4 + aX^3 = P(X).$$

(b) Calculer la norme subordonnée infinie $|||C|||_\infty$ de cette matrice.

Réponse : D'après le cours, la norme subordonnée infinie $|||C|||_\infty$ est le maximum des norme $\| \ \|_1$ des vecteurs lignes, c'est à dire $R = \max(|d|, 1 + |c|, 1 + |b|, 1 + |a|)$.

(c) Conclure.

Réponse : Les racines de P sont les valeurs propres de C. Elle ont un module inférieur au rayon spectral de C donc inférieur à la norme subordonnée infinie $|||C|||_\infty$, c'est à dire R.

Exercice 5 (3 points). Soit a et b deux nombres réels dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$. Déterminer la limite de la suite de matrice $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ où $M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$. *Réponse : La mtrice M est stochastique, strictment positive donc primitive. Elle admet donc un vecteur d'état, calculé comme le vecteur propre stochastique pour ${}^tM$ et pour la valeur propre 1. On trouve donc que la limite des puissance de M est $\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}$.*

Exercice 6 (3 points). On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que la matrice N admet une décomposition LU, c'est à dire que A s'écrit sous la forme $N = LU$ où L est une matrice triangulaire inférieure avec une diagonale composée de 1 uniquement et U est une matrice triangulaire supérieure inversible.

Réponse : On vérifie que les mineurs principaux $|2| = 2$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$ et $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4$ sont non nuls : la matrice N admet donc une forme LU.

(b) Écrire la décomposition LU de N. (Vérifier l'égalité des déterminants de N et de LU.)

Réponse : En cherchant L sous la forme $L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$ et $U = \begin{vmatrix} d & e & f \\ 0 & g & h \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix}$, on trouve de proche en proche $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ avec $\det L \det U = 1 \times 4 = \det N$.