UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Exercices pour l'Agrégation (Algèbre)

Le but de cette feuille est de montrer comment étendre les résultats connus sur la similitude des matrices, l'irréductibilité des polynômes, la classification des espaces vectoriels, à des structures définies sur un anneau A plutôt que sur un corps K.

RÉFÉRENCES PRINCIPALES

Partie 1. : Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas (*Oraux X-ENS Algèbre 2*)
Partie 2. : Daniel Perrin (*Cours d'algèbre*)
Partie 3. : Jean-Marc Couveignes (*Modules de type fini sur un anneau principal*)

1. SIMILITUDE ET EXTENSION DE CORPS

Exercice 1 (Similitude sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$)

Le but de l'exercice est de montrer que deux matrices carrées réelles semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ le sont également dans $M_n(\mathbb{R})$. Soit A et B deux matrices carrées réelles semblables par $P = Q + iR$ inversible dans $M_n(\mathbb{C})$ avec $Q, R \in M_n(\mathbb{R})$ (i.e. $PA = BP$).

1. Montrer que si Q ou R est inversible alors, A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.

   Réponse : L'égalité $PA = BP$ implique en isolant les parties réelles et imaginaires $QA = BA$ et $RA = BR$. Ainsi, si Q ou R est inversible, A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

2. Dans le cas général, montrer que A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$ par une matrice inversible de la forme $Q + xR$.

   Réponse : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(Q + xR)A = B(Q + xR)$. Par ailleurs, la fonction polynomiale $x \mapsto \det(Q+xR)$ est à coefficients réels, non nulle en i puisque $P = Q+iR$ est inversible. Il existe donc un réel x tel que $Q + xR$ soit inversible : A et B sont donc semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (Similitude sur K et L)

Soit K un corps commutatif infini et $L \supset K$ un sur-corps de K. Soit A et B deux matrices de $M_n(K)$ semblables dans $M_n(L)$. Le but de l'exercice est de montrer qu'elles sont même semblables dans $M_n(K)$. On cherche donc à montrer l'existence d'une solution $P = (p_{ij}) \in M_n(K)$ du système linéaire $PA - BP = 0$, inversible dans $M_n(K)$.

1. Montrer que le rang r de ce système sur K est strictement inférieur à n^2. On notera $m := n^2 - r > 0$.

   Réponse : Comme ce système linéaire homogène à coefficients réels d'inconnue P admet une solution non nulle dans $M_n(\mathbb{C})$, son rang sur $\mathbb{C}$ n'est pas maximal : il est donc inférieur à n^2. Mais le rang sur $\mathbb{R}$ comme sur $\mathbb{C}$ est la taille du plus grand mineur non nul de la matrice du système. Les deux rangs de cette matrice à coefficients réels sont donc égaux et strictement inférieurs à n^2.

2. Soit $P_1, P_2, \cdots, P_m$ une base de l'espace des solutions sur K. En utilisant le polynôme $\det(X_1P_1 + X_2P_2 + \cdots + X_mP_m) \in K[X_1, X_2, \cdots, X_m]$, montrer que A et B sont semblables dans $M_n(K)$ par une matrice inversible de la forme $x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots + x_mP_m$.

   Réponse : Par calcul de mineurs, $P_1, P_2, \cdots, P_m$ est une famille libre sur L comme sur K de solutions de $PA = BP$. Par la question précédente, c'est donc une base de l'espace des solutions sur L. On peut donc écrire la solution P comme combinaison à coefficients dans L des P_i. Par conséquent, le polynôme $\det(X_1P_1 + X_2P_2 + \cdots + X_mP_m) \in K[X_1, X_2, \cdots, X_m]$ est non nul : il existe donc un m-uplet $(x_1, \cdots, x_m) \in K^m$ tel que $x_1P_1 + \cdots + x_mP_m$ est une matrice inversible de $M_n(K)$ qui conjugue A et B.

2. Irréductibilité dans $A[X]$ vs $K[X]$

Exercice 3

Donner l'exemple d'un anneau principal A tel que $A[X]$ ne soit pas principal.

