UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Exercices pour l'Agrégation (Algèbre)

Le but de cette feuille est de montrer comment étendre les résultats connus sur la similitude des matrices, l'irréductibilité des polynômes, la classification des espaces vectoriels, à des structures définies sur un anneau A plutôt que sur un corps K.

RÉFÉRENCES PRINCIPALES

Partie 1. : Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas (*Oraux X-ENS Algèbre 2*)
Partie 2. : Daniel Perrin (*Cours d'algèbre*)
Partie 3. : Jean-Marc Couveignes (*Modules de type fini sur un anneau principal*)

1. SIMILITUDE ET EXTENSION DE CORPS

Exercice 1 (Similitude sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$)

Le but de l'exercice est de montrer que deux matrices carrées réelles semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ le sont également dans $M_n(\mathbb{R})$. Soit A et B deux matrices carrées réelles semblables par $P = Q + iR$ inversible dans $M_n(\mathbb{C})$ avec $Q, R \in M_n(\mathbb{R})$ (i.e. $PA = BP$).

1. Montrer que si Q ou R est inversible alors, A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.
2. Dans le cas général, montrer que A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$ par une matrice inversible de la forme $Q + xR$.

Exercice 2 (Similitude sur K et L)

Soit K un corps commutatif infini et $L \supset K$ un sur-corps de K. Soit A et B deux matrices de $M_n(K)$ semblables dans $M_n(L)$. Le but de l'exercice est de montrer qu'elles sont même semblables dans $M_n(K)$. On cherche donc à montrer l'existence d'une solution $P = (p_{ij}) \in M_n(K)$ du système linéaire $PA - BP = 0$, inversible dans $M_n(K)$.

1. Montrer que le rang r de ce système sur K est strictement inférieur à n^2. On notera $m := n^2 - r > 0$.
2. Soit $P_1, P_2, \cdots, P_m$ une base de l'espace des solutions sur K. En utilisant le polynôme $\det(X_1P_1 + X_2P_2 + \cdots + X_mP_m) \in K[X_1, X_2, \cdots, X_m]$, montrer que A et B sont semblables dans $M_n(K)$ par une matrice inversible de la forme $x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots + x_mP_m$.

2. Irréductibilité dans $A[X]$ vs $K[X]$

Exercice 3

Donner l'exemple d'un anneau principal A tel que $A[X]$ ne soit pas principal.

Exercice 4 (polynômes irréductibles de $A[X]$)

Le but de l'exercice est de déterminer les polynômes irréductibles de $A[X]$ si A est un anneau factoriel. Soit donc A un anneau factoriel (i.e. intègre et vérifiant la propriété suivante : ayant fixé un ensemble $\mathcal{I}$ de représentants des éléments irréductibles pour la relation d'association, tout élément a de A s'écrit de façon unique comme $a = u \prod_{\pi \in \mathcal{I}} \pi^{v_\pi(a)}$ où u est une unité de A, $v_\pi(a)$ des entiers naturels et si $x \in A$ est non nul, $x^0 := 1$.)

On notera K son corps de fractions (i.e. construit comme $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$ ou bien si l'anneau A inclus dans un corps L, K est composé des éléments ab^{-1} de L, avec $a, b \in A \times (A - \{0\})$)

1. Rappeler les définitions d'irréductibilité, de primalité et de la relation d'association dans un anneau intègre.
2. Montrer que le groupe $(A[X])^\times$ des inversibles de $A[X]$ est réduit au groupe $A^\times$ des polynômes constants inversibles dans A.
3. Montrer que $A[X]$ est intègre.
4. On définit le contenu $c(P)$ d'un polynôme non nul P de $A[X]$ comme un $pgcd$ dans A (bien défini modulo les unités de A) des coefficients de P. Montrer que si P et Q sont deux polynômes non nuls de $A[X]$ alors $c(PQ) = c(P)c(Q)$. On pourra commencer par le cas où $c(P) = c(Q) = 1$ (on dit que P et Q sont primitifs).
5. Montrer que les polynômes de $A[X]$ constants irréductibles dans A et les polynômes de $A[X]$ non constants primitifs et irréductibles dans $K[X]$ sont irréductibles dans $A[X]$.
6. Réciproquement, soit $P \in A[X]$ irréductible dans $A[X]$.
   (a) si $\deg P = 0$, montrer que P est un polynôme constant irréductible dans A.
   (b) si $\deg P > 0$, montrer que P est primitif.
   (c) si $\deg P > 0$, montrer que P est irréductible dans $K[X]$.

3. A-module et K-espaces vectoriels

Exercice 5 (Exemples)

1. Donner l'exemple d'un anneau A et d'un sous A-module libre de rang n strict dans A^n. Peut-on choisir que A soit un corps ?
2. Donner l'exemple d'un anneau A et d'un A-module de type fini qui n'admet pas de base. Peut-on choisir que A soit un corps ?

Exercice 6 (classification des A-modules de type fini sur les anneaux principaux)

On admettra le théorème de la base adaptée, qui précise le fait qu'un sous-module d'un module libre sur un anneau principal est libre.

