UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Calcul Matriciel

Contrôle continu 3

Durée : 1 heure
1^{ier} Décembre 2022

Nous recommandons de rédiger avec clarté et précision les questions que vous choisissez de traiter, plutôt que d'en traiter beaucoup. Toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration. On peut admettre explicitement le résultat d'une question pour l'utiliser ultérieurement. Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. La note finale sera sur 10.

Exercice 1 (Questions de cours, 2 points)**.**

Donner les définitions de matrices positives, matrices primitives et matrices irréductibles. Énoncer le théorème de Frobenius.

Exercice 2 (Décomposition polaire, 4 points)**.**
Soit

$$B = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Expliquer pourquoi la matrice ${}^tBB$ est diagonalisable dans une base orthonormée.
(b) Diagonaliser explicitement ${}^tBB$ en précisant une matrice de passage et son inverse.
(c) En déduire la racine carrée de ${}^tBB$.
(d) En déduire la décomposition polaire $B = OS$ de B avec O orthogonale et S symétrique définie positive.

Exercice 3 (Rayon spectral, 2 points)**.**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) En utilisant le vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ montrer que le rayon spectral de A est supérieur à 6.
(b) En utilisant une norme subordonnée appropriée (soit $\|\|\ \|\|_1$, soit $\|\|\ \|\|_2$, soit $\|\|\ \|\|_\infty$), montrer que le rayon spectral de A est inférieur à 10.

Exercice 4 (Limite des puissances, 4 points)**.**

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}$, on considère la matrice $M_{ab} := \begin{pmatrix} a & 1+i \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer le rayon spectral de M_{ab} en fonction de a, b.
(b) Pour quelles valeurs de a et b complexes, la suite $(M_{ab}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ des puissances de la matrice M_{ab} converge-t-elle vers la matrice nulle de $M_2(\mathbb{C})$?
(c) Montrer que pour $a = 2i$, la suite $(M_{ab}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.
(d) Pour $a = b = 1$, montrer que la suite $(M_{1,1}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. *On pourra utiliser la forme de Dunford pour montrer que la suite des coefficients d'indice* $(1, 2)$ *de* $M_{1,1}^k$ *ne converge pas.*