Réponse : Avec l'anneau $A = \mathbb{Z}$ euclidien donc principal, dans l'anneau $A[X]$, l'idéal $(2, X)$ strict n'est pas principal, car les seuls diviseurs communs de 2 et X sont 1 et -1. Avec l'anneau $A = K[X]$ principal, l'idéal (X, Y) de l'anneau $K[X][Y] = K[X, Y]$ n'est pas principal.

Exercice 4 (polynômes irréductibles de $A[X]$)

Le but de l'exercice est de déterminer les polynômes irréductibles de $A[X]$ si A est un anneau factoriel. Soit donc A un anneau factoriel (i.e. intègre et vérifiant la propriété suivante : ayant fixé un ensemble $\mathcal{I}$ de représentants des éléments irréductibles pour la relation d'association, tout élément a de A s'écrit de façon unique comme $a = u \prod_{\pi \in \mathcal{I}} \pi^{v_\pi(a)}$ où u est une unité de A, $v_\pi(a)$ des entiers naturels et si $x \in A$ est non nul, $x^0 := 1$.)

On notera K son corps de fractions (i.e. construit comme $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$ ou bien si l'anneau A inclus dans un corps L, K est composé des éléments ab^{-1} de L, avec $a, b \in A \times (A - \{0\})$)

1. Rappeler les définitions d'irréductibilité, de primalité et de la relation d'association dans un anneau intègre.

   Réponse : Soit A un anneau (commutatif avec unité) intègre. Un élément a est dit irréductible si ce n'est pas une unité, et si pour tout $b, c \in A$, la relation $a = bc$ implique que b ou c est une unité (i.e. inversible) dans A.

   Un élément $p \in A$ est dit premier s'il n'est pas nul, si ce n'est pas une unité et s'il satisfait la propriété d'Euclide : pour tout $a, b \in A$, $p|ab$ implique $p|a$ ou $p|b$. Les éléments premiers sont irréductibles. La réciproque caractérise les anneaux factoriels parmi les anneaux intègres qui ont la propriété d'existence de factorisation en produits d'irréductibles.

   Deux éléments a et b sont dit associés si $a|b$ et $b|a$. Comme A est intègre, il est équivalent de dire qu'il existe une unité u de A tel que $a = ub$.

2. Montrer que le groupe $(A[X])^\times$ des inversibles de $A[X]$ est réduit au groupe $A^\times$ des polynômes constants inversibles dans A.

   Réponse : En considérant les termes de plus haut degré, puisque A est intègre, l'égalité $PQ = 1$ implique que P et Q de degré nul sont dans A. Les unités de $A[X]$ sont donc les polynômes constants inversibles dans A.

3. Montrer que $A[X]$ est intègre.

   Réponse : En considérant les termes de plus haut degré, puisque A est intègre, l'égalité $PQ = 0$ implique que P et Q de degré nul sont des constantes de A. L'anneau $A[X]$ est donc intègre comme A.

4. On définit le contenu $c(P)$ d'un polynôme non nul P de $A[X]$ comme un $pgcd$ dans A (bien défini modulo les unités de A) des coefficients de P. Montrer que si P et Q sont deux polynômes non nuls de $A[X]$ alors $c(PQ) = c(P)c(Q)$. On pourra commencer par le cas où $c(P) = c(Q) = 1$ (on dit que P et Q sont primitifs).

   Réponse : Soit $P = p_0 + p_1X + p_2X^2 + \cdots + p_dX^d$ et $Q = q_0 + \cdots + q_eX^e$ deux polynômes de $A[X]$ primitifs. Soit a un élément irréductible de A. Comme P et Q sont primitifs, il existe $i \leq d$ et $j \leq e$ tels que a divise les p_l pour $l < i$ et les q_m pour $m < j$ mais ne divise ni p_i ni q_j. Le coefficient de degré $i + j \leq \deg PQ$ de PQ est la somme des p_lq_m avec soit $l < i$ soit $m < j$, divisible par a et de p_iq_j non divisible par a premier dans A factoriel. Ainsi, les coefficients de PQ n'ont pas de diviseurs communs irréductibles. Le polynôme PQ est donc aussi primitif. Soit maintenant P et Q deux polynômes de $A[X]$. Comme $P/c(P)$ et $Q/c(Q)$ sont des polynômes primitifs de $A[X]$ la première partie montre que $PQ/c(P)c(Q)$ l'est aussi. Le $pgcd$ des coefficients de PQ est donc $c(PQ) = c(P)c(Q)$.

