Feuille de TD 7 : Anneaux de fonctions régulières

Les exercices de cette feuille sont inspirés du livre de Klaus Hulek (Elementary Algebraic Geometry).

Autour du théorème de normalisation de Noether

Exercice 1. Soit k un corps infini et $f \in k[x_1, \cdots, x_n]$ un polynôme non nul de degré d. Soit F_d sa partie homogène de degré d.

(a) Montrer que le polynôme $F_d(x_1, \cdots, x_{n-1}, 1)$ admet une valeur non nulle.

(b) Montrer qu'il existe un changement linéaire de variables $x_i = x'_i + \alpha_i x'_n$, $x_n = x'_n$ avec $\alpha_i \in k$ tel que $g(x'_1, \cdots, x'_n) := f(x'_1 + \alpha_1 x'_n, \cdots, x'_{n-1} + \alpha_{n-1}x'_n, x'_n)$ ait pour terme dominant $c(x'_n)^d$ dans $k[x'_1, \cdots, x'_{n-1}][x'_n]$, pour un scalaire c non nul dans k.

Exercice 2 (Théorème de Noether)**.**

Le but est de montrer le théorème de normalisation de Noether : soit k un corps infini et $A = k[a_1, \cdots a_n]$ une algèbre de type fini sur k. Alors il existe des éléments $b_1, \cdots, b_m$ $(m \leqslant n)$ de A, linéaires en les a_i, algébriquement indépendants et tels que A soit finie sur l'algèbre (de polynômes) $k[b_1, \cdots, b_m]$. En résumé, l'extension de type fini $k \subset A$ se décompose comme $k \subset^{\text{pure trans}} k[b_1, \cdots, b_m] \subset^{\text{finie}} A$. On considère l'application $ev : k[x_1, \cdots, x_n] \to A$, $x_i \mapsto a_i$.

(a) Conclure si ev est injective.

(b) Sinon, soit $f \in \ker ev - \{0\}$. Déterminer à l'aide de l'exercice précédent une algèbre A' de type fini sur k avec strictement moins de n générateurs telle que $f \in A'[x_n]$ et a_n est entier sur A' (i.e. il existe un polynôme unitaire $G \in A'[x]$ tel que $G(a_n) = 0$) et conclure par récurrence sur n.

Autour des algèbres finies

Exercice 3 (Lemme de Nakayama)**.**

Soit $A \subset B$ deux anneaux. On suppose que B est une algèbre finie sur A. Soit I un idéal propre de A. Montrer que l'idéal IB de B engendré par I est propre dans B. *On pourra raisonner par l'absurde et écrire dans IB une famille génératrice de B sur A.*

Exercice 4 (Application du théorème de Noether)**.**

(a) Soit $A \subset B$ deux anneaux. On suppose que B est une algèbre finie sur A. Montrer que B est entière sur A (i.e. tout élément x de B est entier sur A). *On pourra prendre une famille génératrice b_j de B sur A, écrire xb_i à l'aide de cette famille.*

(b) En déduire que si B est un corps, A l'est aussi.

(c) Soit k un corps infini et $L = k[a_1, \cdots, a_n]$ une k algèbre de type fini. Montrer à l'aide du théorème de Noether que si L est un corps alors L est algébrique sur k.

Autour du Nullstellensatz

Exercice 5 (Cas particuliers)**.**

(a) Donner l'exemple de deux idéaux propres distincts de $\mathbb{R}[x,y]$ qui définissent la variété vide de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

(b) Soit k un corps algébriquement clos. Montrer que la variété $V(I) \subset \mathbb{A}^1(k)$ d'un idéal I propre de $k[x]$ est non vide.

Exercice 6 (Nullstellensatz de Hilbert)**.**

Le but est de montrer le Nullstellensatz de Hilbert : soit k un corps algébriquement clos.

(i) Alors tout idéal maximal de $k[x_1, \cdots, x_n]$ est de la forme $(x_1 - a_1, \cdots x_n - a_n)$.

(ii) Si $I \subset k[x_1, \cdots, x_n]$ est un idéal propre alors $V(I) \neq \varnothing$.

