UNIVERSITÉ DE RENNES 1

**Calcul Matriciel**

# Contrôle continu 1

Durée : 1 heure
29 Septembre 2022

Nous recommandons de rédiger avec clarté et précision les questions que vous choisissez de traiter, plutôt que d'en traiter beaucoup. Toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration. On peut admettre explicitement le résultat d'une question pour l'utiliser ultérieurement.

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.

**Exercice 1** (Dualité, 5 points)**.**
*Le but de l'exercice est de trouver un système d'équations pour un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$.

(a) Soit $a = (1, 2, 0, 0)$, $b = (3, 4, 1, 0)$ et $c = (0, 0, 1, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et $V$ le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(a, b, c)$ de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{a, b, c\}$. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre et la compléter en une base $\mathcal{B} = (a, b, c, d)$ de $\mathbb{R}^4$.
(b) Déterminer la base duale $\mathcal{B}^\star = (a^\star, b^\star, c^\star, d^\star)$ de la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$.
(c) Déterminer un système d'équations pour $V$.
(d) Combien faut-il d'équations linéaires, linéairement indépendantes pour décrire un sous-espace vectoriel de dimension $p$ dans un espace vectoriel de dimension $n$ ? Expliquer votre affirmation, en termes de bases et de bases duales.

**Exercice 2** (Forme $QR$, 3,5 points)**.**

(a) Montrer que le produit $A = QR$, où $Q$ est une matrice orthogonale de taille $n$ et $R$ une matrice triangulaire supérieure de taille $n$ avec des termes diagonaux strictement positifs, est inversible.
(b) La matrice
$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$
admet-elle une forme $QR$, c'est à dire une écriture $A = QR$ où $Q$ est une matrice orthogonale et $R$ une matrice triangulaire supérieure avec des termes diagonaux strictement positifs ?
(c) Si oui, mettre la matrice $A$ sous forme $QR$.

**Exercice 3** (Questions de cours sur les endomorphismes, 1,5 points)**.**
Soit l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire standard simplement noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

L'endomorphisme $u$ est-il

(a) orthogonal ?
(b) auto-adjoint ?
(c) une symétrie orthogonale ?