5. Montrer que les polynômes de $A[X]$ constants irréductibles dans A et les polynômes de $A[X]$ non constants primitifs et irréductibles dans $K[X]$ sont irréductibles dans $A[X]$.

   Réponse : Soit P un polynôme constant irréductible dans A. Ce n'est pas une unité de A, donc pas non plus de $A[X]$. Si $P = QR$, par considération des termes de plus haut degré, Q et R sont aussi constants dans A. Puisque P est irréductible dans A, Q ou R est une unité dans A donc dans $A[X]$. Donc P est irréductible dans $A[X]$.

   Soit $P \in A[X]$ primitif et irréductible dans $K[X]$. Ce n'est pas une unité de $K[X]$, donc pas non plus de K, ni de A, ni donc de $A[X]$. Soit Q et R de $A[X]$ tels que $P = QR$. comme $P = QR$ dans $K[X]$, soit Q soit R est inversible dans $K[X]$ donc constant. Comme $c(P) = 1 = c(Q)c(R)$, Q et R sont primitifs. Ainsi Q ou R est une constante inversible dans A, et P est donc irréductible dans $A[X]$.

6. Réciproquement, soit $P \in A[X]$ irréductible dans $A[X]$.

   (a) si $\deg P = 0$, montrer que P est un polynôme constant irréductible dans A.

   Réponse : Puisque $\deg P = 0$, P est constant. Puisque P est irréductible, cette constante est irréductible dans A.

   (b) si $\deg P > 0$, montrer que P est primitif.

   Réponse : Si P n'est pas primitif, $P = c(P)P/c(P)$ n'est pas irréductible dans $A[X]$.

   (c) si $\deg P > 0$, montrer que P est irréductible dans $K[X]$.

   Réponse : Comme il n'est pas constant, P n'est pas une unité de $K[X]$. Si $P = QR$ avec Q et R dans $K[X]$, alors, on écrit $Q = a/bq$ avec q primitif dans $A[X]$ et a et b dans A premiers entre eux et de même $R = c/dr$ avec r primitif dans $A[X]$ et c et d dans A premiers entre eux. On trouve $bdP = acqr$, et en calculant les contenus, puisque P, q et r sont primitifs, $bd = ac$. Par conséquent, puisque A est intègre, $P = qr$ dans $A[X]$. L'irréductibilité de P dans $A[X]$ donne que p ou q est une unité de A et donc P ou Q est une unité de $K[X]$. Donc, P est irréductible dans $K[X]$.

Exercice 5 (Exemples)

1. Donner l'exemple d'un anneau A et d'un sous A-module libre de rang n strict dans A^n. Peut-on choisir que A soit un corps ?

   Réponse : $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$ sous module libre strict de rang maximal dans le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$. Par contre, un sous espace vectoriel de dimension maximal d'un espace vectoriel de dimansion finie ne peut pas être strict.

2. Donner l'exemple d'un anneau A et d'un A-module de type fini qui n'admet pas de base. Peut-on choisir que A soit un corps ?

   Réponse : Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de type fini n'admet pas de base car tous ses éléments a vérifient $2a = 0$. Par contre, tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Exercice 6 (classification des A-modules de type fini sur les anneaux principaux)

On admettra le théorème de la base adaptée, qui précise le fait qu'un sous-module d'un module libre sur un anneau principal est libre.

Théorème *Soit A un anneau principal, M un A-module libre de rang $r > 0$ et N un sous A-module de M. Alors, il existe une base $(v_1, v_2, \cdots, v_r)$ de M, un entier $m \leq r$ et des scalaires non nuls $a_1, a_2, \cdots, a_m$ de A tels que*

— $a_1|a_2|\cdots|a_m$

— $(a_1v_1, a_2v_2, \cdots, a_mv_m)$ *est une base de N.*

Démontrer le théorème de classification des A-modules de type fini sur les anneaux principaux.