Théorème *Soit A un anneau principal, M un A-module libre de rang $r > 0$ et N un sous A-module de M. Alors, il existe une base $(v_1, v_2, \cdots, v_r)$ de M, un entier $m \leq r$ et des scalaires non nuls $a_1, a_2, \cdots, a_m$ de A tels que*

— $a_1|a_2|\cdots|a_m$

— $(a_1v_1, a_2v_2, \cdots, a_mv_m)$ *est une base de N.*

Démontrer le théorème de classification des A-modules de type fini sur les anneaux principaux.

Théorème *Soit A un anneau principal et M un A-module de type fini. Alors, il existe un entier naturel r, un entier m, et des scalaires $a_1|a_2|\cdots|a_m)$ tous non nuls et non-inversibles dans A tels que*

$$M \equiv A^r \oplus A/a_1A \oplus A/a_2A \oplus \cdots \oplus A/a_mA.$$

À titre culturel, noter que l'entier r est appelé le *rang de M*. Il ne dépend pas du choix d'un supplémentaire de la torsion. Les a_i sont appelés les *facteurs invariants de M*. Ils sont bien définis à association près. La donnée (r, a_i) caractérise le A-module à isomorphisme près.

Exercice 7 (Existence de supplémentaires)

Soit A un anneau principal et M un A-module libre de type fini. Soit N un sous A-module de M. Montrer que N admet un supplémentaire dans M si et seulement si M/N est sans torsion.

Exercice 8 (Noyau)

Soit A un anneau principal, M un A-module et $a \in A$. On appelle *noyau* de a le sous-module $M(a)$ de M défini par $M(a) := \{m \in M, am = 0_M\}$.

1. Montrer que si a et b dans A sont premiers entre eux (i.e. $aA + bA = A$), alors $M(ab) = M(a) \oplus M(b)$.
2. Plus généralement, soit $a_1, a_2, \cdots, a_m$ des éléments de A deux à deux premiers entre eux et a leur produit. On cherche le théorème des noyaux
$$M(a) = \oplus_{i=1}^m M(a_i).$$
   (a) En remarquant que les $b_i := \prod_{j \neq i} a_j$ sont premiers entre eux, et qu'il existe donc des λ_i dans A tels que $1 = \sum \lambda_i b_i$, montrer que $M(a) = \sum_{i=1}^m M(a_i)$.
   (b) On note π_i l'application de $M(a)$ sur $M(a)$ qui envoie m sur $\lambda_i b_i m$. Montrer que $\sum_i \pi_i = Id$, que si $i \neq j$, alors $\pi_i \circ \pi_j = 0$ et donc $\pi_i^2 = \pi_i$. En déduire que $M(a) = \oplus_i Im(\pi_i)$.
   (c) Montrer que $Im(\pi_i) = M(a_i)$, et conclure.

Exercice 9 (Modules de torsion)

Soit A un anneau principal et M un A-module de type fini de torsion. Soit p un élément irréductible de A. On appelle *composante p-primaire* de M la réunion $M_p := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M(p^i)$ des noyaux des puissances de p.

Montrer que $M = \oplus_{p \in \mathcal{I}} M_p$ où $\mathcal{I}$ est un ensemble d'irréductibles deux à deux distincts à association près.

Exercice 10 (Endomorphisme et $K[X]$-modules de type fini de torsion)

Soit K un corps et E un K-espace vectoriel.

1. On suppose que E est de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rcl} s_u : K[X] \times E & \to & E \\ (P, v) & \mapsto & P(u)(v) \end{array}$$
munit E d'une structure de $K[X]$-module de type fini de torsion. Comment retrouver le polynôme minimal de u à partir de cette structure ?
2. Que donne l'exercice 9 pour cette structure ?
3. Réciproquement, soit $s : K[X] \times E \to E$ une structure de $K[X]$-module de type fini de torsion sur un K-espace vectoriel E. Montrer que E est de dimension finie sur K. Définir un endomorphisme u de E dont la structure s_u de $K[X]$-module associée par la question 1. est la structure s.
4. Montrer que deux $K[X]$-modules de type fini de torsion sont isomorphes si et seulement si les endomorphismes associés sont conjugués.
5. Donner l'endomorphisme associé au $K[X]$-module $K[X]/(X - \lambda)^m K[X]$ où $\lambda \in A$ et $m \in \mathbb{N}^\star$. On choisira une K-base adaptée.
6. Donner l'endomorphisme associé au $K[X]$-module $K[X]/P(X)K[X]$ où P est un polynôme de $K[X]$. On choisira une K-base adaptée.
7. On suppose que E est de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E.
   (a) Que donne le théorème de classification des $K[X]$-module de type fini pour l'endomorphisme u ?
   (b) Décrire le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de u.
   (c) Montrer qu'ils ont les mêmes facteurs K-irréductibles.
8. On suppose que E est de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme minimal est scindé. Montrer que u admet une forme de Jordan.