Feuille de TD

Exercice 1.

(a) Soit p et q deux nombres entiers naturels différents. Calculer le nombre d'intersection en $(0,0)$ des courbes d'équation $y^p = x^q$ et $y = x$.

(b) Que se passe-t-il quand $p = q$?

Exercice 2.

On notera $\zeta = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1))$ la première classe de Chern du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)$ tautologique quotient sur l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^4$. On rappelle la suite d'Euler sur l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^4$.

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)^{\oplus 5} \to T\mathbb{P}^4 \to 0$$

(a) Déterminer le fibré canonique de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^4$.

(b) Déterminer les classes de Chern $c_1(\mathbb{P}^4)$ et $c_2(\mathbb{P}^4)$ du fibré tangent de $\mathbb{P}^4$.

(c) Soit X une intersection partout transverse d'une hypersurface H_2 de $\mathbb{P}^4$ de degré 2 et d'une autre H_3 de degré 3. Expliquer l'origine de la suite exacte

$$0 \to TX \to T\mathbb{P}^4_{|X} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(3) \to 0.$$

(d) En déduire le fibré canonique K_X et les classes de Chern $c_1(X)$ et $c_2(X)$ du fibré tangent de X.

(e) Quelle est la nature de l'espace X (dimension, caractéristiques) ? (On admettra que X est simplement connexe).

(f) Calculer la signature de X.

Exercice 3.

(a) Soit X le produit d'une courbe elliptique E par une courbe C de genre 2. Quelle est la nature de la surface X ?

(b) Soit ω la somme d'une 1 forme holomorphe non nulle a sur E et d'une 1-forme holomorphe non nulle b sur C. Montrer que ω est partout non nulle.

(c) Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage en courbes holomorphe défini par ω. Déterminer le fibré conormal $N\mathcal{F}^\star$ et le fibré cotangent $T\mathcal{F}^\star$ de $\mathcal{F}$.

(d) Déterminer le nombre de tangence d'une fibre F de la projection $\pi : X \to C$ avec le feuilletage.

(e) En déduire la nature du feuilletage $\mathcal{F}$.