Théorème *Soit A un anneau principal et M un A-module de type fini. Alors, il existe un entier naturel r, un entier m, et des scalaires $a_1|a_2|\cdots|a_m)$ tous non nuls et non-inversibles dans A tels que*

$$M \equiv A^r \oplus A/a_1A \oplus A/a_2A \oplus \cdots \oplus A/a_mA.$$

À titre culturel, noter que l'entier r est appelé le *rang de M*. Il ne dépend pas du choix d'un supplémentaire de la torsion. Les a_i sont appelés les *facteurs invariants de M*. Ils sont bien définis à association près. La donnée (r, a_i) caractérise le A-module à isomorphisme près.

Réponse : Soit M un A-module de type fini sur un anneau principal A. Soit $g_1, g_2, \cdots, g_r$ un système fini de générateurs de M. Soit le morphisme de A-module $f : AX_1 \oplus \cdots \oplus AX_r \to M, X_i \mapsto g_i$. Son noyau $N(f)$, qui est un sous-module du module libre $AX_1 \oplus \cdots \oplus AX_r$ admet par le théorème de la base adaptée une base de la forme $(a_1v_1, a_2v_2, \cdots, a_mv_m)$ où $a_1|a_2|\cdots|a_m$ sont des éléments de A et où $(v_1, v_2, \cdots, v_r)$ est une base de $AX_1 \oplus \cdots \oplus AX_r$. Par le théorème d'isomorphisme pour f, M est isomorphe à $AX_1 \oplus \cdots \oplus AX_r/N(f)$, isomorphe à $A/a_1A \oplus A/a_2A \oplus A/a_mA \oplus A^{r-m}$.

Exercice 7 (Existence de supplémentaires)

Soit A un anneau principal et M un A-module libre de type fini. Soit N un sous A-module de M. Montrer que N admet un supplémentaire dans M si et seulement si M/N est sans torsion.

Réponse : Si M/N est sans torsion, par le théorème de la base adaptée, il existe une base $(v_1, \cdots, v_r)$ de M et un entier $m \leq r$ tels que $(v_1, \cdots, v_m)$ soit une base de N (les a_i sont tous égaux à 1). Par conséquent, $Av_{m+1} \oplus \cdots Av_r$ est un supplémentaire de N.

Réciproquement, si N admet un supplémentaire S tel que $M = N \oplus S$. Maintenant , M/N est isomorphe au sous module S de M libre donc sans torsion. Donc M/N est sans torsion.

Exercice 8 (Noyau)

Soit A un anneau principal, M un A-module et $a \in A$. On appelle *noyau* de a le sous-module $M(a)$ de M défini par $M(a) := \{m \in M, am = 0_M\}$.

1. Montrer que si a et b dans A sont premiers entre eux (i.e. $aA + bA = A$), alors $M(ab) = M(a) \oplus M(b)$.
   Réponse : D'abord, $M(a) \oplus M(b) \subset M(ab)$. Si a et b sont premier entre eux, il existe u et v dans A tels que $1 = au + bv$. Ainsi, tout m dans $M(ab)$ est somme de aum dans $M(b)$ et bvm dans $M(a)$.
2. Plus généralement, soit $a_1, a_2, \cdots, a_m$ des éléments de A deux à deux premiers entre eux et a leur produit. On cherche à le théorème des noyaux
   $$M(a) = \oplus_{i=1}^m M(a_i).$$
   (a) En remarquant que les $b_i := \prod_{j \neq i} a_j$ sont premiers entre eux, et qu'il existe donc des λ_i dans A tels que $1 = \sum \lambda_i b_i$, montrer que $M(a) = \sum_{i=1}^m M(a_i)$.
   Réponse : Tout irréductible p (premier) qui divise b_i divise l'un des a_j pour $j \neq i$ et ne divise donc pas a_i car les a_k sont deux à deux premiers entre aux. Un irréductible qui diviserait tous les b_i ne divise donc aucun a_i et ne peut donc pas diviser b_1. Les b_i sont donc premiers entre eux.
   D'abord, $\sum_{i=1}^m M(a_i) \subset M(a)$. On conclut en remarquant que tout élément m de $M(a)$ et somme des éléments $\lambda_i b_i m$ de $M(a_i)$.
   (b) On note π_i l'application de $M(a)$ sur $M(a)$ qui envoie m sur $\lambda_i b_i m$. Montrer que $\sum_i \pi_i = Id$, que si $i \neq j$, alors $\pi_i \circ \pi_j = 0$ et donc $\pi_i^2 = \pi_i$. En déduire que $M(a) = \oplus_i Im(\pi_i)$.
   Réponse : On a vu que tout m de $M(a)$ est somme des $\lambda_i b_i m$. Donc, $\sum_i \pi_i = Id$. Comme $a | b_i b_j$, pour $m \in M(a)$, $\pi_i \circ \pi_j(m) = \lambda_i \lambda_j b_i b_j m = 0$. Maintenant $\pi_i = \pi_i \circ \sum_j \pi_j = \pi_i^2$. On a donc un système complet (π_i) de projecteurs et donc $M(a) = \oplus_i Im(\pi_i)$.
   (c) Montrer que $Im(\pi_i) = M(a_i)$, et conclure.
   Réponse : Par construction de π_i, $Im(\pi_i) \subset M(a_i)$. Réciproquement, soit $m \in M(a_i)$. Par la formule de Bezout, $m = \sum \lambda_j b_j m = \lambda_i b_i m = \pi_i(m) \in Im(\pi)$. Donc, $Im(\pi_i) = M(a_i)$ et $M(a) = \oplus_{i=1}^m M(a_i)$.

