UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Calcul Matriciel

Contrôle continu 2

Durée : 1 heure
27 Octobre 2022

Nous recommandons de rédiger avec clarté et précision les questions que vous choisissez de traiter, plutôt que d'en traiter beaucoup. Toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration. On peut admettre explicitement le résultat d'une question pour l'utiliser ultérieurement.

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.

Exercice 1 (Diagonalisation, 2 points)**.**
On rappelle qu'un sous espace V d'un espace vectoriel E est dit stable par un endomorphisme u de E si $u(V)$ est inclus dans V. La restriction $u_{|V} : V \to V$ de u à V est alors un endomorphisme de V bien défini.

En utilisant la notion de polynôme annulateur, montrer que la restriction à un sous-espace stable d'un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable.

Exercice 2 (Forme de Jordan, 4 points)**.**
Soit n un entier naturel. Soit J_n la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ carrée de taille n

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit n et m deux entiers naturels.

(a) Rappeler l'écriture de J_n^2, le produit de la matrice J_n par elle-même.
(b) Déterminer l'image de J_n^2. Calculer la dimension du noyau $\ker J_n^2$.
(c) Rappeler l'écriture des puissances J_n^{n-2} et J_n^n.
(d) Montrer que J_{2m}^2 est nilpotente et calculer son indice de nilpotence.
(e) En déduire la forme de Jordan de J_{2m}^2.

Exercice 3 (Système différentiel linéaire, 4 points)**.**

(a) Écrire une décomposition de Dunford de la matrice $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ en somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente qui commutent.
(b) Calculer $\exp(tA)$.
(c) Résoudre le sytème

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = 2x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = 2x_3(t) \\ x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 3 \end{cases}$$