(iii) Si $I \subset k[x_1, \cdots, x_n]$ est un idéal, alors $I(V(I)) = \sqrt{I}$.

(a) Montrer que tout idéal de $k[x_1, \cdots, x_n]$ de la forme $(x_1 - a_1, \cdots x_n - a_n)$ est maximal.

(b) Réciproquement, soit M un idéal maximal de $k[x_1, \cdots, x_n]$. Montrer que la composée $\varphi : k \subset k[x_1, \cdots, x_n] \to^{\pi} k[x_1, \cdots, x_n]/M$ est un isomorphisme. Soit $a_i := \varphi^{-1}([x_i])$. Montrer que $x_i - a_i$ appartient à M et conclure.

(c) En déduire le point (ii) en remarquant que tout idéal propre est dans un idéal maximal.

(d) Soit $I \subset k[x_1, \cdots, x_n]$ un idéal. Montrer que $I(V(I)) \supset \sqrt{I}$.

(e) Soit $I = (f_1(x), \cdots, f_r(x)) \subset k[x_1, \cdots, x_n]$ un idéal. Soit $f \in I(V(I))$. Soit I_f l'idéal de $k[x_1, \cdots, x_n, t]$ engendré par I et $tf(x) - 1$. Montrer que $V(I_f) \subset \mathbb{A}^{n+1}$ est vide. En déduire l'existence de $g_i, g \in k[x_1, \cdots, x_n, t]$ tels que

$$1 = \sum_{i=1}^{r} g_i(x,t) f_i(x) + g(x,t)(tf(x) - 1).$$

Déterminer un N tel que f^N équivaut à un élément de $I \subset k[x]$ modulo $(tf(x) - 1)$. En remarquant que l'application $k[x_1, \cdots, x_n] \to k[x_1, \cdots, x_n, t]/(tf - 1)$ correspond à la localisation de $k[x_1, \cdots, x_n]$ suivant la partie multiplicative des puissances de f, montrer que f^N appartient à I.

Interprétation géométrique

Exercice 7 (Interprétation géométrique du théorème de normalisation de Noether)**.**

Soit k un corps algébriquement clos. Soit X une variété irréductible de $\mathbb{A}^n(k)$ et $I = I(X) \subset k[x_1, \cdots, x_n]$ premier. Soit $A = k[x_1, \cdots, x_n]/I = k[a_1, \cdots, a_n]$ l'anneau des fonctions de X. Ici, $a_i = [x_i]_A$ est la classe de x_i dans le quotient $A = k[x_1, \cdots, x_n]/I$. Soit $b_1, \cdots, b_m$ dans A fournis par le théorème de Noether, linéaires en les a_i, algébriquement indépendants et tels que A soit finie sur $B := k[b_1, \cdots, b_m]$. Soit $y_1, \cdots, y_m$ linéaires dans $k[x_1, \cdots, x_n]$ des relevés de $b_1, \cdots, b_m$ et $\pi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$, $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (y_1(x), \cdots, y_m(x))$ la projection linéaire associée. Soit p sa restriction à X. Le but est de montrer que les fibres de p sont finies et non vides.

(a) Montrer que p ne dépend pas du choix des relèvements y_i.

(b) En considérant a_i, montrer qu'il existe N et $f_{ij} \in k[y_1, \cdots y_m]$ et $g_i \in I$ tels que

$$x_i^N + \sum_{j=0}^{N-1} f_{ij}(y) x_i^j = g_i(x).$$

(c) Pour tout $y \in \mathbb{A}^m(k)$ fixé, en déduire que l'ensemble des $x \in X$ tels que $p(x) = y$ est fini.

(d) Soit $y^0 \in \mathbb{A}^m(k)$ fixé. Montrer que

$$I + (y_1 - y_1^0, \cdots, y_m - y_m^0) = k[x_1, \cdots, x_n] \iff (b_1 - b_1^0, \cdots, b_m - b_m^0) = A.$$

En déduire par le Nullstellensatz et le lemme de Nakayama que la fibre $p^{-1}(y^0)$ n'est pas vide.