Exercice 9 (Modules de torsion)

Soit A un anneau principal et M un A-module de type fini de torsion. Soit p un élément irréductible de A. On appelle *composante p-primaire* de M la réunion $M_p := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M(p^i)$ des noyaux des puissances de p.

Montrer que $M = \oplus_{p \in \mathcal{I}} M_p$ où $\mathcal{I}$ est un ensemble d'irréductibles deux à deux distincts à association près.

Réponse : Soit $g_1, \cdots g_r$ un système de générateurs de M. Comme M est de torsion, il existe $a_i \in A$ qui annule g_i. Alors $\prod a_i$ est non nul dans A intègre et annule M. L'annulateur de M est donc un idéal principal non nul de A. Soit a un générateur et $a = u \prod p_i^{v_i}$ son écriture comme produit d'irréductibles deux à deux distincts à association près. Soit $m \in M_{p_i}$. Il est annulé par a et par une puissance p_i^k, donc par couple de Bezout, par leur $pgcd$ et donc dans A factoriel par

$p_i^{v_i}$. Donc, $M_{p_i} \subset M(p_i^{v_i})$ et même $M_{p_i} = M(p_i^{v_i})$ car l'inclusion opposée est évidente. Par le théorème des noyaux, comme les $p_i^{v_i}$ sont deux à deux premiers entre eux, on peut conclure.

Exercice 10 (Endomorphisme et $K[X]$-modules de type fini de torsion)

Soit K un corps et E un K-espace vectoriel.

1. On suppose que E est de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rcl} s_u : K[X] \times E & \to & E \\ (P, v) & \mapsto & P(u)(v) \end{array}$$
munit E d'une structure de $K[X]$-module de type fini de torsion. Comment retrouver le polynôme minimal de u à partir de cette structure ?

   Réponse : La donnée de s_u est équivalente à la donnée du morphisme d'algèbre $\psi_u : (K[X], +, ., \times) \mapsto (End_K(E), +, ., \circ)$, $P \mapsto P(u)$. Elle définit donc une structure de $K[X]$-module. Puisque E est un K-espace vectoriel de dimension finie, il est a fortiori un $K[X]$-module de type fini. Puisque $K[X]$ est de dimension infinie alors que $End_K(E)$ est de dimension finie, le noyau de ψ_u est un idéal non nul de l'anneau principal $K[X]$: son générateur unitaire est le polynôme minimal de u. En particulier, E est un $K[X]$-module de torsion.

2. Que donne l'exercice 9 pour cette structure ?

   Réponse : Pour P irréductible dans $K[X]$, la composante P-primaires de E est le sous espace caractéristique. L'exercice 9 montre donc que E est somme directe des espaces caractéristiques.

3. Réciproquement, soit $s : K[X] \times E \to E$ une structure de $K[X]$-module de type fini de torsion sur un K-espace vectoriel E. Montrer que E est de dimension finie sur K. Définir un endomorphisme u de E dont la structure s_u de $K[X]$-module associée par la question 1. est la structure s.

