Université de Rennes

Feuilletages sur les surfaces complexes

Examen

Exercice 1.

(a) Dans le plan complexe $\mathbb{C}^2$, calculer le nombre d'intersection en $(0,0)$ de la courbe d'équation $(y^2 = x^3 + x^2)$ et, cas par cas, de la courbe d'équation

(i) $(x = 0)$.

(ii) $(y = 0)$.

(iii) $(y = x)$.

(iv) $(y = -x)$.

(b) En déduire l'allure de la courbe d'équation $(y^2 = x^3 + x^2)$ au voisinage du point $(0,0)$.

Exercice 2.

On notera $\zeta = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$ la première classe de Chern du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$ tautologique quotient sur l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^3$. On rappelle la suite d'Euler sur l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^3$.

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^{\oplus 4} \to T\mathbb{P}^3 \to 0$$

(a) Déterminer le fibré canonique $K_{\mathbb{P}^3}$ de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^3$.

(b) Déterminer les classes de Chern $c_1(\mathbb{P}^3)$ et $c_2(\mathbb{P}^3)$ du fibré tangent de $\mathbb{P}^3$.

(c) Soit X une hypersurface lisse de $\mathbb{P}^3$ de degré 4. Déterminer le fibré normal $N_{X/\mathbb{P}^3}$ à X dans $\mathbb{P}^3$ et en déduire l'entier n dans la suite

$$0 \to TX \to T\mathbb{P}^3_{|X} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n)_{|X} \to 0.$$

(d) En déduire le fibré canonique K_X et les classes de Chern $c_1(X)$ et $c_2(X)$ du fibré tangent de X.

(e) Quelle est la nature de l'espace X (dimension, caractéristiques) ? (On admettra que X est simplement connexe).

(f) Calculer la signature de X.

Exercice 3.

Soit $\pi : X \to B$ une fibration rationnelle sur une surface complexe compacte lisse X vers une courbe complexe compacte lisse B. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe en courbes sur X, éventuellement singulier. On notera $[F]$ la classe d'homologie d'une fibre générale lisse de π.

(a) Calculer $[F] \cdot [F]$.

(b) On suppose que les fibres générales de π sont transverses à $\mathcal{F}$.

(i) Calculer $c_1(T\mathcal{F}) \cdot [F]$.

(ii) On rappelle la formule d'adjonction $K_F = (K_X \otimes \mathcal{O}(F))_{|F}$ pour le fibré canonique de la courbe F. En déduire $c_1(N\mathcal{F}) \cdot [F]$.

(c) On suppose $c_1(T\mathcal{F}) \cdot [F] = 0$. Montrer que les fibres générales de π sont transverses à $\mathcal{F}$.