   Réponse : Soit $g_1, \cdots, g_r$ un système de vecteurs de E générateur pour la structure de $K[X]$-module. Comme s est de torsion, soit $P_i \in K[X]$ unitaire annulateur de g_i. On obtient que tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients dans K des vecteurs $X^k \cdot g_i$ avec $1 \leq i \leq r$ et $0 \leq k < \deg P_i$. Donc, E est un K-espace vectoriel de dimension finie. L'application $u : E \to E$, $v \mapsto X \cdot v$ est linéaire, par les propriétés de la structure s de $K[X]$-module. Comme pour ce choix de u, $P(u)(v) = P(X) \cdot v$, $s_u = s$.

4. Montrer que deux $K[X]$-modules de type fini de torsion sont isomorphes si et seulement si les endomorphismes associés sont conjugués.

   Réponse : Soit E et F deux $K[X]$-modules de type fini de torsion isomorphes par l'isomorphisme de $K[X]$-modules $\varphi : E \to F$ (donc de K-espaces vectoriels). Comme pour $v \in E$, $X \cdot \varphi(v) = \varphi(X \cdot v)$, $u_F(\varphi(v) = \varphi(u_E(v))$. Donc u_E et u_F sont conjugués. Réciproquement, si u_E et u_F sont conjugués par un isomorphisme f de K-espaces vectoriels, $f(P(X) \cdot v) = f(P(u_E)(v))$ et $P(X) \cdot f(v) = P(u_F)(f(v))$ sont égaux, et f est donc un isomorphisme de $K[X]$-modules.

5. Donner l'endomorphisme associé au $K[X]$-module $K[X]/(X - \lambda)^m K[X]$ où $\lambda \in A$ et $m \in \mathbb{N}^\star$. On choisira une K-base adaptée.

   Réponse : Dans la base $(X - \lambda)^{m-1}, (X - \lambda)^{m-2}, \cdots, 1$ de $K[X]/(X - \lambda)^m K[X]$ (on ne note pas les classes), la matrice de l'opération de multiplication par X est la matrice de Jordan $J_m(\lambda)$.

6. Donner l'endomorphisme associé au $K[X]$-module $K[X]/P(X)K[X]$ où P est un polynôme de $K[X]$. On choisira une K-base adaptée.

   Réponse : Dans la base canonique $(1, X, \cdots, X^{d-1})$ où $d = \deg P$, la matrice de la multiplication par X est la matrice compagnon de P.

7. On suppose que E est de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E.

   (a) Que donne le théorème de classification des $K[X]$-module de type fini pour l'endomorphisme u ?

   Réponse : Par le théorème de classification des $K[X]$ modules de type fini, dans le cas des modules de torsion, il existe des polynômes $P_1|P_2|\cdots|P_d$ de $K[X]$ tel que le $K[X]$ module s_u soit isomorphe à $K[X]/P_1K[X] \oplus \cdots K[X]/P_dK[X]$. Par caractérisation de l'isomorphisme, et par la question 6., E admet une base dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs compagnons associés aux polynômes P_i. C'est le théorème de Frobenius.

   (b) Décrire le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de u.

   Réponse : Le polynôme minimal est $\mu_u = P_d$ et le polynôme caractéristique $\chi_u = \prod P_i$.

   (c) Montrer qu'ils ont les mêmes facteurs K-irréductibles.

   Réponse : Par les conditions de divisibilité, $P_1|P_2|\cdots|P_d$, μ_u et χ_u ont les mêmes facteurs irréductibles.

8. On suppose que E est de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme minimal est scindé. Montrer que u admet une forme de Jordan.

   Réponse : Par le théorème de classification des $K[X]$-module de type fini de torsion, il existe des polynômes $P_1|P_2|\cdots|P_d$ de $K[X]$ tel que le $K[X]$ module s_u soit isomorphe à $K[X]/P_1K[X] \oplus \cdots K[X]/P_dK[X]$. Comme P_d est générateur de l'annulateur du $K[X]$-module, P_d est le polynôme minimal de u : il est donc scindé. Par caractéristation de l'isomorphisme, et par la question 5., on trouve que u admet une forme de Jordan.